

# 地震所激起而作用于倾斜坝面上的 的流体动载荷\*

陈振诚

(中国科学院力学研究所)

## 提 要

本文给出了简谐地面运动所激起而作用于倾斜坝面上的流体动载荷问题的理论解。所给公式和数学分析方法可以算出有关任何倾角的压力分布。文中证明,在坝和流体的接触面具有倾角时,地面垂直振动对流体动载荷的影响更为显著。地震时的地面运动是不规则的,但本文所给结果和数学分析方法可以直接或经过积分变换后推广到不规则的地面运动问题上去。

## 一、绪 言

著作[1—4]给出了简谐地面运动时作用于坝面上的流体动压力,但是,它们都假定坝和流体的接触面是垂直于地面的,并且只考虑了地面横向振动所激起的动载荷而未考虑地面垂直振动对流体动压力的影响。著作[5]提出了测量倾斜的坝和流体接触面上流体动压力的试验方案,据此可以量出各被测量分段的平均压力。著作[6]提出了水平振荡对斜坝面的动载荷影响问题,但没有给出解答。著作[7]和著作[8]在积分计算时采用近似处理法分析了水平谐和振动下相应于倾斜坝面的流体动压力。著作[9,10]提出了地面垂直振动对流体动载荷影响甚大的论据,从而不难理解,当坝和流体的接触面与地面成某一倾角时,地面垂直振动对流体动载荷也许会有更大的影响。当然,相应地由于地面横向振动所激起的流体动载荷分布情况也将会随着倾角的不同而变化。

本文提出了倾角影响的问题。在既考虑地面横向振动也考虑地面垂直振动的前提下,通过较为严格的数学分析导出了计算公式。用这些公式可以算出倾斜坝面上的流体动载荷分布。依据这些公式进行了若干个数值计算题,并作出了动载荷分布图,从而提出了在坝和流体的接触面为倾斜的情况下考虑地面垂直振动更为必要的论据。

虽然地震时的地面运动对时间来说是不规则的,但是,把不规则的地面运动写成Fourier展开式后就可以将本文所给结果推广到具体问题上去。同样地,地震时在同一个时间内地面是此起彼伏地波动的。本文分析了地表面的垂直方向运动,这一部分的数学分析方法可以推广到解决地面起伏波动的問題上去。

## 二、问题的提法

取平面  $y = -x \operatorname{tg}(1 - \alpha)\pi$  为坝和流体的接触面,平面  $y = 0$  和  $y = h$  则分别为处

\* 1962年7月19日收到。

于流体下的地面和流体自由表面(图 1)。假定流体是理想不可压缩的,其运动是无旋的。再假定坝为刚体,也就是不考虑坝体的弹性变形和相对于地面的转动。这时問題的求解可以归结为寻找满足 Laplace 方程  $\Delta\varphi = 0$  和下列初始及边界条件的流体速度势函数  $\varphi(x, y, t)$ :

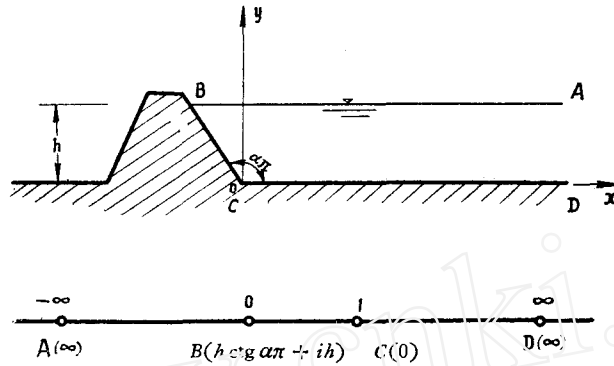


图 1

在  $t = 0$  时,

$$\text{在 } y = h \text{ 上, } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad (2.1)$$

在  $t > 0$  时,

$$\text{在 } y = h \text{ 上, } \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad (2.2)$$

在  $t \geq 0$  时,

$$\text{在 } y = -x \operatorname{tg}(1 - \alpha)\pi \text{ 上, } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_1^*(t), \quad (2.3)$$

$$\text{在 } y = 0 \text{ 上, } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_2(t), \quad (2.4)$$

$$\text{在 } x \rightarrow \infty \text{ 处, } \quad |\varphi| < \infty, \quad (2.5)$$

式中  $n$  为  $BC$  的法线方向,  $1/2 \leq \alpha < 1$ ,  $g$  为重力加速度,  $t$  为时间,  $V_1(t)$  和  $V_2(t)$  分别表示速度向量  $\mathbf{V}(t)$  的水平 and 垂直分量,  $V_1^*(t) = V_1(t) \sin(1 - \alpha)\pi + V_2(t) \cos(1 - \alpha)\pi$ .

傾角給問題的分析带来了困难。因为有了傾角,所有 Fourier 积分和 Fourier 級数都很难应用到这里来解题。但是,著作[9]已証实,在实际应用中,对于平面問題一般可以不考虑重力对流体动載荷的影响。这样就可以将式(2.2)改写成

$$\text{在 } t > 0 \text{ 时, 在 } y = h \text{ 上, } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

于是就有可能在引入流体速度势函数的情况下将空間函数和时间函数完全分离开来,从而可以运用保角变换来解决这个問題。

### 三、問題的解法

根据上述假定,我們来寻找地面以速度  $\mathbf{V}(t) = 0$  ( $t < 0$ ),  $\mathbf{V}(t) = V_0 \cos \omega t$  ( $t \geq 0$ )

振动所激起的流体速度势函数  $\varphi(x, y, t)$ , 式中  $\mathbf{V}(t)$  对地面的倾角为  $\theta$ . 令  $V_1(t) = V_1 \cos \omega t$ ,  $V_2(t) = V_2 \cos \omega t$ , 而  $V_1 = V_0 \cos \theta$ ,  $V_2 = V_0 \sin \theta$ ,  $V_0$  为速度振幅,  $\omega$  为振动圆频率.

取  $\varphi(x, y, t) = \bar{\varphi}(x, y) \cos \omega t$ , 式中  $\bar{\varphi}(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$ , 而  $\varphi_1(x, y)$  和  $\varphi_2(x, y)$  则分别为地面横向振动和地面垂直振动激起的流体速度势函数.

引入流体速度复势函数

$$w = \bar{\varphi}(x, y) + i\bar{\psi}(x, y), \quad (3.1)$$

式中流函数

$$\bar{\psi}(x, y) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y). \quad (3.2)$$

这时, 相应地可将式(2.1)—(2.6)转换为

$$\text{在 } AB \text{ 上, } \quad \bar{\varphi}(x, y) = \operatorname{Re} w = 0, \quad (3.3)$$

$$\text{在 } BC \text{ 上, } \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = V_1^*, \quad (3.4)$$

$$\text{在 } CD \text{ 上, } \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = V_2, \quad (3.5)$$

$$\text{在 } z \rightarrow \infty \text{ 处, } \quad |\bar{\varphi}| < \infty. \quad (3.6)$$

引入函数<sup>[11]</sup>

$$z = \kappa \int_1^\tau \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-a}\tau^a}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{\kappa}{(\tau-1)^{1-a}\tau^a} \quad (3.7)$$

将  $z$  平面的  $ABCD$  域变换到  $\tau$  平面的上半平面, 如图 1 所示.

引入函数<sup>[12]</sup>

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{d\tau} = - \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right| \frac{dz}{d\tau} \quad (3.8)$$

将式(3.3)—(3.6)分别转换为相应于  $\tau$  平面的表示式

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{d\tau} = 0, \quad \text{在 } -\infty < \tau < 0 \text{ 上,} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{d\tau} = -V_1^* \left| \frac{dz}{d\tau} \right| = \frac{-\kappa V_1^*}{(1-\tau)^{1-a}\tau^a}, \quad \text{在 } 0 < \tau < 1 \text{ 上,} \quad (3.10)$$

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{d\tau} = -V_2 \left| \frac{dz}{d\tau} \right| = \frac{-\kappa V_2}{(\tau-1)^{1-a}\tau^a}, \quad \text{在 } 1 < \tau < \infty \text{ 上,} \quad (3.11)$$

$$|\operatorname{Re} w| < \infty, \quad \text{在 } |\tau| \rightarrow \infty \text{ 处,} \quad (3.12)$$

式中  $V_1^* = V_1 \sin(1-a)\pi + V_2 \cos(1-a)\pi$ .

引入函数<sup>[13]</sup>

$$f(\tau) = \frac{dw}{d\tau} \sqrt{\tau}, \quad (3.13)$$

并将对于  $\frac{dw}{d\tau}$  的边界条件(3.9)—(3.11)分别改造为对  $f(\tau)$  的边界条件:

$$\operatorname{Im} f(\tau) = \operatorname{Re} \frac{dw}{d\tau} \sqrt{\tau} = 0, \quad \text{在 } -\infty < \tau < 0 \text{ 上,} \quad (3.14)$$

$$\operatorname{Im} f(\tau) = \operatorname{Im} \frac{dw}{d\tau} \sqrt{\tau} = \frac{-\kappa V_1^*}{(1-\tau)^{1-a}\tau^a} \sqrt{\tau}, \quad \text{在 } 0 < \tau < 1 \text{ 上,} \quad (3.15)$$

$$\operatorname{Im} f(\tau) = \operatorname{Im} \frac{dw}{d\tau} \sqrt{\tau} = \frac{-\kappa V_2}{(\tau-1)^{1-a}\tau^a} \sqrt{\tau}, \quad \text{在 } 1 < \tau < \infty \text{ 上.} \quad (3.16)$$

令

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\xi)}{(\xi-\tau)} d\xi, \quad (3.17)$$

由此可得满足条件(3.14)–(3.16)的函数

$$f(\tau) = -\frac{\kappa V_1^*}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{(1-\xi)^{1-a}\xi^a(\xi-\tau)} - \frac{\kappa V_2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{(\xi-1)^{1-a}\xi^a(\xi-\tau)}. \quad (3.13)$$

从式(3.13)有

$$w = \int \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau + F. \quad (3.19)$$

将式(3.18)代入上式,并用  $\tau = 0$  处  $\bar{\varphi} = 0$  的条件决定积分常数  $F$ , 即得

$$\bar{\varphi}(\tau) = \varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau), \quad (3.20)$$

此处

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= -\frac{2\kappa V_1 \sin(1-\alpha)\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{x dx}{(1-x^2)^{1-a}x^{2a}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right|, \\ \varphi_2(\tau) &= -\frac{2\kappa V_2 \cos(1-\alpha)\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{x dx}{(1-x^2)^{1-a}x^{2a}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| - \\ &\quad - \frac{2\kappa V_2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(x^2-1)^{1-a}x^{2a}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right|, \end{aligned}$$

式中  $\zeta = \sqrt{\tau}$ . 从式(3.20)可知,条件(3.12)是满足的. 到此,我們求得了满足所有方程和条件的  $\varphi(x, y, t)$ .

现在根据式(3.20)来分析下列几种情况:

1.  $\alpha = 1/2$ . 这时

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= -\frac{2\kappa V_1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| = -\frac{2\kappa V_1}{\pi} \left\{ 4G + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arc} \cos \zeta \times \ln \frac{1-\sqrt{1-\zeta^2}}{1+\sqrt{1-\zeta^2}} + 2 \left[ \frac{(\operatorname{arc} \cos \zeta)^2}{2} + \frac{(\operatorname{arc} \cos \zeta)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(\operatorname{arc} \cos \zeta)^6}{6 \cdot 4!} + \dots \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tau) &= -\frac{2\kappa V_2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| = \\ &= -\frac{2\kappa V_2}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{2} - \pi \operatorname{arc} \cos \zeta \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$z = -2i\kappa \left( \operatorname{arc} \sin \sqrt{\tau} - \frac{\pi}{2} \right) \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (3.23)$$

式中  $G = 0.915965594$ . 从式(3.23)根据  $z$  和  $\tau$  平面上点  $B$  的相互对应关系确定待定常数  $\kappa = h/\pi$ .

2.  $\alpha = 3/4$ . 这时

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tau) = & -\frac{\kappa V_2}{\pi} \left\{ \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| + \right. \\ & \left. + 2 \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(x^2-1)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

为了计算上式中的积分, 引入函数

$$I(\varepsilon) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+\varepsilon x}{\zeta-\varepsilon x} \right| + 2 \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(x^2-1)}} \ln \left| \frac{\zeta+\varepsilon x}{\zeta-\varepsilon x} \right|, \quad (3.25)$$

从而有

$$\begin{aligned} I'(\varepsilon) = \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = & -\frac{4\zeta}{\varepsilon^2} \left\{ \sqrt{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-x^4}(x^4-\sigma_1^4)} + \right. \\ & \left. + 2 \int_1^\infty \frac{x^2 dx}{(x^4-\sigma_1^4)\sqrt[4]{x^4-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

式中  $\sigma_1^4 = \zeta^2/\varepsilon^2$ . 用留数理论来计算式(3.26)中的积分. 取相应的辅助函数

$$F(z') = \frac{z'^2}{(z'^4 - \sigma_1^4)\sqrt[4]{z'^4 - 1}}, \quad (3.27)$$

显然,  $F(z')$  在  $z'$  平面上有四个支点. 将平面  $z'$  如图 2 那样切开. 图中相应岸上的  $i$  或  $1$  表示函数  $\sqrt[4]{z'^4 - 1}$  在该岸上应取的符号: 例如对于正  $x'$  轴的上岸,

$$\arg \sqrt[4]{z'^4 - 1} = \frac{1}{4} \left( 0 - \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{4} \right) = 0; \quad (3.28)$$

而对于下岸,

$$\arg \sqrt[4]{z'^4 - 1} = \frac{1}{4} \left( 2\pi + \frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}; \quad (3.29)$$

其余类推.  $F(z')$  在这样处理后的域中是单值的. 图中小圆圈所示的点为函数  $F(z')$  的极点. 选取如图 2 中右图所示的环路, 按 Cauchy 定理即得

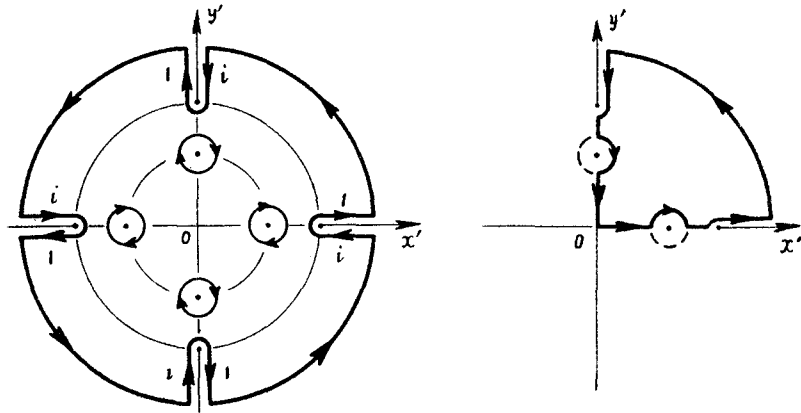


图 2

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^4 - \sigma_1^4) \sqrt{1-x^4}} + 2 \int_1^\infty \frac{x^2 dx}{(x^4 - \sigma_1^4) \sqrt{x^4-1}} = \\ & = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt[4]{1-\sigma_1^4}} \quad 0 < \sigma_1 < 1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

将式(3.30)代入式(3.26)并对  $\varepsilon$  积分, 就有

$$I(\varepsilon) = -\sqrt{2\zeta} \pi \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon \sqrt[4]{\varepsilon^2 - \zeta^2}} + c_1 = -2\sqrt{2\zeta} \pi \int \frac{x^2 dx}{x^4 + \zeta^2} + c_1, \quad (3.31)$$

式中  $c_1$  为积分常数, 經积分运算并令  $\zeta \rightarrow 0$  而确定  $c_1$  后, 可得

$$I(1) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(\sqrt{2}x + \sqrt{\zeta})^2 + \zeta}{(\sqrt{2}x - \sqrt{\zeta})^2 + \zeta} + \pi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2}x + \sqrt{\zeta}} + L_1, \quad (3.32)$$

式中  $x = \sqrt[4]{1-\zeta^2}$ , 于是最后求得

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tau) = & -\frac{\kappa V_2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} \ln \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + \sqrt{2} \sqrt[4]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2} - \sqrt{2} \sqrt[4]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \zeta} + \right. \\ & \left. + \pi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{1-\zeta^2} + \sqrt{\zeta}} + L_1 \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\text{式中 } L_1 \begin{cases} = \pi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{1-\zeta^2} - \sqrt{\zeta}} & (\zeta \leq 0.895), \\ = \pi^2 - \pi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{2} \sqrt[4]{1-\zeta^2}} & (\zeta \geq 0.895), \end{cases} \quad 0 < \zeta < 1.$$

現在来計算势函数

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{\sqrt{2}\kappa V_1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right|. \quad (3.34)$$

引入函数

$$I_2(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta + \varepsilon x}{\zeta - \varepsilon x} \right|,$$

則

$$I_2'(\varepsilon) = -\frac{4\zeta}{\varepsilon^2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-x^4}(x^4 - \sigma_1^4)}, \quad (3.35)$$

取輔助函数(3.27), 在图 3 中左图平面上按右图所示的环路进行积分, 得

$$I_2'(\varepsilon) = -4\sqrt{2}\zeta \int_0^\infty \frac{dx}{(\varepsilon^2 + \zeta^2/x^4)x^2 \sqrt[4]{x^4+1}} + \frac{\sqrt{\zeta} \pi}{\varepsilon \sqrt[4]{\varepsilon^2 - \zeta^2}}. \quad (3.36)$$

从而有

$$I_2(1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| = 2\sqrt{2}\pi f_1(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2}} I(1), \quad (3.37)$$

式中

$$f_1(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{d\lambda}{1-\lambda^4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\zeta \sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda^2}. \quad (3.38)$$

对式(3.38)进行分部积分运算后, 得

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{1-\lambda^4} \operatorname{arctg} \frac{\zeta \sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda^2} = \frac{\zeta}{2(1-\zeta^2)} \int_0^1 \left\{ \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + 2 \operatorname{arctg} \lambda \right\} \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^4 + \sigma_2^4) \sqrt{1-\lambda^4}} \approx$$

$$\approx \frac{\zeta \ln(1+\sqrt{2})}{2(1-\zeta^2)} \int_0^1 \left\{ \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + 2 \operatorname{arctg} \lambda \right\} \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^4 + \sigma_2^4) \sqrt{1-\lambda^2}}, \quad (3.39)$$

式中  $\sigma_2^4 = \zeta^2/(1-\zeta^2)$ .

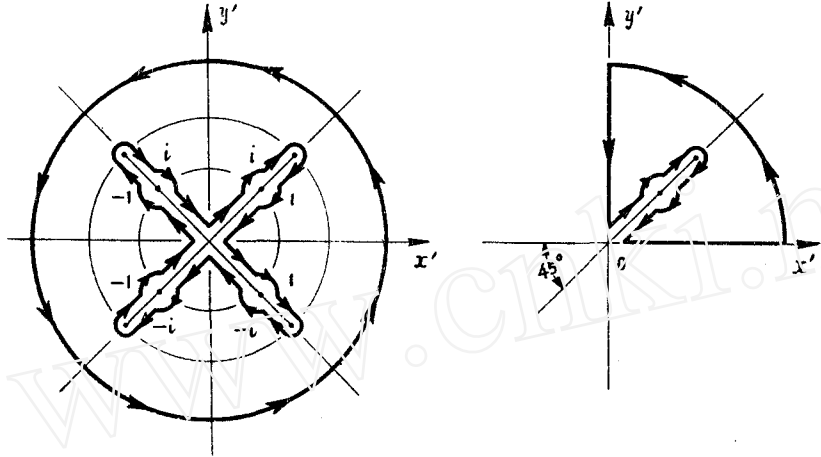


图 3

为了计算式(3.39),引入辅助函数

$$F_2(z') = \frac{z'}{(z'^4 + \sigma_2^4) \sqrt{z'^2 - 1}} \ln \frac{z' - 1}{z' + 1}, \quad (3.40)$$

并相应取图 4 所示的复平面。这时应注意,在  $\zeta$  给定时  $\sigma_2$  即为对应于该  $\zeta$  值的常数;当  $\zeta$  在 0 与 1 之间变化时,  $F_2(z')$  的极点可能落在点划线所示的圆内,也可能落在该圆之外;在  $\sigma_2 = \sqrt{2}$  时极点恰巧落在圆上(图 4)。

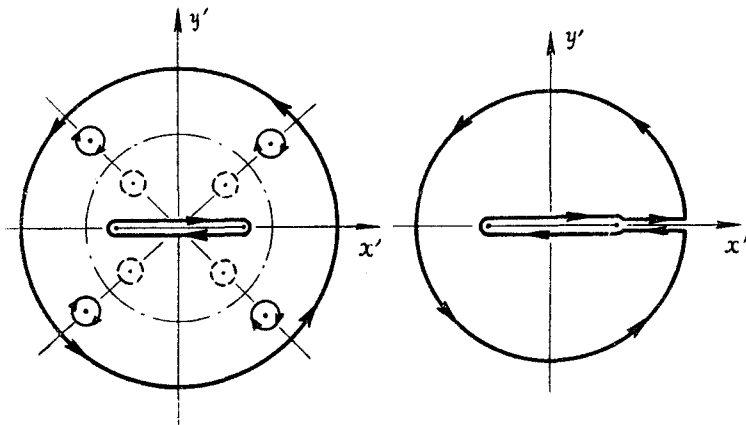


图 4

按图 4 中右图所示的环路进行积分,即得

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x^4 + \sigma_2^4) \sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2\sigma_2^2 m} \cos \left[ \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\pi}{2\sigma_2^2 m} [\pi - (x_3 + x_4)] \sin \left[ \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] \quad (\sigma_2 \leq \sqrt{2}), \quad (3.41)$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x^4 + \sigma_2^4) \sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2\sigma_2^2 m} \sin \left[ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\pi}{2\sigma_2^2 m} (x_3 - x_4) \cos \left[ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] \quad (\sigma_2 \geq \sqrt{2}). \quad (3.42)$$

取輔助函数

$$F_3(z') = \frac{z'}{(z'^4 + \sigma_2^4) \sqrt{z'^2 - 1}} \ln \frac{z' - i}{z' + i} \quad (3.43)$$

及图 5 所示的复平面和积分綫路, 这时在复平面上有四个支点, 注意到  $F_3(z')$  的极点分布情况, 在图 5 中右图所示的綫路上进行积分, 就有

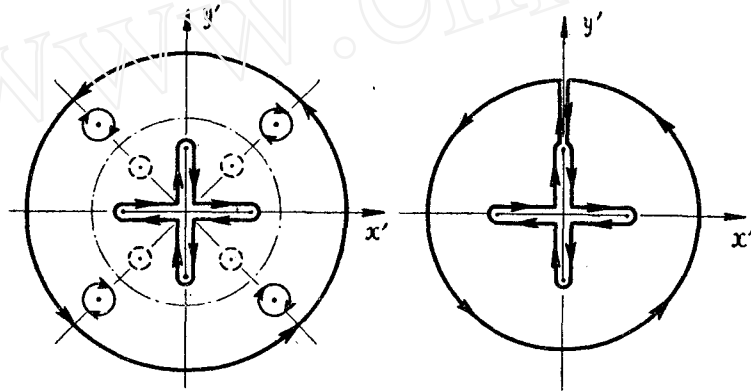


图 5

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x^4 + \sigma_2^4) \sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\sigma_2^2 m} \left\{ \frac{1}{2} (\cos x_1 - \sin x_1) \ln \frac{l_2}{l_1} + (\cos x_1 + \sin x_1) \left( L_3 - \operatorname{arctg} \frac{m \sin x_2}{m \cos x_2 + \sqrt{2}} \right) - L^* \right\}, \quad (3.44)$$

式中

$$L_3 \begin{cases} = \operatorname{arctg} \frac{m \sin x_2}{m \cos x_2 - \sqrt{2}} & (m \cos x_2 - \sqrt{2} \geq 0), \\ = \pi - \operatorname{arctg} \frac{m \sin x_2}{\sqrt{2} - m \cos x_2} & (m \cos x_2 - \sqrt{2} \leq 0), \end{cases}$$

$$L^* \begin{cases} = \sqrt{2} \left\{ (\pi - x_3 - x_4) \cos \left[ \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] + \sin \left[ \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] \ln \frac{r_2}{r_1} \right\} & (\sigma_2 \leq \sqrt{2}), \\ = \sqrt{2} \left\{ (x_3 - x_4) \sin \left[ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] + \cos \left[ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] \ln \frac{r_2}{r_1} \right\} & (\sigma_2 \geq \sqrt{2}), \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sigma_2^2} \right), \quad x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 2x_1 \right), \quad m = \sqrt[4]{1 + \sigma_2^4}, \quad l_1 = m^2 - 2\sqrt{2} m \cos x_2 + 2,$$



$$l_2 = m^2 + 2\sqrt{2}m\cos x_2 + 2, \quad r_1 = \sqrt{1 + \sigma_2^2 - \sqrt{2}\sigma_2}, \quad r_2 = \sqrt{1 + \sigma_2^2 + \sqrt{2}\sigma_2},$$

$$x_3 = \arcsin(\sigma_2/r_1\sqrt{2}), \quad x_4 = \arcsin(\sigma_2/r_2\sqrt{2}).$$

将式(3.44), (3.42), (3.41)代入式(3.39), 再将式(3.39)的结果代入式(3.38)和(3.37), 整理后, 最后得到

$$\varphi_1(\tau) \approx -\frac{2\kappa V_1}{\pi} \left\{ \frac{\pi \ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt[4]{1 - \zeta^2}} \left[ L_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\cos x_1 - \sin x_1) \ln \frac{l_2}{l_1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x_1 + \sin x_1) \left( L_3 - \operatorname{arctg} \frac{m \sin x_2}{m \cos x_2 + \sqrt{2}} \right) + L_4 \right] + \frac{1}{2} I(1) \right\}, \quad (3.45)$$

或

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{\sqrt{2}\kappa V_1}{\pi} \left\{ 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{1 - \lambda^4} \operatorname{arctg} \frac{\zeta \sqrt{1 - \lambda^4}}{\lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} I(1) \right\}, \quad (3.46)$$

式中

$$L_2 \begin{cases} = \cos \left[ \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] - \sin \left[ \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] & (\zeta \leq 0.895), \\ = \sin \left[ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] - \cos \left[ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] & (\zeta \geq 0.895), \end{cases}$$

$$L_4 \begin{cases} = [\pi - x_3 - x_4] \left[ \sin \frac{1}{2} (x_3 - x_4) - \cos \frac{1}{2} (x_3 - x_4) \right] & (\zeta \leq 0.895), \\ = (x_3 - x_4) \left[ \cos \frac{1}{2} (x_3 + x_4) - \sin \frac{1}{2} (x_3 + x_4) \right] & (\zeta \geq 0.895). \end{cases}$$

从式(3.7)有

$$z = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (1 - i) \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1}{\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}\lambda + 1} - L_5 \right\}$$

$$0 \leq \tau \leq 1, \quad (3.47)$$

式中

$$L_5 \begin{cases} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}\lambda - 1} & \left( \tau \geq \frac{1}{5} \right), \\ = \sqrt{2} \pi - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - \sqrt{2}\lambda} & \left( \tau \leq \frac{1}{5} \right), \end{cases} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\tau}{1 - \tau}}.$$

令  $\zeta = 0$ , 即有  $x + ih = -\kappa(1 - i)\pi$ , 从而得  $\kappa = h/\pi$ .

3.  $\alpha = 5/6$ . 这时

$$\varphi_2(\tau) = -\frac{2\kappa V_2}{\pi} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x^4(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta + x}{\zeta - x} \right| + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[6]{x^4(x^2-1)}} \ln \left| \frac{\zeta + x}{\zeta - x} \right| \right\}, \quad (3.48)$$

按图 6 所示的环路, 经过类似于上述的积分处理后, 得

$$\varphi_2(\tau) = -\frac{V_2 h}{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\sqrt[3]{1-\zeta^2} + \sqrt{3} \sqrt[6]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \sqrt[3]{\zeta^2}}{\sqrt[3]{1-\zeta^2} - \sqrt{3} \sqrt[6]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \sqrt[3]{\zeta^2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\zeta}}{\sqrt[6]{1-\zeta^2}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\zeta}}{2\sqrt[6]{1-\zeta^2} + \sqrt{3}\sqrt[3]{\zeta}} + L_6 \right\}, \quad (3.49)$$

式中

$$L_6 \begin{cases} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\zeta}}{2\sqrt[6]{1-\zeta^2} - \sqrt{3}\sqrt[3]{\zeta}} & (0 < \zeta \leq 0.837), \\ = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\zeta}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\zeta} - 2\sqrt[6]{1-\zeta^2}} & (1 > \zeta \geq 0.837). \end{cases}$$

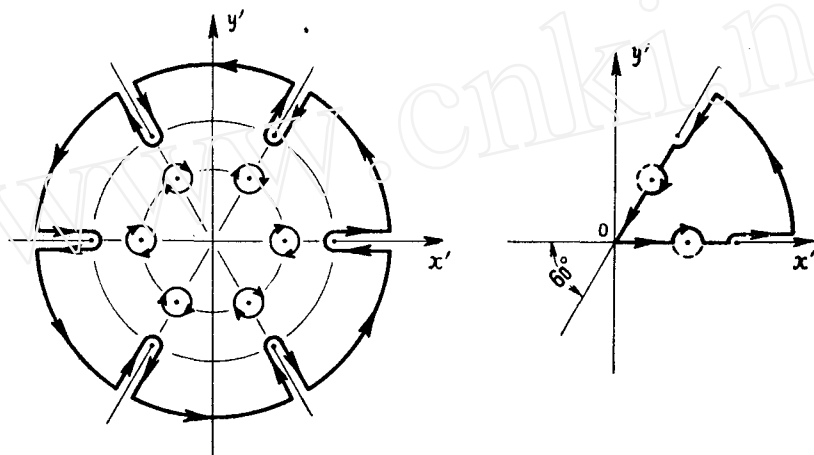


图 6

从式(3.20)导出

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{\kappa V_1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x^4(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right|. \quad (3.50)$$

与上述方法类似,按图7所示的环路(它处于图6中左图所示的复平面上)进行积分计算后,得

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & -\frac{V_1 h}{\pi^2} \left\{ 12 \int_0^1 \frac{d\lambda}{1-\lambda^6} \operatorname{arctg} \frac{\zeta \sqrt{1-\lambda^6}}{\lambda^3} - \right. \\ & - \sqrt{3} \pi \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{\sqrt[3]{1-\zeta^2} + \sqrt{3} \sqrt[6]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \sqrt[3]{\zeta^2}}{\sqrt[3]{1-\zeta^2} - \sqrt{3} \sqrt[6]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \sqrt[3]{\zeta^2}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\zeta}}{2\sqrt[6]{1-\zeta^2} + \sqrt{3}\sqrt[3]{\zeta}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\zeta}}{\sqrt[6]{1-\zeta^2}} + \frac{1}{2} L_6 \right] \right\}. \quad (3.51) \end{aligned}$$

式(3.51)中的被积函数是一条連續光滑曲綫,在 $\lambda=1$ 处有一个可积奇点,这个积分不用数值积分法计算,也可以画出被积函数的曲綫,用求积仪直接量出其面积,

从式(3.7)可以算出

$$z = \frac{h}{2\pi} (\sqrt{3} - i) \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{(2\lambda + \sqrt{3})^2 + 1}{(2\lambda - \sqrt{3})^2 + 1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2\lambda + \sqrt{3}} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + L_7 \right\} \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad (3.52)$$

式中

$$L_7 \begin{cases} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3} - 2\lambda} - \pi & (\tau \leq 0.297), \\ = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2\lambda - \sqrt{3}} & (\tau \geq 0.297), \end{cases} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}.$$

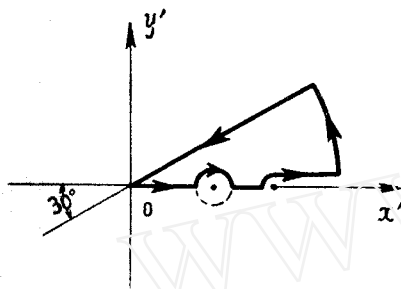


图 7

4.  $\alpha = 2/3$ . 这时

$$\varphi_2(\tau) = -\frac{2\kappa V_2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right| \right\}, \quad (3.53)$$

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{\sqrt{3}\kappa V_1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} \ln \left| \frac{\zeta+x}{\zeta-x} \right|. \quad (3.54)$$

与上述方法类似,按图 8 中右图所示的环路对  $\varphi_2(\tau)$  进行积分运算后,得到

$$\varphi_2(\tau) = -\frac{2hV_2}{\pi} \left\{ \frac{3}{8} \pi + \frac{\sqrt{3}}{8} \ln \frac{(\sqrt[3]{\zeta^2} + \sqrt[3]{1-\zeta^2})^2}{\zeta \sqrt[3]{\zeta} - \sqrt[3]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \sqrt[3]{(1-\zeta^2)^2}} - \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-\zeta^2} - \sqrt[3]{\zeta^2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{\zeta^2}} \right\} \quad 0 < \zeta < 1; \quad (3.55)$$

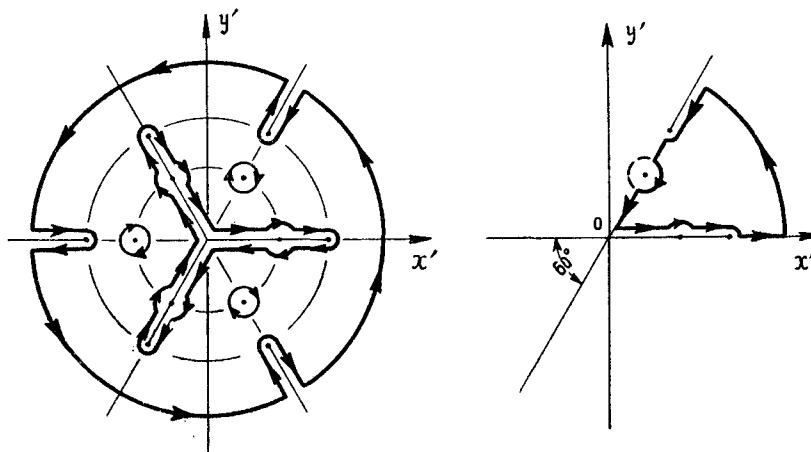


图 8

而按图 9 所示的綫路(它处于图 8 中左图的复平面上)对  $\varphi_1(\tau)$  进行积分計算后, 可得

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & -\frac{V_1 h}{\pi^2} \left\{ 6 \int_0^1 \frac{d\lambda}{1-\lambda^3} \operatorname{arctg} \frac{\zeta \sqrt{1-\lambda^3}}{\sqrt{\lambda^3}} - \right. \\ & -\frac{\pi}{4} \ln \frac{(\sqrt[3]{\zeta^2} + \sqrt[3]{1-\zeta^2})^2}{\zeta \sqrt[3]{\zeta} - \sqrt[3]{\zeta^2(1-\zeta^2)} + \sqrt[3]{(1-\zeta^2)^2}} - \\ & \left. -\frac{\sqrt{3}}{4} \pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-\zeta^2} - \sqrt[3]{\zeta^2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{\zeta^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

从式(3.7)可以导出

$$\begin{aligned} z = \frac{h}{\pi} \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2-\lambda+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right\} \\ 0 \leq \tau \leq 1, \quad \lambda = \sqrt[3]{\frac{\tau}{1-\tau}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

用类似上述的分析方法从式(3.20)和(3.7)可导出相应于任何傾角的  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$  和  $z$ . 根据求得的  $\bar{\varphi}(x, y) = \varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)$ , 我們有相应于各种傾角的势函数

$$\varphi(x, y, t) = [\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] \cos \omega t. \quad (3.58)$$

通过类似的途径就可以找到地面以  $\mathbf{V}(t) = 0$  ( $t < 0$ ),  $\mathbf{V}(t) = V_0 \sin \omega t$  ( $t \geq 0$ ) 振动所激起的流体速度势函数

$$\varphi(x, y, t) = [\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] \sin \omega t. \quad (3.59)$$

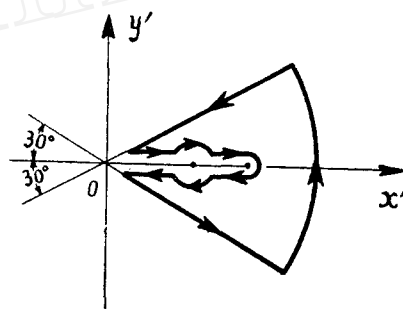


图 9

#### 四、結 語

从式(3.21), (3.22)可得

$$\varphi_1(1) = -0.7425V_1 h, \quad \varphi_1(0.5) = -0.6102V_1 h, \quad (4.1)$$

$$\varphi_2(1) = -V_2 h, \quad \varphi_2(0.5) = -0.5V_2 h, \quad \varphi_2(0.1) = -0.1V_2 h. \quad (4.2)$$

可以看出, 这些数据 and 文献[1], [2]及[9]中当  $Qh$  较大时的解完全相符.

从式(3.33)和(3.45)可以算出当傾角为  $45^\circ$  时,

$$\varphi_2(1) = -V_2 h, \quad \varphi_2(0.5) = -0.7806V_2 h, \quad \varphi_2(0.1) = -0.5089V_2 h, \quad (4.3)$$

$$\varphi_1(1) = 0.5640V_1 h, \quad \varphi_1(0.5) = -0.5906V_1 h. \quad (4.4)$$

从式(3.49)可以算出当傾角为  $30^\circ$  时,

$$\varphi_2(1) = -V_2 h, \quad \varphi_2(0.5) = -0.8630V_2 h, \quad \varphi_2(0.1) = -0.6520V_2 h. \quad (4.5)$$

从式(3.55)可以算出当傾角为  $60^\circ$  时,

$$\varphi_2(1) = -V_2 h, \quad \varphi_2(0.5) = -0.6908V_2 h, \quad \varphi_2(0.1) = -0.4423V_2 h. \quad (4.6)$$

利用式(4.1)–(4.4)所給数据以及按公式(3.45)再算出若干个数据, 并把  $\tau$  平面上的点按公式(3.23)和(3.47)变换到相应的  $z$  平面上, 即可作出动載荷分布图 10. 图中的坐标  $y/h$ ,  $\varphi_2(\tau)/V_2 h$ , 和  $\varphi_1(\tau)/V_1 h$  均为无量綱量, 曲綫和垂直綫所围成的面积表示当傾角为

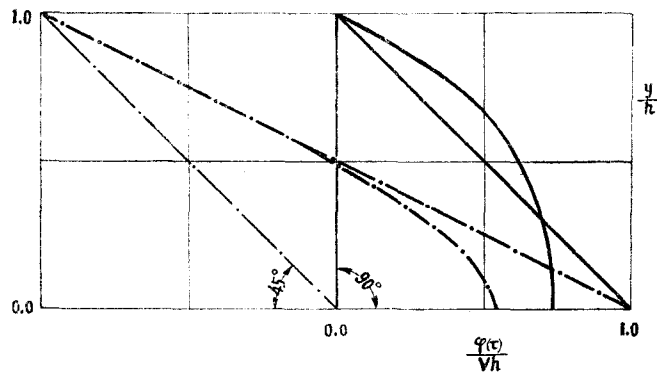


图 10

90°时由水平振荡所激起的流体动载荷振幅,而由斜直线和垂直线围成的面积则相应于地面垂直振动所激起的流体动载荷;由曲线与45°斜线围成的面积表示当倾角为45°时由水平振动所引起的流体动载荷,而直线与45°斜线围成的面积则相应于地面垂直振动部分。从上述数据和图10可以看出,坝和流体接触面的倾斜会对地震激起的流体动载荷分布发生巨大的影响。在 $V_2 > V_1$ 时这种影响就更急剧地增长起来。

当坝和流体接触面对地面的倾角为45°时,即使在 $V_1 = V_2$ 的情况下, $\varphi_2(\tau)$ 也总是处处大于 $\varphi_1(\tau)$ 。如果 $V_2 > V_1$ ,那么由于地面垂直振动所激起的动载荷将占主要地位。由此进一步证实,以前被人们忽略的这一因素是应该充分加以考虑的。

作用在坝和流体接触面上的流体动压力为

$$p^* = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.7)$$

于是相应于 $\mathbf{V}(t) = 0 (t < 0)$ ,  $\mathbf{V}(t) = V_0 \cos \omega t (t \geq 0)$ 的

$$p^* = p_0^* \sin \omega t = \rho \omega [\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] \sin \omega t, \quad (4.8)$$

而相应于 $\mathbf{V}(t) = 0 (t < 0)$ ,  $\mathbf{V}(t) = V_0 \sin \omega t (t \geq 0)$ 的

$$p^* = p_0^* \cos \omega t = \rho \omega [\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] \cos \omega t. \quad (4.9)$$

由此可见,将图10中的横坐标值分别乘以 $\rho \omega V_2 h$ ,  $\rho \omega V_1 h$ 并相加,即得流体动载荷振幅 $p_0^*$ 。

地震时的地面运动对时间来说是不规则的,但总可以将这种不规则的运动用 Fourier 级数表示出来,例如表示为

$$\mathbf{V}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos \omega_n t. \quad (4.10)$$

于是,这时的流体动压力将为

$$p^* = \rho \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n [\varphi_1^{(n)}(\tau) + \varphi_2^{(n)}(\tau)] \sin \omega_n t. \quad (4.11)$$

图10所示地面垂直运动所激起的流体动压力是直线分布的。这相当于 $\varphi_2(x, y) = V_2(y - h)$ 且表示当整个地面以相同的速度向上抬时流体中各点的竖向速度相同,而水平向速度为零,整个流体有如刚体。但是,地震时的地面运动在同一时间内是此起彼伏地波动的。这时 $\varphi_2(x, y)$ 就不能这样简单地表示出来,而必须用本文第三节中所述的数学

分析方法求出  $\varphi_2$ , 且图 10 中的直綫也将相应地成为曲綫. 整个流体就不能視为刚体.

在本文的写作过程中, 程盘庆、俞刚、范桃卿同志曾帮助作者进行数值計算和描图工作, 郑哲敏、解伯民同志曾提出宝贵建議, 作者对他们表示感謝.

### 参 考 文 献

- [1] Westergaard, M., Water pressures on dams during earthquakes, *Trans. ASCE*, 1933.
- [2] Лейбензон, Л. С., О натуральных периодах колебаний плотины, подпирающей реку, *Ученые записки МГУ*, 2, 1935.
- [3] 畑野正, 地震力对重力坝的影响 (地震时动水压力的正确解法), 日本土木学会志, 昭和 22, 23 年论文集 (水利译丛, 3, 1957).
- [4] Напетваридзе, Ш. Г., Гидродинамическое давление при сейсмическом воздействии, Труды Института строительства А. Н. Груз. ССР Тбилиси, 1955.
- [5] 錢令希、邱大洪, 利用电模拟法計算挡水坝在滿庫时的自振頻率, 土木工程学报, 5, 2, 1958 年 4 月, 132—139.
- [6] Уразбаев, М. Т., Сейсмостойкость гидро-упругих систем, *Строительная механика и расчёт сооружений*, 5, 1959.
- [7] Напетваридзе, Ш. Г., Сейсмостойкость гидротехнических сооружений, Госстройиздат, Москва, 1959.
- [8] Иванова, Л. С., Об ударе жидкости о наклонную стенку бесконечно длинного частично закрытого сосуда, *ГММ*, XXII, 2, 1958.
- [9] 陈振誠, 論地震所激起而作用于水坝上的流体动压力及地震激起的流体表面波, 力学学报, 6, 1, 1963 年 3 月.
- [10] 陈振誠, О гидродинамическом давлении на плотину, вызванном её аperiodическими или импульсивными колебаниями и вертикальными колебаниями земной поверхности, *ПММ*, XXV, 4, 1961.
- [11] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, Т. III, Гостехиздат, 1953.
- [12] Гуревич, М. И., Удар пластинки при обтекании с отрывом струй, *ПММ*, XVI, 1, 1952.
- [13] Седов, Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.
- [14] 陈振誠, О динамическом давлении жидкости на плотину при землетрясении, *ПММ*, XXV, 1, 1961.

## ВЫЗВАННОЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ НА НАКЛОННУЮ ПЛОСКОСТЬ СОПРИКОСНОВЕНИЯ ПЛОТИНЫ С ЖИДКОСТЬЮ

Чень Чжень-чен

(Институт механики АН Китая)

Резюме

Задача о динамическом давлении на плотину при землетрясении рассмотрена в работах [1—4]. Но в этих работах задача поставлена так, что плоскость соприкосновения плотины с жидкостью перпендикулярна к земной поверхности, и что динамическое давление вызвано только горизонтальными колебаниями плотины по направлению реки.

В настоящей работе задача решена не только с учётом наклона плоскости соприкосновения жидкости с плотиной, но и учтены вертикальные колебания земной поверхности.

Полученный результат показывает, что наклон плоскости соприкосновения жидкости с плотиной оказывает значительное влияние на нагрузку плотины. Причём, при этом вертикальные колебания земной поверхности дают плотине большое гидродинамическое давление.