第 7 卷 第 1 期
1964 年 3 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 7, No. 1
March, 1964

材料在高速变形时的动力松弛性質和一維杆中的塑性波*

范 真 藻
(中国科学院力学研究所)

提 要

材料在高速变形时，它的整个变形过程能不能只用一个状态方程来描写是値得討論的. 本文認为，状态方程 $E\frac{\partial \epsilon}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}+g(\sigma,\epsilon)$ 只在 x-t Lagrange 平面的部分区域內才反映高速变形过程的力学規律.

本文討論了函数 $g(\sigma,\epsilon)$ 在高速变形时的性質，并建議采用如下的形式：

$$g(\sigma,\epsilon)=A[1-e^{-B(1-\epsilon)(\sigma-f(\epsilon))}].$$

本文認为横向慣性的存在是状态方程中应力提高項出現的原因或原因之一.

本文用应变率相关理論解释了等应变区的存在.

在每秒几十米的撞击速度范围內，撞击端面間的摩擦力对塑性波的形成和传播具有不可忽視的影响. 但在速度高到 100 米/秒以上时，这种影响又可能予以忽略.

以上五点看法是結合了鉻鋼短試件和 2S 鋁杆的高速变形分析得到的.

一、引 言

塑性波在細长杆中传播的理論首先由 von Kármán[1] 給出，它成功地預言了等应变区的存在以及其数値和撞击速度 V_0 間的关系. 这个理論假定了状态方程与应变率无关，其缺点是不能解释应力提高的現象[2].

Malvern[3,4] 在状态方程中考虑了应变率因素，引进了松弛函数 $g(\sigma,\epsilon)$ 并給出了一維杆中塑性波在 x-t 平面上传播的数値計算方法. 这个方法能定性地解释应力提高的現象，缺点是不能解释等应变区的存在. 近年来 Tapley 和 Plass[5] 在 Malvern 理論中考虑了横向慣性，但这个修正也沒得到合乎理想的改进.

从数学上看，現有各种塑性波理論的不同点在于它們采用不同的状态方程，但它們的共同点則在于都假定了整个变形过程可只用一个状态方程来描写. 截至目前为止，还沒有一种塑性波理論能較全面地解释各种实驗事实.

从高速变形的物理机制来看，可以把位錯羣体在工程材料中的高速运动分成本質上不尽相同的三个过程：位錯羣体在应力場中的加速与增殖，位錯在应力場中的高速运动——流变的迅速发生，位錯运动能的衰竭——变形过程的終了. 因此，在用宏观連續介質力学来处理高速变形問題时，能否只用一个状态方程来描写整个变形过程是値得討論的.

* 1963 年 2 月 6 日收到.

二、Malvern 理論及其边值問題

Malvern 認为,在高速变形时材料內部存在动力松弛过程,状态方程可以写成

$$E\frac{\partial\epsilon}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}+g(\sigma,\epsilon) \tag{1}$$

的普遍形式. 他还認为,应力是由应变 ϵ 中弹性部分 ϵ' 引起的,所以式(1)又可以写成

$$E\frac{\partial\epsilon''}{\partial t}=g(\sigma,\epsilon), \tag{2}$$

ϵ'' 为 ϵ 中塑性应变部分, $g(\sigma,\epsilon)$ 为某一合理的松弛函数. Malvern 曾建議将它写成

$$g(\sigma,\epsilon)=a[e^{b(\sigma-f(\epsilon))}-1] \tag{3}$$

或其一級近似式

$$g(\sigma,\epsilon)=\alpha(\sigma-f(\epsilon)), \tag{4}$$

其中 $\alpha=ab$, $f(\epsilon)$ 为静态应力应变关系.

由于位錯的传播速度存在一极限值[6,7],因此, $\dfrac{\partial\epsilon''}{\partial t}$ 不可能无限增加. 这样,在 $\sigma\to\infty$ 时, $g(\sigma,\epsilon)$ 也必然有一极限値. 这就指出了式(3)的不合理性,至少在变形速度极高时不能用式(3)来描写材料的变形过程.

我們建議将 $g(\sigma,\epsilon)$ 写成

$$g(\sigma,\epsilon)=A[1-e^{-B(\sigma-f(\epsilon))}] \tag{5}$$

形式,其中 B 为小参数, B 和 A 的大小由材料的性質决定. 在 $B(\sigma-f(\epsilon))$ 为小量时,式(5)的一級近似式和式(4)同,此时 $\alpha=AB$. 应当注意,材料的物理性質应該和材料的几何尺寸无关,因此, $g(\sigma,\epsilon)$ 中的 σ 应当是眞实应力才合理. 在以工程应力为单位时,式(4)和(5)应分别修正为

$$g(\sigma,\epsilon)=\alpha(1-\epsilon)(\sigma-f(\epsilon)), \tag{6}$$

$$g(\sigma,\epsilon)=A[1-e^{-B(1-\epsilon)(\sigma-f(\epsilon))}]. \tag{7}$$

下节中的实例将証明这样进行修正的正确性,尤其在大变形的情况下是这样. 这是我們对 Malvern 理論的第一点修正.

在研究 Malvern 理論所給出的数学解的普遍性質时,我們会看到它还有一个不可克服的困难.

設考虑一根半无限长杆,它的自由端面 $x=0$ 处在受一突加压縮冲击后得到一冲击速度 V_0 并維持不变. 在 x-t 平面上作三組特征綫(图1),在取压应力和压应变为正时它們分别满足微分方程:

$$dx=0:\qquad Ed\epsilon-d\sigma=g(\sigma,\epsilon)dt, \tag{8}$$

$$dx=c_0dt:\qquad d\sigma+\rho c_0dV=-g(\sigma,\epsilon)dt, \tag{9}$$

$$dx=-c_0dt:\qquad d\sigma-\rho c_0dV=-g(\sigma,\epsilon)dt \tag{10}$$

和边界条件:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处:}\qquad V=V_0, \tag{11}$$

在特征綫 $x=c_0t$ 上:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\sigma = \rho c_0 \Delta V \ \text{或}\ \sigma = \rho c_0 V,\\ \Delta V = c_0 \Delta\epsilon \ \text{或}\ \epsilon = V/c_0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由式(11)和(12)可得端面在 $t=0$ 时的应力和应变値：

$$\sigma_0 = \rho c_0 V_0, \quad \epsilon_0 = V_0/c_0. \tag{13}$$

对图(1)中的(1.0)和(0.1)应用式(10)的差分方程，并由 $\sigma_{1,0} = \rho c_0 V_{1,0}$ 和 $\rho c_0 V_{0,1} = \sigma_0$，可得

$$\sigma_{0,1} = \sigma_0 - g_{1,0}\Delta t. \tag{14}$$

很容易証明：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{0,2} = \sigma_0 - (g_{1,1} + g_{2,0})\Delta t,\\ &\sigma_{0,3} = \sigma_0 - (g_{1,2} + g_{2,1} + g_{3,0})\Delta t,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sigma_{0,n} = \sigma_0 - (g_{1,n-1} + g_{2,n-2} + \cdots + g_{n,0})\Delta t.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

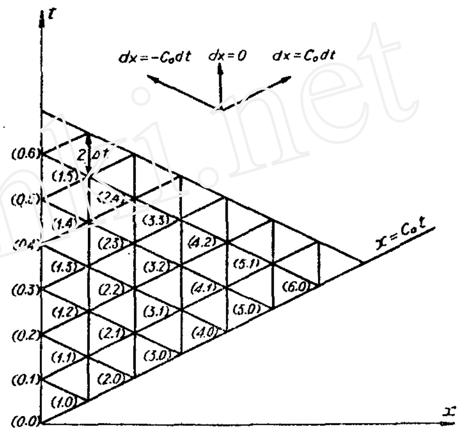

图 1　x-t 平面上的特征綫网格图

由式(14)有 $\sigma_{0,1} < \sigma_0$. 其次，由于 $g(\sigma, \epsilon)$ 在整个平面上是 x 和 t 的連續函数，并且在原点附近是一个大数（将图 7 和图 8 中在原点附近的 ϵ 值和 σ 值代入 $g(\sigma, \epsilon)$ 后卽知），因此，在小量 Δt 确定了以后，总可以找到一个正整数 N，使得在 $n \leqslant N$ 时有

$$\sum_{(1,n-1)}^{(n,0)} g_{p,q} > \cdots > g_{1,2} + g_{2,1} + g_{3,0} > g_{1,1} + g_{2,0} > g_{1,0} > 0,$$

从而得到端面应力一开始就单調下降的普遍性质：

$$\sigma_0 > \sigma_{0,1} > \sigma_{0,2} > \cdots > \sigma_{0,n}.$$

到目前为止，还未发現有一个实驗是支持上述普遍性質的．在所有的应力測量中都发現，端面在受击后应力立刻跃到某一数値并在一段时間內維持不变．图 2 卽为一例[8]．

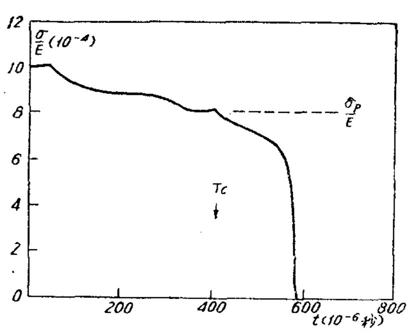

图 2　50.8 厘米长退火鋁杆在受击端面处的 σ-t 曲綫（$V_0 = 20.3$ 米/秒，T_c 为卸載波到达端面的时間）

在 Malvern 理論中无疑曾作了两个基本假定：1）在包含原点在内以 $x = c_0 t$，作边界的整个平面上，应力处处連續，否則差分方程将无意义．2）以 $x = c_0 t$ 作为确定边界条件的边界綫，这显然假定了状态方程可以描写整个平面上的变形过程的力学規律．承認这两个假定必然导出上述普遍性質，但它又和事实不符．

我們怀疑假定 2)是否正确，因而提出另外一个假定：在 x-t 平面上存在一个加載区，紧靠着加載区有一个松弛区，并且这个加載区若以 $x = c_0 t$ 为边界，则在假定 1）成立的情况下状态方程(1)就不能描写該区的力学規律．假定 1）是否成立要看具体情况来决定．如果它成立，則由于应力在 $x = c_0 t$ 上是連續变化到原点的，根据激波条件(12)，就应有 $\sigma_0 = \rho c_0 V_0$ 和 $\epsilon = V_0/c_0$. 因此，端面应力的測量値如果不等于 $\rho c_0 V_0$，那就可以断定假定 1)不成立．下节将举出假定 1)成立的一个实例，第六节則将举出假定 1)不成立的一个实例，并

用这两个实例来証实我們的怀疑和支持我們提出的假定.

三、撞击在刚性靶上的圓柱形鉻鋼短試件的塑性变形分析

我們用应变率相关理論来驗算 Lee 等[9]分析过的試件. 取

$$f(\epsilon) = \sigma_Y/1 - \epsilon \quad [1)] \qquad (16)$$

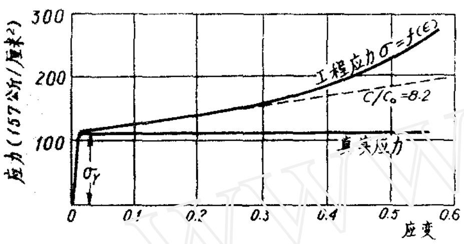

图 3　鉻鋼的靜态应力应变关系
($E = 2\times10^6$ 公斤/厘米², $c_0 = 4970$ 米/秒)

就能很好地近似代替图 3 中以工程应力为单位的应力应变关系中的塑性部分,其中 σ_Y 为应力的屈服极限. 設 V_Y 是对应于原点处的端面应力达到 σ_Y 时的撞击速度,则由式(13)有 $V_Y = c_0 \dfrac{\sigma_Y}{E}$, 其中 c_0 为声速, E 为 Young 氏模量.

根据应变率无关理論, Lee 等由強間断內撞击的分析方法得出应有应变台阶出现. 但事实上应变台阶沒有出现, Lee 等認为这是沒有考虑横向慣性所致.

用应变率相关理論来計算,就不会发生出现应变台阶的問題. 但是在这样高的撞击速度 ($V_0 = 279$ 米/秒) 的情况下,横向慣性究竟起什么作用,至今尚未見到有人研究过. 我們希望至少能对这个問題給出定性的判断.

图 4 是直径 $D_0 = 0.889$ 厘米、长 $L_0 = 1.27$ 厘米的鉻鋼短試件以 279 米/秒的撞击速度在刚性靶上撞击后的殘余变形.

我們假定: 1) Malvern 理論中的假定 1)成立, 因此, $\sigma_0 = \rho c_0 V_0$, $\epsilon_0 = V_0/c_0$. 由于試件很短,在自由端反射回来的卸載波沒有达到端面以前,可以認为端面应力 $\rho c_0 V_0$ 維持不变. 2) 利用塑性波的簡单波性质幷不仅是 von Kármán 理論才能得到的結果(参看文献[4]图 8),因此假定 ϵ_0 也以波速 $c_{\epsilon_0} = \sqrt{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \epsilon}}\Big|_{\epsilon=\epsilon_0}$ 向前传播. 3)假定 $x = 0$ 和 $x = c_{\epsilon_0} t$ 二直綫所夹的区域落在松弛区內. 这三个假定对鉻鋼短試件而言是否正确,要看所得結果是否和实驗事实符合来决定. Bell[10] 对有限长杆卸載性质的实驗研究已断言,在撞击速度大于一定値后卸載波仅决定試件和刚性靶的接触时間,而对主要变形区的殘余变形的影响不大. 我們也将利用这个結果.

根据上述三个假定,可以列出方程組:

V

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma}{\partial x} &= -\rho\frac{\partial v}{\partial t},\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial \epsilon}{\partial t},\\
E\frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \alpha(1-\epsilon)\left(\sigma - \frac{\sigma_Y}{1-\epsilon}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

和边界条件:

---

1) 在 $\epsilon < 0.3$ 时,用綫性硬化綫来代替它也可得到很好的近似

在 $x=0$ 处：$0 \leqslant t \leqslant t_{0D}$ 时（t_{0D} 的定义参閱图 5），

$$V = V_0, \qquad \sigma = \rho c_0 V_0;$$

在 $x = c_{\epsilon_0} t$ 上：$\epsilon = \epsilon_0 = V_0/c_0$.

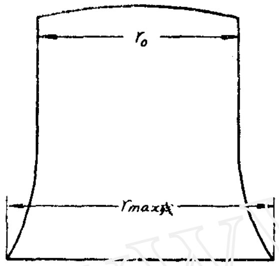

图 4　鋁鋼短試件的殘余变形

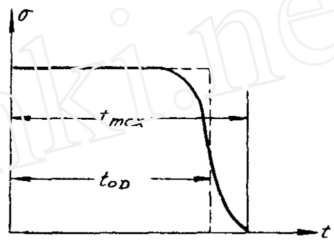

图 5　受击端面的 σ-t 設想曲綫

令 $r_{M殘}$ 代表殘余变形的最大半径，r_0 为原始半径. 由图 4 的实测結果得

$$\frac{r_0}{r_{M殘}} = \frac{45.0}{58.0}.$$

假定体积不变，則在最大半径处所对应的殘余应变 $\epsilon_{M殘} = [1 - r_0^2/r_{M殘}^2] = 0.399$，而 $\epsilon_0 = V_0/c_0 = 0.0562$. 由卸載的弹性性質，在端面处出現过的最大应变 ϵ_M 是

$$\epsilon_M = 0.399 + 0.0562 = 0.455.$$

由于在 $x=0$ 处 $\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$，故可将式(17)中的状态方程加以积分，得到

$$\epsilon = \frac{V_0 - V_Y}{V_0}\left(1 - e^{-\alpha \frac{V_0}{c_0} t}\right) + \frac{V_0}{c_0} e^{-\alpha \frac{V_0}{c_0} t}, \tag{18}$$

其中 $V_Y/c_0 = \sigma_Y/E = 0.00994$. 将 ϵ_M，V_Y/c_0 和 V_0/c_0 值代入式(18)，即有

$$t_{0D} = 13.1/\alpha. \tag{19}$$

t_{0D} 为端面应变上升到 ϵ_M 值时所对应的时間. 作为一个近似，可以認为在 $t \geqslant t_{0D}$ 时，卸載过程迅速进行(图 5). α 为流常数 (flow constant). 下面可以看出，定 $\alpha = 1.05 \times 10^6$ [秒]$^{-1}$ 是合理的，因此，$t_{0D} = 12.5 \times 10^{-6}$ 秒.

t_{0D} 既定，可将它的值分成 100 等分，并在 x-t 平面上作 $dx = 0$，$dx = c_0 dt$，$dx = -c_0 dt$ 三族特征綫如图 6 所示. 我們的目的是求松弛区內所有网格結点上的 ϵ，σ/E 和 V/c_0 値以最后定出殘余变形分布.

为了使計算一目了然，希望松弛区的三角形 ODB 正好被特征綫网格等分. 这只有在 c_{ϵ_0} 与 c_0 的比値成整数时才可能，否則松弛区的边界綫就不落在网格結点上，这时无論是网格結构或是計算步驟都要繁得多. 幸而在本实例中 $c_0/c_{\epsilon_0} = 8.2$（图 3 中虛綫），因此，取 $c_0/c_{\epsilon_0} = 8$ 作为松弛区边界仍不失为很好的近似，并在 $x = c_0 t/8$ 上就令 $\epsilon = 0.0562$.

計算結果表明，在 $\triangle ODB$ 內等应变綫都是直綫，換句話說都是簡单波，而且波速和 von Kármán 理論的波速 $\sqrt{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \epsilon}}$ 一致（图 7）. 这又一次証实了塑性波的簡单波性質并不只是 von Kármán 理論才能得到的結果.

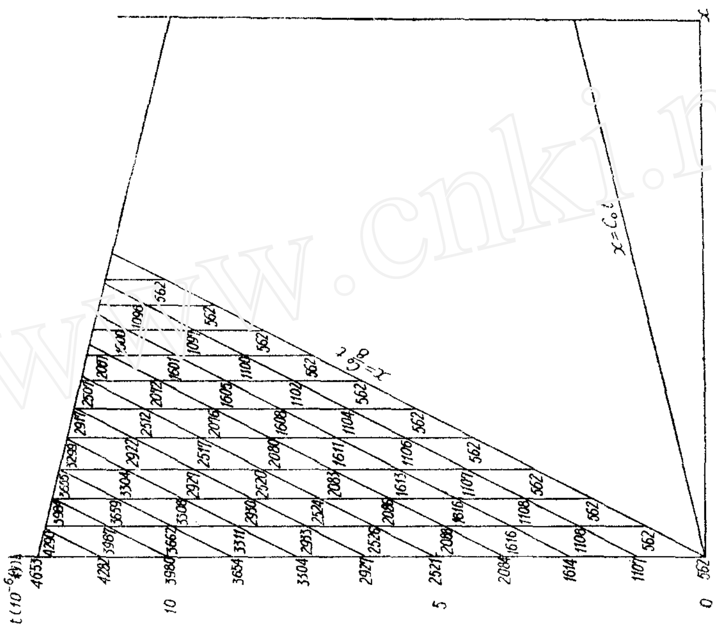

图 7 松弛区的应变图
（ϵ = 图中数值 × 10^{-4}）

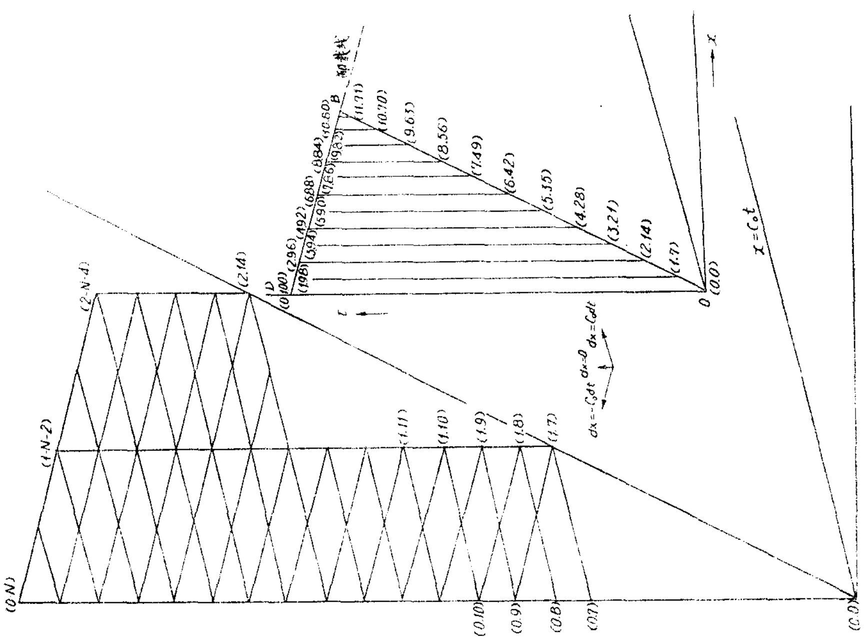

图 6 在 x-t 平面上松弛区的特征线网格图

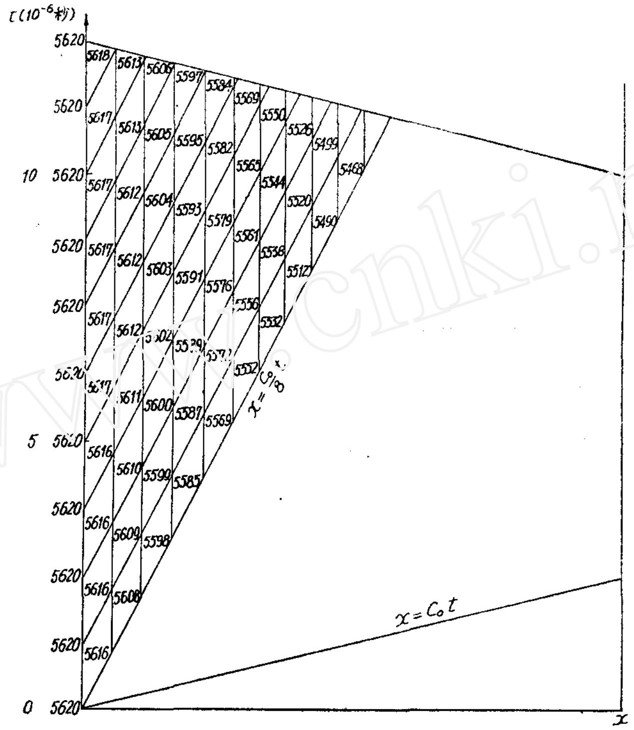

图 8　松弛区的应力图（σ/E = 图中数值 $\times 10^{-5}$）

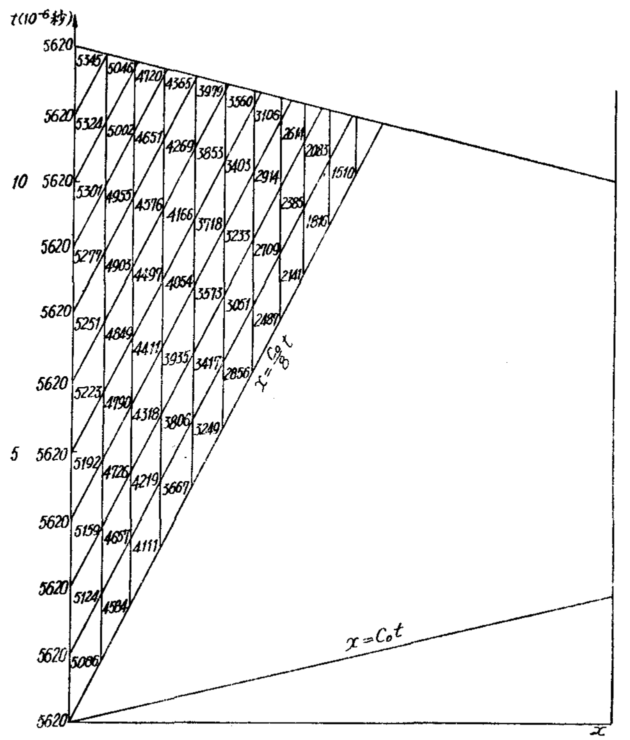

图 9　松弛区的质点速度图（V/c_0 = 图中数值 $\times 10^{-5}$）

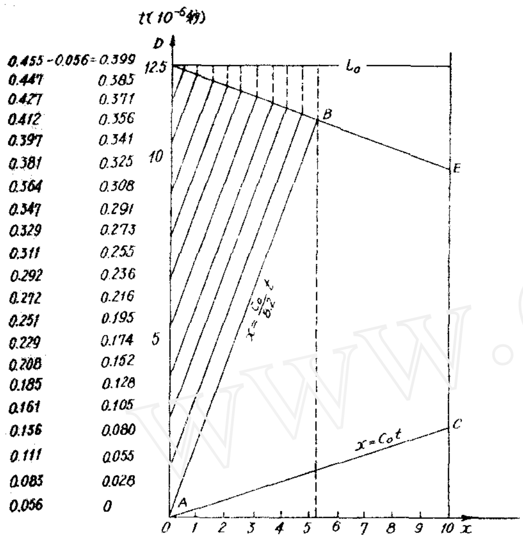

图 10 松弛区的等应变綫图 ($V_0 = 279$ 米/秒)

殘余应变的計算过程参看图 10 和 11. 图 10 跟图 7 不同，它把 $\triangle ODB$ 的边界仍恢复为 $x = c_0t/8.2$，但保留塑性波具有簡单波性質这个計算結果. 这样作的目的，是为了糾正采用 $x = c_0t/8$ 作边界时数值計算所引起的誤差. 为了和殘余变形作比較，必須考虑弹性卸載綫 ED 对变形的影响. 我們把所有等应变綫和卸載綫 ED 相遇时的应变値都减去 0.0562 作为卸載波对变形大小的近似影响. 但在 $\triangle ODB$ 内則可以不考虑卸載对变形的影响，这是我們直接援用了 Bell[10] 对卸載实驗的研究結果. 应該指出，在 $t < t_{0D}$ 时实际上端面应力已受到卸載波的微弱影响（見图 5 中的虚綫部分），而我們把端面应力受到卸載波的影响看成在 $t \geqslant t_{0D}$ 时才发生，則只是一种理論上的近似. 从計算結果跟实驗事实很好符合这一点看来，我們以前所作的假定和近似是合理的. 图 12 是殘余变形图. 假定体积不变，图 12 中的虚綫部分就很容易由图 11 作換算而得到. 图 13, 14, 15 是对应于撞击速度为 196 米/秒的計算結果，流常数 α 当然仍采用 1.05×10^6 [秒]$^{-1}$. 图 15 表明，計算結果和实际殘余变形完全一致. 图 12 中的实綫部分是試件的实际殘余变形图，由于試件被撞歪了（这在文献[9]中已指出），所以計算結果和实驗結果的符合情况沒有图 15 那么好. α 为理論中唯一可調节的参数，其合理性在于 α 旣定后能給出不止一个正确結果.

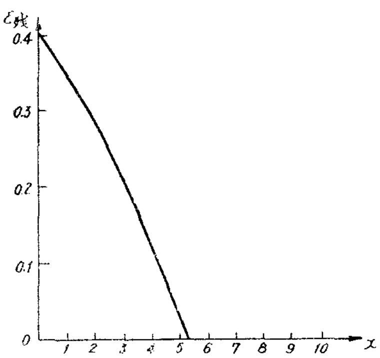

图 11 殘余应变分布图 ($V_0 = 279$ 米/秒)

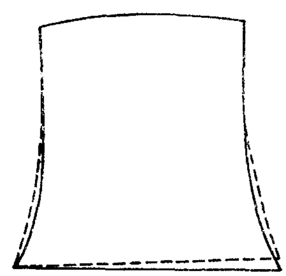

图 12 殘余变形图 ($V_0 = 279$ 米/秒)
—— 实际形状 ---- 理論計算

可以看出，将表示松弛函数的式 (6) 換成式 (7) 或其二級近似式 $g(\sigma, \epsilon) = \alpha(1 - \epsilon)(\sigma - f(\epsilon)) - \alpha B(1 - \epsilon)^2(\sigma - f(\epsilon))^2$ 后，图 12 中的計算結果将和实驗符合得更好. 这样，图 10 中最左列的 21 个应变値在 $x = 0$ 的 t 軸上的坐标就不再保持等間距，而是由下向上逐漸由疏到密地排列了. 从这些点子作等应变綫与卸載綫 DE 相交而得出

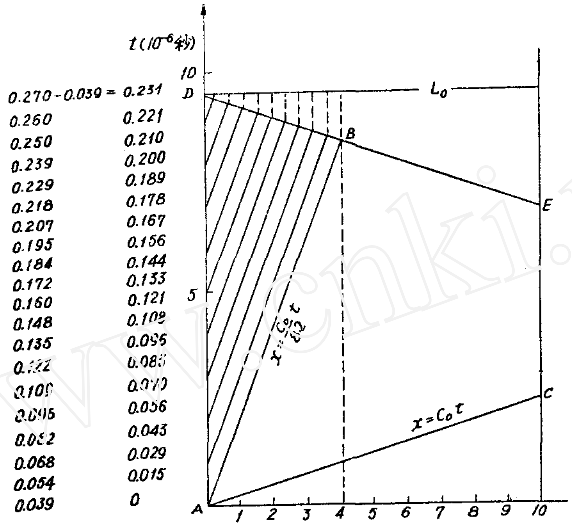

图 13　松弛区的等应变綫图（$V_0 = 196$ 米/秒）

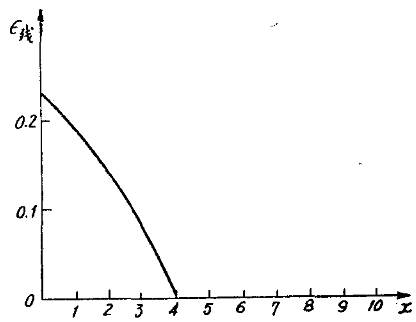

图 14　殘余应变分布图（$V_0 = 196$ 米/秒）

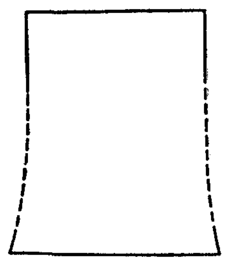

图 15　殘余变形图

—— 实际形状　　- - - - 理論計算

的殘余变形分布，将会和实验結果符合得更好．反之，若取 Malvern 建議的式(3)或其二級近似式 $g(\sigma, \epsilon) = \alpha(\sigma - f(\epsilon)) + \alpha b(\sigma - f(\epsilon))^2$，則图 10 最左列的 21 个点子的排列就会下密而上疏，这样非但不能修正理論結果，反而会使結果更坏．这就是本文提出的状态方程合理的例証．即使不考慮非綫性修正，所得結果也比 Lee 等[9] 用強間断內撞击理論得到的結果以及用 Taylor 近似理論得到的結果都好．尤其重要的是，这里不出現应变台阶的問題．最后，应該指出，函数 $g(\sigma, \epsilon)$ 中的修正因子$(1 - \epsilon)$在大变形的实例計算中起着重要作用，否則就不能和实驗符合．

四、加載区的力学規律和卸載波对殘余变形的影响

关于加載区的变形过程，应当注意三件事情：

1. 在 $x = c_0 t$ 上应滿足激波条件（Hugoniot 方程），因此有

$$\frac{\sigma(x, x/c_0)}{E} = \epsilon(x, x/c_0) = \frac{V(x, x/c_0)}{c_0}.$$

2. 应力在 $\triangle ODB$ 內处处連續（包含原点）这一假定是可靠的，这就排斥了从原点发

出一束中心波的可能.

3. 假定加载区内等应变綫也是直綫. 由材料的綫性硬化($\epsilon < 0.3$ 时)性质,等应变綫是一組平行綫如图 16 所示.

根据这三点再加上 $x = c_{\epsilon_0}t$ 上已求出的边界値 ϵ, σ/E 和 V/c_0, 加載区内各点的 ϵ, σ/E 和 V/c_0 值卽可用数値解法求出. 应該指出, 上述分析是在加載区内等应变綫也是直綫这一假定下得到的. 至于加載区的眞实力学规律究竟怎样, 仍然是一个値得研究的問題.

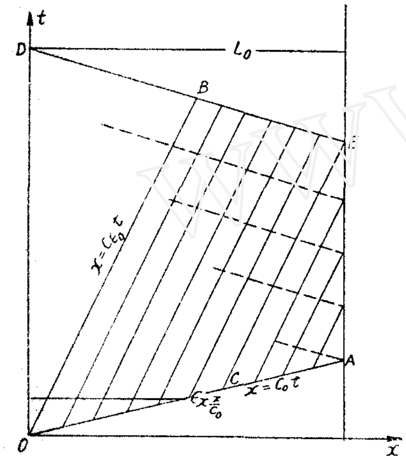

图 16　加載区的等应变綫图与卸載特性

Bell 近年来对有限长試件撞击的卸載性质作了精細的实驗研究, 发現在自由端反射回来的卸載波逐步被迎面而来的塑性波吸收, 以致不能一下子穿透一系列塑性波的波前而达到撞击端以对端面应力卸載,并且还发現,在杆的前半段里塑性波在不算短的时間內的传播情况有如在一根半无限杆中的传播情况一样. 从图 16 可以看出,我們采用卸載波对殘余变形影响不大这一假定,实际上是以 Bell 实驗研究結果作为理論的出发点. 图 16 中的虛綫表示卸載波穿透塑性波的波前与被塑性波吸收的情况, 直到波前 CE 在自由端反射后, 端面应力才迅速下降.

五、横向慣性的作用

在撞击速度 $V = 279$ 米/秒这样大的情况下,横向慣性理应起着重要的作用. 但我們的状态方程虽然沒有变量 r, θ, 却能給出与实驗如此符合的結果, 这就不能不令人怀疑,横向慣性的作用是否已隐含在我們的状态方程中,卽应力之所以提高是否就是由于有横向慣性的緣故. 为了弄清这个問題,需要对横向慣性能作一近似估計.

設想有一半径为 r_0 的圓片材料,在其一端面上刻上一組等間距的同心圓而进行材料压縮試驗. 假設体积不变,可以发現:

1. 等間距同心圓仍为等間距同心圓;

2. 短圓柱体仍为短圓柱体,卽平面仍为平面.

高速变形时虽然几何型有改变,上二結論不再成立,但仍可沿用它們来迅速对横向慣性能作一估計,这在量級上是不会改变的.

設在 t 时刻有 $r_1/r_2 = \beta$, 则由上述結論 1, 在 $t + dt$ 时刻有 $\dfrac{r_1 + V_{r_1}dt}{r_2 + V_{r_2}dt} = \beta$, 其中 $V_r = \dfrac{\partial r}{\partial t}$. 由此得

$$V_{r_1}/r_1 = V_{r_2}/r_2 = V_{r'_0}/r'_0, \tag{20}$$

其中 r'_0 与 $V_{r'_0}$ 为外緣半径及其在 r 方向的质点速度.

設薄片 dx 的横向慣性能为

$$Rdx = \int_0^{r_0'} \frac{1}{2}(2\pi r)V_r^2\rho(1-\epsilon)dxdr. \tag{21}$$

利用体积不变性 $\frac{d}{dt}(\pi r_0'^2(1-\epsilon)dx) = 0$，可得

$$\frac{V_{r_0'}}{r_0'} = \frac{1}{2(1-\epsilon)}\frac{\partial\epsilon}{\partial t}. \tag{22}$$

由式(20)—(22)得

$$R = \frac{A_0^2\rho}{16\pi}\left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^2\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\right)^2, \tag{23}$$

其中 A_0 为原始截面．令薄片 dx 的縱向动能 $Kdx = \rho A_0 dx\ V^2/2$，则

$$\frac{R}{K} = \frac{A_0}{8\pi}\left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^3\left(\frac{1}{V}\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\right)^2. \tag{24}$$

根据图 7 和 9 中列出的数字，R/K 可以大到 75%，最小也有 10%．这說明横向慣性并非可以忽略不計的．

我們認为，横向慣性的存在是状态方程中应力提高項 $\sigma - f(\epsilon)$ 出現的原因或原因之一．式(24)表明，横向慣性与截面积大小即几何尺寸有关．因此，对同一 V_0 而言，直径不同的杆，它們的端面应力的提高程度亦应有所不同．在杆无限变細的极限情况下，应有 $\sigma - f(\epsilon) \to 0$，因而状态方程是与应变率无关的．随着杆截面的加粗，应力提高項的数値就会增大，最后趋向一极限値．

我們曾把 Bell[12] 的实驗結果代入方程(24)，发現距端面 $3D/32$（D 为直径）处（图17)的 R/K 也可大到 60%，此时撞击速度 V_0 只有 20.3 米/秒．这也說明了图 7 和 9 給出的 R/K 的数据并不是不合理的．

六、2S 鋁桿对撞情况下的塑性变形分析

我們再选用 2S 退火鋁杆(以后簡称为鋁杆)作为分析对象．鋁杆受撞后会出現等应变区，应变率相关理論不能解释这种現象．我們希望能弥补这一缺陷．Bell[8,10—12] 近年来曾用光柵、光电实驗技术对鋁杆作了一系列精細的实驗，我們将利用这些实驗結果来和我們的計算結果作一比較．

Bell 研究了两根相同长度 $L_0 = 25.4$ 厘米和相同直径 $D = 2.54$ 厘米的鋁杆以相同速度 $V_0 = 20.3$ 米/秒对撞的实驗，測量了 x–t 平面上各处的 ϵ–t 曲綫、u–t 曲綫（u 为位移）以及端面的 σ–t 曲綫，得出以下主要結果：

1. 撞击端的 ϵ 値并不是一下子就跃到最大値而是有一段动力松弛过程的．ϵ–t 曲綫的形状[12]与撞击速度 V_0 有关(图 17)．

2. 应变最大値并不在端面处而是在距端面 $D/4$ 处出現(与 V_0 値有关)，然后随距离的增加而衰減，直到在距离端面 $2D$ 处出現等应变区为止(图 18, 22)．

3. 在平均了 50 根試件的数据結果后，发現在距离端面 $D/2$—$7D/2$ 的区間內，塑性波传播具有簡单波的性質，波速和 $\sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial\epsilon}}$ 値大体一致[11]，而在小于 $D/2$ 的区間內则不是这样．

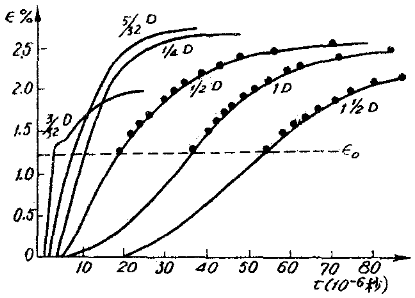

图 17 距端面 $3D/2$ 内的 $\epsilon-t$ 实验曲綫
(●为本文理論計算值，$V_0 = 20.3$ 米/秒)

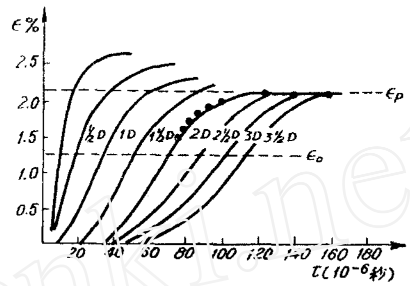

图 18 距端面 $7D/2$ 内的 $\epsilon-t$ 实验曲綫
(●为本文理論計算值，$V_0 = 20.3$ 米/秒)

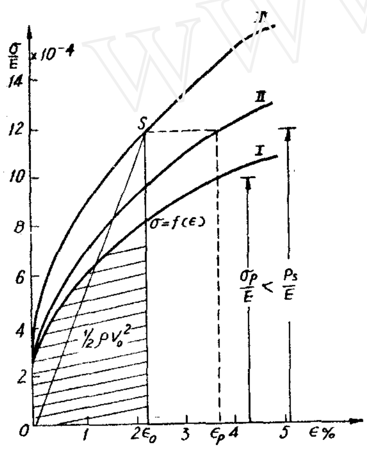

图 19 动应力应变曲綫 II[12] 的計算

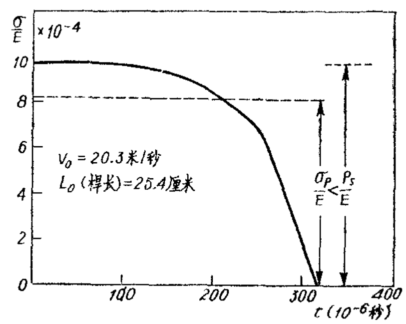

图 20 端面的 $\sigma-t$ 曲綫

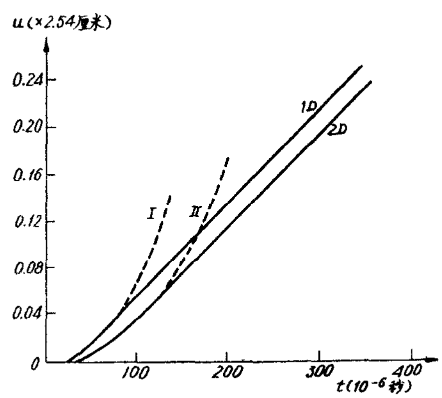

图 21 距端面 $1D$, $2D$ 处的 $u-t$ 曲綫(实綫部分)
抛物綫 I, II 按 1:1 綫度画成
图中 I: $y + \frac{1}{8} = \frac{1}{18}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ II: $y + \frac{1}{8} = \frac{1}{32}(x - 3)^2$

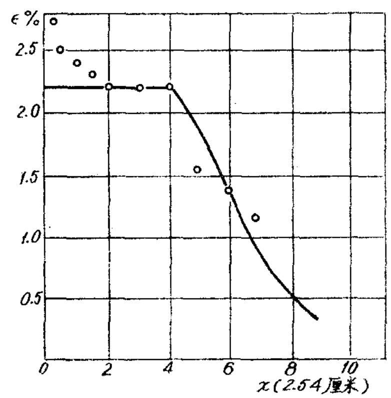

图 22 实验的应变分布
($V_0 = 20.3$ 米/秒)

4. 利用压杆測量端面应力(图 20)，发現端面应力一下子跃到 p_s 值后維持不变[8]，在卸載波到达端面后才开始下降至零. 为了考察卸載波还未到达端面时端面应力是否能維持不变，Bell 利用长压杆技术对一根 50.8 厘米长的鋁杆进行測量，发現端面应力 p_s 在一

段时間內維持不变后在卸載波还未到达端面时也会自行下降并衰減到 σ_p 值. σ_p 对应于靜态应力应变关系中 ϵ_p 的应力値. ϵ_p 由

$$V_0=\int_0^{\epsilon_p}\sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial\epsilon}}\,d\epsilon \tag{25}$$

定义. $p_s>\sigma_p$, 这就是 Johnson 等[2]发現的应力提高現象.

5. 图 21 为用光电技术[8] 在 $x=1D$ 和 $2D$ 处測得的 u-t 曲綫. 它們的起始部分和二拋物綫(图 21 中的虛綫)相重合,这表明該处質点速度是等加速的 $\left(\text{即}\ \frac{\partial V}{\partial t}=\text{常数}\right)$. 过了該处后加速度下降至零,質点速度保持不变.

Bell[12] 指出,由 Johnson 等[2] 測出的鋁杆的应力应变动态曲綫可从应力应变的靜态曲綫中算出.即对应于每一个 V_0 値,恆可找出一个 ϵ_0 値,使它滿足

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2=\int_0^{\epsilon_0}f(\epsilon)d\epsilon. \tag{26}$$

定出 ϵ_0 后,再令

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2=\frac{1}{2}p_s\epsilon_0, \tag{27}$$

于是由式(25)—(27)即可算出一系列 ϵ_p 与 p_s 値. 作 p_s-ϵ_p 曲綫,可看出它和 Johnson 等測出的应力应变动态曲綫完全一致. 我們重复了这个計算,証实确实(图 19).

两根等长度、等半徑、等速度鋁杆对撞而从自由端反射回来的卸載波还沒有到达某处时, 杆在該处的变形規律显然和半无限杆对撞时的变形規律相同.

图 23 中的虛綫为鋁杆的靜态应力应变曲綫,当应变不大时,可用一拋物綫(图 23 中的实綫)来近似代替它. 取 $f(\epsilon)=\beta\epsilon^{\frac{1}{2}}$, 其中 $\beta/E=5.6\times10^{-3}$, 則在撞击速度 $V_0=20.3$ 米/秒时,由图 23 和式(25)—(27)可算出

$$\epsilon_p=2.2\%,\qquad \epsilon_0=1.26\%$$

$$p_s/E=1.00\times10^{-3},\qquad c_{\epsilon_0}/c_0=\sqrt{\frac{1}{E}\frac{\partial f}{\partial\epsilon}}\bigg|_{\epsilon=\epsilon_0}=\frac{1}{6.25}.$$

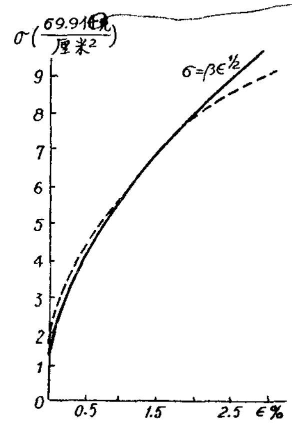

图 23　2S 退火鋁杆的应力应变靜态曲綫

从图 19 中 p_s 的計算值和图 20 中 p_s 的实驗值一致这件事实看来,可認为在 x-t 平面上原点处的应力和应变值是 $\sigma=p_s$, $\epsilon=\epsilon_0$. 由于 $\sigma\nrightarrow f(\epsilon)$, 根据第三节所述,应变会繼續增加而发生材料动力松弛現象,直到 $\sigma\to f(\epsilon)$ 为止.

由于 $p_s\neq\rho c_0V_0$, 所以 Malvern 理論中的假定 1)对鋁杆不适用. 根据 $x=c_0t$ 上的激波条件,应力必在 $x=c_0t$ 上的某处有一跳跃, 而根据問題的物理性質,应力跳跃必在原点发生. 但是我們仍然可根据第三节的方法列出边界条件:

在 $x=0$ 处: $\sigma=\sigma(t)$ (由实驗确定,見图 20),

$V=V_0$;

在 $x=c_{\epsilon_0}t$ 上: $\epsilon=\epsilon_0$ (假設在 $x=c_{\epsilon_0}t$ 上应力处处連續,这样就可以繞过在 $x=c_0t$ 上的原点处应力不連續的困难).

但是由 Bell 实驗的主要結果 2 幷参看图 17，可以断言，同第三节类似的計算方法在此处是毫无成功的希望的．原因在于当 V_0 値約为每秒几十米时，端面間的摩擦力对端面材料的变形起着不可忽視的阻滞作用[12]，因而最大变形不是在端面处而是在其邻近处发生．这样，端面材料实际处于复杂加載的受力状态下．因此不能期望用簡单加載的状态方程(1)来算出端面处的正确的 ϵ-t 曲綫．

摩擦力的作用与一可动的側向約束等价．它的作用无疑会很快随着远离端面而減小．同时材料的受力状态也由复杂加載退化为簡单加載．因此，状态方程(1)在距端面某一段距离以后仍可采用．困难在于此时在理論上我們不知道各处的 $\sigma(t)$ 应采用何种形式，各处的 ϵ-t 曲綫因而仍无从得知．

然而从下面几件实驗事实可以得到一定的启发：

1）图 23 中的 u-t 曲綫的抛物綫部分表明，在距端面至少是 $2D$ 以內各截面的应力梯度 $\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}$ 在相应的时間內为一常数．

2）在 0—120 微秒时間內端面应力变化甚小(图 24)，可看作是常数——出現应力平坦区．如果不是卸載波使端面应力不断下降，根据 Bell 的主要結果 4)，应力必衰減到 σ_p．

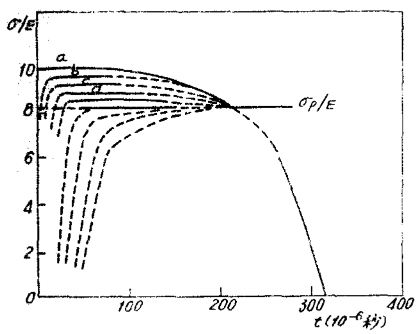

图 24 端面附近各处的 σ-t 設想曲綫

由上面两点可知，在端面附近区域內必然保持应力出現应力平坦这种特点，所不同的是应力値随着距离的增加而減小（如图 24 中的 b，c，d 等实綫所示，图 24 中的虛綫則仍是我們設想的形状）．

为了能够計算，我們只假定，在距端面某一段距离以內，各处的应力在应变上升至 ϵ_0 时早已达到或至少正好达到各平坦区的应力値 $\sigma_{\max}$．这个假定实質上是端面变形規律的外延．只要外延距离足够小，它总是正确的．以后将根据計算結果来討論这个假定的合理性．

現在来求鋁杆各处的 ϵ-t 曲綫．材料所满足的状态方程是：

$$\left.\begin{aligned} E\frac{\partial\epsilon}{\partial t} &= \frac{\partial\sigma}{\partial t} + g(\sigma,\epsilon), \\ g(\sigma,\epsilon) &= \alpha(1-\epsilon)(\sigma-\beta\epsilon^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

在应力平坦区，$\dfrac{\partial\sigma}{\partial t}=0$．由于 $\epsilon\ll 1$，故$(1-\epsilon)$可略去，式(28)可积分成

$$\int_{\epsilon_0}^{\epsilon}\frac{d\epsilon}{\sigma_{\max}-\beta\epsilon^{\frac{1}{2}}}=\int_{t_0}^{t}\frac{\alpha}{E}\,dt. \tag{29}$$

将时間的零点选在 $\epsilon=\epsilon_0$ 的瞬时，将式(29)积分，可得

$$\frac{\alpha t}{E}=\frac{-2\sigma_{\max}}{\beta^2}\ln\left[1-\frac{\beta(\sqrt{\epsilon}-\sqrt{\epsilon_0})}{\sigma_{\max}-\beta\sqrt{\epsilon_0}}\right]-\frac{2}{\beta}[\sqrt{\epsilon}-\sqrt{\epsilon_0}]. \tag{30}$$

式(30)表征了 $\epsilon>\epsilon_0$ 时具有应力平坦的 ϵ-t 曲綫，其中 $\sigma_{\max}$ 以参数形式出現．表 1 列出在选定

$$\sigma_{max} = f(2.2\%),\ f(2.3\%),\ f(2.6\%),\ f(2.7\%)$$

时式(30)的四根 $\epsilon-t$ 曲綫所对应的数据，发現在选 $\alpha = 3 \times 10^6$ [秒]$^{-1}$ 时，由表 1 中数据所画出的 $\epsilon-t$ 曲綫和距端面 $2D$, $3D/2$, $1D$, $D/2$ 处的 $\epsilon-t$ 曲綫完全重合(图 17 和18).

表 1　式(30)的几列計算

	$\sigma_{max} = f(2.2\%)$	$\sigma_{max} = f(2.3\%)$	$\sigma_{max} = f(2.6\%)$	$\sigma_{max} = f(2.7\%)$
ϵ %	αt	αt	αt	αt
1.5	16.71	12.84	10.10	9.43
1.6	25.43	19.52	14.83	12.52
1.7	33.51	27.12	20.46	18.93
1.8	50.52	36.23	26.13	24.46
1.9	67.28	47.70	33.76	30.78
2.0	95.50	62.62	42.04	38.06
2.1	156.13	83.92	51.93	46.58
2.2	∞	120.18	65.52	56.69
2.3		∞	76.57	69.47
2.4			103.23	85.51
2.5			143.37	108.88
2.6			∞	148.55
2.7				∞

我們也計算了 σ_{max} 值由 $f(2.8\%)$—$f(3.3\%)$ 的六根 $\epsilon-t$ 曲綫，其中沒有一条和图 17 中剩下的三根曲綫相符. 原因在于最大应变实际上并不是在端面处而是約在 $D/4$ 处发生. 这恰好說明端面附近的材料处于复杂加載状况下，当然无法用簡单加載的状态方程来算出符合实驗的結果. 另一方面，这也說明端面間摩擦力对材料的变形所起的可动側向約束作用随着距端面距离的增加而迅速減弱，在 $x = D/2$ 处，材料受力状态已退化为簡单加載，因此，用簡单加載的状态方程能算出符合实驗的結果.

可以看出，在 $1D$ 处，計算曲綫 $\epsilon-t$ 的时間零点落在 35 微秒处(图 17). 一直算到 85 微秒，$\epsilon-t$ 曲綫的計算値都和实驗相符，而图 21 中的曲綫 I 可能出現应力平坦的抛物綫部分也差不多落在 20—80 微秒之間. 图 21 中的曲綫 II 中的抛物綫部分落在約 30—120 微秒之間，而 $2D$ 处的 $\epsilon-t$ 計算曲綫(图 18)的时間零点为 70 微秒，算到 120 微秒，这段时間間隔也正好落在 30—120 微秒之間. 因此可以說，应变上升到 ϵ_0 时，应力早已或至少正好达到应力平坦这一假定在 $x \leqslant 2D$ 区域內是正确的. 在 x 离 $2D$ 較远处，这个假定显然不成立. 而由于不知道 $\sigma(t)$ 的具体形式，因此，还沒有很好的方法来計算較远各处的 $\epsilon-t$ 曲綫.

从表 1 可知，在 $x = 2D$ 处的应力平坦值正好等于 σ_p. 根据問題的物理性质，材料

最大应力状态显然发生在受击端面处，对应于不同 x 处的最大应力也显然不会随着 x 的增加而增加，因此有

$$\sigma_{\max}|_{x_n} \leqslant \sigma_{\max}|_{x_{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant \sigma_{\max}|_{x_1} \leqslant \sigma_{\max}|_{x=2D} = \sigma_p \quad (x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > 2D). \tag{31}$$

考虑半无限杆的情况，由于 Bell[11]証实了塑性波在鋁杆中是以色散规律 $c(\epsilon)=\sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon}}$ 向前传播的，再加上鋁杆的静态应力应变曲綫向下凹这一性质，在距端面很远处必有 $\frac{\partial \epsilon''}{\partial t} \to 0$. 由式(2)和(4)知状态方程退化为 $\sigma=f(\epsilon)$，因此，根据 von Kármán 理論，距端面很远处的最大应力值也为 σ_p. 因此有

$$\sigma_{\max}|_{x \gg 2D} = \sigma_p. \tag{32}$$

这样，由式(31)，(32)得出

$$\sigma_{\max}|_{x \geqslant 2D} = \sigma_p. \tag{33}$$

因此，不論 $\sigma(t)|_{x>2D}$ 采取什么形式，由状态方程(28)可見，当 $\frac{\partial \epsilon''}{\partial t}$，即 $g(\sigma, \epsilon) \to 0$ 时，必有

$$\epsilon \to \left(\frac{\sigma_p}{\beta}\right)^2 = \epsilon_p. \tag{34}$$

这就解释了在 $x \geqslant 2D$ 处出現等应变区的問題(图 22)，并再次說明了塑性波具有簡单波的性質并不只是 von Kármán 理論才能得到的結果.

七、討　　論

式(7)只描写材料在高速变形时的情况，因此对距受击端面很远处的材料而言，函数 $g(\sigma, \epsilon)$ 就不能用式(7)来描写. 同理，在低速撞击时，端面附近材料的变形速度亦不算高，因此，式(7)这时也不一定适用.

横向慣性一开始就对变形起限制作用，因而应力提高. 但横向慣性能一旦获得，它反过来又助长了变形的发展.

在撞击速度不够大时，相对于正应力而言端面摩擦力不可忽略，因此极邻近端面处的材料处于复杂加载状况下. 这就是鋁杆对撞时最大应变不是在端面处而是在距端面 $D/4$ 处发生的原因. 在撞击速度大到每秒上百米时，相对于巨大的正应力而言，端面摩擦力看来是可以忽略的. 这样，就有可能仍用簡单加載的状态方程来算出正确的变形过程.

本文所給的边界条件，原則上是由实驗定出的，因此，我們并沒有对一般工程材料的高速变形过程給出一个普适的計算方法，只是对高速变形的物理机制进行了一些探討，用状态方程应分区考虑的观点来試图解释一些实驗事实.

在本文写作过程中曾与解伯民同志进行过有益的討論，郭永怀和王仁同志曾审閱本文初稿并提出了宝貴意見，在此一并致謝.

参　考　文　献

[1] von Kármán, Th., On the propagation of plastic deformation in solids, *Jour. Appl. Phys.*, **21**, 1950, 987.

[2] Johnson, J. E., Wood, D. S., Clark, D. S., Dynamic stress-strain relation for 2S aluminum under compression impact, *Jour. Appl. Mech.*, **20**, 4, 1953, 523—529.

[3] Malvern, L. E., Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, *Quart. Appl. Math.*, 8, 4, 1951, 405—411.

[4] Malvern, L. E., Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, *Jour. Appl. Mech.*, **18**, 1951, 203—208.

[5] Tapley, B. D. and Plass, H. J., The propagation of plastic wave in a semi-infinite cylinder of a strain-rate-dependent material, *Proceeding of seventh midwestern mechanics conference*, 1961, Development in mechanics, I, 256—267. Edited by Lay, L. E. and Malvern, L. E..

[6] Френкель, Я. И., Конторова, Т. А., К теории пластической деформации и двойникования, *ЖЭТФ*, **8**, 1938, 39, 1340, 1349.

[7] Gilman, J. J., Johnston, W. G., Dislocation velocities, dislocation densities and plastic flow in lithium fluoride crystals, *Jour. Appl. Phys.*, **30**, 1959, 129.

[8] Bell, James F., Futher experiment study of unloading phenomenon in constant velocity impacts, *Jour. Mech. Phys. Solids*, **9**, 4, 1961, 261—278.

[9] Lee, E. H., Tupper, S. J., Analysis of plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target, *Jour. Appl. Mech.*, **21**, 1954, 63.

[10] Bell, James F., An experimental study of unloading phenomenon in constant velocity impacts, *Jour. Mech. Phy. Solids*, **9**, 1, 1961, 1—15.

[11] Bell, James F., Propagation of Large amplitude waves in annealed aluminum, *Jour. Appl. Phys.*, **31**, 2, 1960, 277—282.

[12] Bell, James F., Etudy of initial condition in constant velocity impact, *Jour. Appl. Phys.*, **31**, 12, 1960, 2188—2195.

THE NATURE OF DYNAMIC RELEXATION OF MATERIAL UNDER HIGH SPEED DEFORMATION AND THE PLASTIC WAVE IN ONE DIMENTIONAL BAR

FÀN LIÁNG-ZǍO

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

1. Whether a single state equation can be formulated for the whole process of high speed deformation in solid is questioned, and it is considered that the state equation

$$E\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon)$$

is suited only to a part of the $x-t$ Lagrange plane.

2. The relaxation function is discussed and is suggested to take the following form:

$$g(\sigma, \varepsilon) = A\{1 - exf[-B(1-\varepsilon)(\sigma - f(\varepsilon))]\}.$$

3. The term $\sigma - f(\varepsilon)$ in the state equation is attributed wholly or partially to the

effect of radial inertia.

4. An explanation of the phenomenon of the existence of uniform strain region in constant-velocity impact is proposed by use of strain-rate-dependent theory.

5. When the impact velocity lies in the range of several decametres per second, the role of friction between impact surfaces is important for the formation of the plastic wave and its propagation. But very likely, it can again be neglected, when the impact velocity reaches beyond one hundred metres per second.