

## 学术讨论

### 对“关于线性结构体系影响线的一个定理”的讨论\*

王震鸣

(中国科学院力学研究所)

读了“关于线性结构体系影响线的一个定理”<sup>[1]</sup>, 很感兴趣, 觉得这个问题有实用价值。在应用此定理时, 发现一些与定理不符的情况。在 И. М. Рабинович 的著作<sup>[2]</sup>中亦存在同样的问题。为了说明问题, 先举几个简单的例子。

**例 1.** 有一个两端固定的等截面梁, 其轴线与坐标线成  $45^\circ$  角(图 1)。在垂直力  $P$  和水平力  $H$  的作用下, 求  $B$  点的轴向力  $N$ 。

$y = x$  系外力的作用线, 作用范围自  $A$  至  $B$ 。  $y = x$  及其反函数  $x = y$  都是单值连续函数, 符合定理的要求。根据材料力学的方法, 可以求得在垂直力  $P$  的作用下, 轴向力  $N$  的影响函数为

$$\phi(x) = \frac{x}{l}, \quad \phi'(x) = \frac{1}{l}; \quad (1)$$

在水平力  $H$  的作用下, 轴向力  $N$  的影响函数为

$$\psi(y) = -\frac{y}{l}, \quad \psi'(y) = -\frac{1}{l}, \quad (2)$$

其中  $l$  为  $B$  点的横坐标和纵坐标。定理认为  $\phi'(x) = \psi'(y)$ , 现在  $\phi'(x) \neq \psi'(y)$ , 与定理不符。

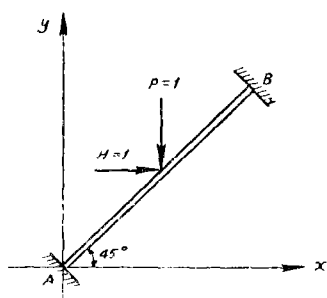


图 1

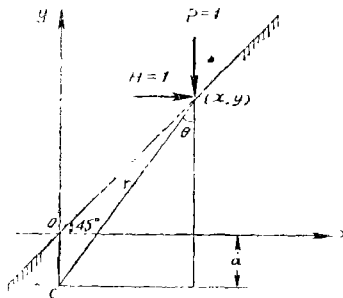


图 2

**例 2.** 一个半无限平面, 边界与坐标线成  $45^\circ$  角, 外力作用于边界上, 求  $C$  点的应力  $\sigma_y$ (图 2)。

外力作用于边界  $y = x$  上,  $y = x$  及其反函数  $x = y$  都是单值连续函数, 符合定

\* 1961年2月16日收到。

理的要求。根据 S. Timoshenko 和 J. N. Goodier<sup>[3]</sup> 的結果,稍加簡化,可得垂直力  $P$  作用于点  $(x, y)$  时,  $C$  点的应力  $\sigma_y$  的影响函数为

$$\phi(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(a+x)^3}{(a^2+2ax+2x^2)^2}, \quad (3)$$

$$\phi'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(a+x)^2(a^2+6ax+2x^2)}{(a^2+2ax+2x^2)^3}; \quad (4)$$

水平力  $H$  作用于点  $(x, y)$  时,  $C$  点的应力  $\sigma_y$  的影响函数为

$$\psi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y(a+y)^2}{(a^2+2ay+2y^2)^2}, \quad (5)$$

$$\psi'(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(a+y)(a^3+a^2x-4ax^2-2x^3)}{(a^2+2ax+2x^2)^3}. \quad (6)$$

定理认为  $\phi'(x) = \psi'(y)$ 。现在  $\phi'(x) \neq \psi'(y)$ , 与定理不符。

**例 3.** 有一个等截面的悬臂梁, 固定端为  $A$ , 其軸綫与坐标綫成  $45^\circ$  角(图 3)。在垂直力  $P$  与水平力  $H$  的作用下, 求  $B$  点在  $AB$  方向的位移  $\delta$ 。

和例 1 一样, 力的作用綫  $y=x$  及其反函数  $x=y$  都是单值連續函数, 符合定理的要求。在垂直力  $P$  的作用下,  $B$  点沿  $AB$  方向的位移  $\delta$  的影响函数为

$$\phi(x) = -\frac{x}{AE}, \quad \phi'(x) = -\frac{1}{AE}, \quad (7)$$

其中  $A$  为梁的截面面积,  $E$  为弹性模数; 在水平力  $H$  的作用下, 位移  $\delta$  的影响函数为

$$\psi(y) = \frac{y}{AE}, \quad \psi'(y) = \frac{1}{AE}. \quad (8)$$

定理认为  $\phi'(x) = \psi'(y)$ 。现在  $\phi'(x) \neq \psi'(y)$ , 又与定理不符。

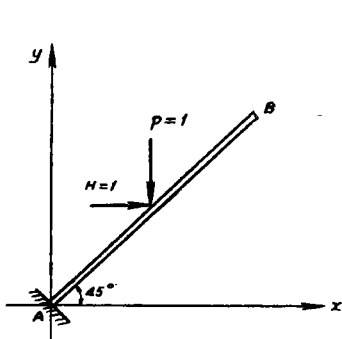


图 3

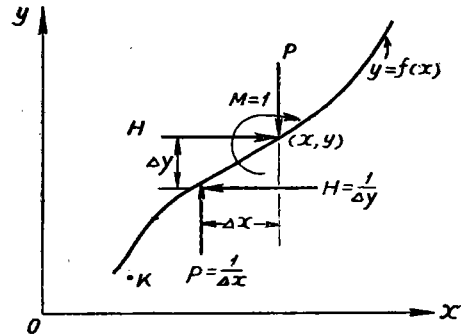


图 4

还可以举出一些与定理不符的反例, 看来没有必要了。

定理不适用于上面三个例子的原因, 是由于在定理的証明中不自觉地引进了带有局限性的假定。

在定理的証明中, 文献[1]和[2]都认为图 4 中的单位力偶  $M=1$  可与  $P \cdot \Delta x$  或  $H \cdot \Delta y$  等效, 只要使  $P = \frac{1}{\Delta x}$ , 或  $H = \frac{1}{\Delta y}$ , 并让  $\Delta x$  或  $\Delta y$  趋近于零就可以了。然而, 在弹性体系中, 上述論断一般說来是不正确的。因为  $P \cdot \Delta x = \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x = 1$  这样的受力状况(图 5a),

等于图 5b 和图 5c 中的受力状况之和。  $H \cdot \Delta y = \frac{1}{\Delta y} \cdot \Delta y = 1$  这样的受力状况(图 5d), 等于图 5e 和图 5f 中受力状况之和。 可以看到, 图 5b 和图 5e 中的受力状况是相同的, 图 5c 和图 5f 中的受力状况则是不同的。 把图 5a 和图 5d 中的受力状况等同起来, 那是只考虑到图 5b 和图 5e 中受力状况相同这一部分, 而忽略了图 5c 和图 5f 中受力状况不同的那一部分, 即忽略了大小为  $\left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta r}\right)$  的一对轴向力的作用。 在弹性体系中, 这样的平衡力系(当这一对力的作用点无限接近时, 力的大小无限地增大)是要产生广义力和广义位移的, 是不能随便应用 St. Venant 原理而加以忽略的。 这个事实可以从前面三个例子中明显地看到。

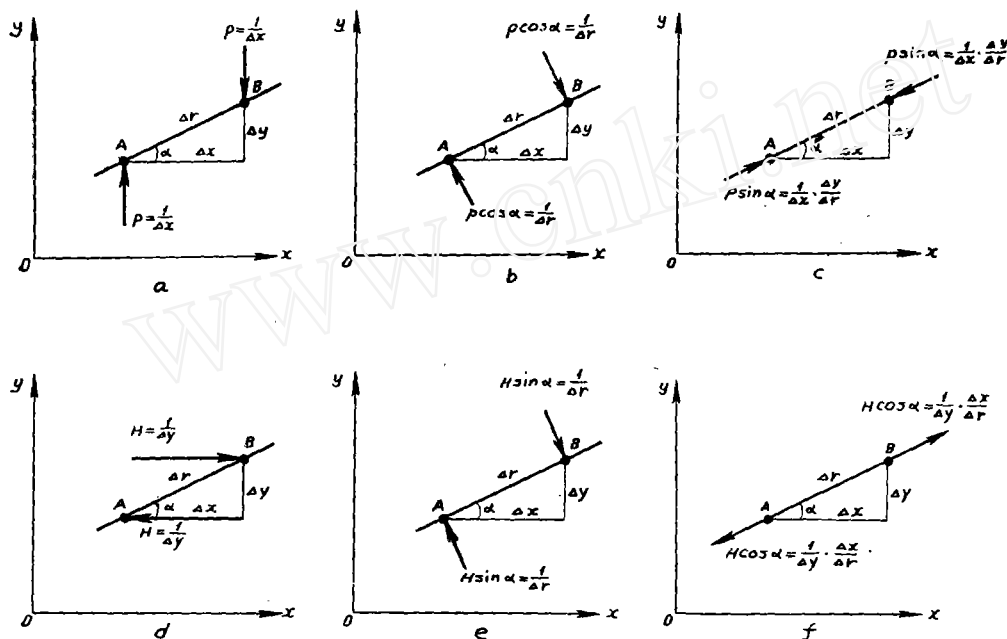


图 5

因此在求 K 点(图 4)的广义力或广义位移时, 在上述这一对轴向力起作用的情况下, 定理就不适用; 而只有在上述这一对轴向力不起作用的情况下, 定理才是正确的。 在应用文献 [1] 和 [2] 中的上述定理时, 作此考虑, 是完全必要的。

## 参 考 文 献

- [1] 邢顺铸, 关于线性结构体系影响线的一个定理, 力学学报, 4, 3, 1960 年 7 月, 241—244.  
 [2] Рабинович, И. М., Курс строительной механики, Государственное Издательство Строительной Литературы, 1950, Часть 1, 124—125.  
 [3] Timoshenko, S. and Goodier, J. N., Theory of elasticity, second edition, 1951, 88.

DISCUSSION ON "INFLUENCE-LINE THEOREM OF  
LINEAR STRUCTURAL SYSTEMS"

WANG CHEN-MING

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)