第6卷 第1期　　力 学 学 报　　Vol. 6, No. 1
1963 年 3 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　March, 1963

研 究 簡 报

弹性波波面强度的变化*

解 伯 民
（中国科学院力学研究所）

一

在一定的边界条件和初始条件下求解非定常弹性动力学問題一般相当困难，但根据 Huygens-Kirchhoff 原理可以得出任何时刻波面（或間断面）的位置。本文严格建立了波面强度，即速度、应变、应力等的間断值在传播过程中的变化規律，以及发生反射、折射时的規律，这有助于了解問題的概况，特別是波头的情况。本文的工作是 J. B. Keller 对于声波的研究[1]的推广。

二

用 x_i 表示直角坐标，t 表示时間。設位移为 $\mathbf{u}$，速度为 $\mathbf{v}$，則应变张量为 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$，体积应变为 $\Delta=\varepsilon_{ii}$，位移的旋量为 $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}$，再設 Lamè 常数为 λ、μ，密度为 ρ，則应力张量为 $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\Delta+2\mu\varepsilon_{ij}$。运动方程是

$$(\lambda+\mu)\nabla\Delta+\mu\nabla^2\mathbf{u}-\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=0. \tag{1}$$

对于纵波，$\boldsymbol{\omega}=0$，$\nabla\Delta=\nabla^2\mathbf{u}$，(1)成为

$$\nabla\Delta-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=0, \tag{2a}$$

其中 $a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ 为縱波速。对于横波，$\Delta=0$。(1)成为

$$2\nabla\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=0, \tag{2b}$$

其中 $b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ 为横波速。作为运动間断面的波面必須滿足运动学条件（位移連續条件）和动力学条件（动量条件）[2]，前者可写成

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^0=-\frac{l_j}{c}v_i^0, \tag{3}$$

其中 l_i 代表波面单位法綫 ν（即射綫）的方向余弦，射綫以沿波前进方向为正。另外，$c=a$，b 是間断面的运动速度。特別要指出，在这里及下面，如果扰动是在靜止的介質中

* 1962 年 2 月 16 日收到。

传播，则 $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^0$，$v_i^0$ 等表示从已扰动区域逼近波面时所得的值．如果間断面的两边都有应变和速度，则 $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^0$，$v_i^0$ 等表示間断值．至于动力学条件，则可写为

$$-\rho c\, v_i^0 = (\lambda + 2\mu)\, l_i\, \Delta^0 - 2\mu\, (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}^0)_i. \tag{4}$$

由于間断面的运动速度只能是 a 或 b[2]，由(4)可知对于縱波

$$v_i^0 = -a l_i\, \Delta^0, \tag{5a}$$

对于横波则

$$v_i^0 = 2b\, (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}^0)_i. \tag{5b}$$

我們在下面要用到波面的一个性質，即任何在波面上恆为零的量 $Q(x_i, t)$ 一定滿足关系

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^0 = -\frac{l_i}{c}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^0, \tag{6}$$

例如位移就是这样的量，此时(6)即(3)．关系(6)的証明和推导(3)的方法完全一样[2]．

三

先討論縱波．从(3)及(5a)可知，波面上的 ε_{ij}^0、σ_{ij}^0，v_i^0 全都可通过 Δ^0 表示，因此我們在下面只推求 Δ^0 沿射綫的变化，这也就决定了波面強度的变化．引入記号 $\frac{d}{ds} \equiv l_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$，这自然表示随波的前进取全导数，利用(2a)可得

$$a\frac{d\Delta}{ds} - \frac{d}{ds}(l_i v_i) = \frac{\partial \Delta}{\partial t} - v_i \frac{dl_i}{ds} - l_i l_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$$

$$= v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(l_i l_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i - l_i l_j v_j) - v_i \frac{dl_i}{ds}. \tag{7}$$

将(7)应用于波面时，我們注意到由于(5a)

$$-l_i v_i^0 = a\Delta^0,\quad v_i^0 \frac{dl_i}{ds} = -a\Delta^0 l_i \frac{dl_i}{ds} = 0,$$

$$v_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j}(l_i l_j) = -a\Delta^0 l_i\left(l_i \frac{\partial l_j}{\partial x_j} + l_j \frac{\partial l_i}{\partial x_j}\right) = -a\Delta^0 \frac{\partial l_i}{\partial x_i};$$

再有，利用(3)可将(5a)写成 $v_i^0 - l_i l_j v_j^0 = 0$，由于这个关系在波面上恆成立，所以可应用(6)而得

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(v_i - l_i l_j v_j)\right\}^0 = -\frac{l_i}{a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(v_i - l_i l_j v_j)\right\}^0 = 0.$$

因此由(7)得到

$$2a\frac{d\Delta^0}{ds} + a\Delta^0 \frac{\partial l_i}{\partial x_i} = 0.$$

解出 Δ^0 得

$$\Delta^0(s) = \Delta^0(s_0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s} \operatorname{div} \boldsymbol{\nu}\, ds\right\}.$$

利用 $\boldsymbol{\nu}$ 是单位向量場的性質，容易証明

$$\exp\left\{\int_{s_0}^{s}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu}\,ds\right\}=\frac{G(s_0)}{G(s)}=\frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta\sigma(s_0)},$$

这里 $G(s)$表示 Gauss 曲率,或者在平面运动的情形,就是波面的曲率,而 $\dfrac{\Delta\sigma(s)}{\Delta\sigma(s_0)}$表示射綫管微面积的膨胀比,因此

$$\frac{\Delta^0(s)}{\Delta^0(s_0)}=\sqrt{\frac{\Delta\sigma(s_0)}{\Delta\sigma(s)}},\tag{8}$$

卽波面強度按几何光学規律变化.

四

现在討論橫波,利用(3)可得

$$2b\,\boldsymbol{\omega}^0=b\,(\nabla\times\mathbf{u})^0=\mathbf{v}^0\times\boldsymbol{\nu}.$$

結合(5b)可知此时 $\mathbf{v}^0$, $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^0$ 相互垂直,并且 ε_{ij}^0, σ_{ij}^0和 v_i^0 全部可通过 ω^0 表示, 因此我們只求 $\boldsymbol{\omega}^0$ 沿射綫的变化. 引入記号 $\dfrac{d}{dq}\equiv l_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}+\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial t}$, 根据(2b)可得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dq}\times\boldsymbol{\nu}=\{(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}-2b\,\nabla\times\boldsymbol{\omega}\}\times\boldsymbol{\nu}=$$
$$=-\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}-2b\,(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega}+2b\,(\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}),$$

这里 grad $\boldsymbol{\omega}$ 是张量,其定义及运算可参见[3],于是上式可改写为

$$\frac{d}{dq}(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\nu}+2b\,\boldsymbol{\omega})=\mathbf{v}\times\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dq}+\nabla\times\mathbf{v}-\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}+$$
$$+2b\,\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})-2b\operatorname{grad}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}.\tag{9}$$

将(9)应用于波面时,我們注意到由于 $\boldsymbol{\omega}^0\cdot\boldsymbol{\nu}=0$, $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{v}^0=0$, 利用(6)可得

$$2b\,\{\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})\}^0=-\boldsymbol{\nu}\,\{(\nabla\times\mathbf{v})^0\cdot\boldsymbol{\nu}\},\quad\{(\boldsymbol{\nu}\times\nabla)(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{v})\}^0=0,$$

于是可将(9)写成

$$2\frac{d\boldsymbol{\omega}^0}{dq}=(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}^0)\times\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dq}-\operatorname{grad}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}^0+(\boldsymbol{\nu}\times\nabla)\,\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}^0).\tag{10}$$

由于在均匀各向同性的介质中前进的波面是平行曲面族, 而作为它們的法綫的射綫必定是直綫,因此应有[4]

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dq}=0,\quad\nabla\times\boldsymbol{\nu}=0.$$

利用这两个关系并經过一些化简,由(10)得

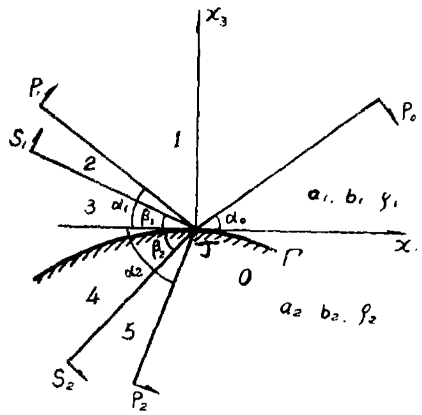
$$2\frac{d\boldsymbol{\omega}^0}{dq}=-(\operatorname{div}\boldsymbol{\nu})\,\boldsymbol{\omega}^0.\tag{11}$$

(11)式表明,波头的极化方向不变,而強度則按几何光学規律变化, 卽

$$\frac{\omega_i^0(q)}{\omega_i^0(q_0)}=\sqrt{\frac{\Delta\sigma(q_0)}{\Delta\sigma(q)}}.$$

五

现在考虑在界面上发生反射和折射时的情况. 参看附图. 用 Γ 表示界面, 界面两边



的介质特征以 a_1、b_1，ρ_1 及 a_2、b_2、ρ_2 表示。先討論入射波为縱波 P_0 的情形。反射的縱波与横波以 P_1，S_1 表示，折射的縱波与横波以 P_2、S_2 表示，在不发生全反射的場合，所有这些波面与界面相交于通过 J 点的一条曲綫上。容易証明，所有上述波面在 J 点的法綫以及 Γ 在 J 点的法綫都在同一平面内，即在所謂入射平面内。事实上，設上述五个波面的方程分别为

$$P_0(x_1, x_2, x_3) - t \equiv P_0(x_i) - t = 0,$$
$$P_1(x_i) - t = 0, \cdots, S_2(x_i) - t = 0.$$

界面 Γ 的方程用参数形式表示为 $x_i = x_i(\xi, \eta)$。由于所有波面在任何时刻都相交于 Γ 上，因此应有

$$P_0\{x_i(\xi, \eta)\} = P_1\{x_i(\xi, \eta)\} = \cdots = S_2\{x_i(\xi, \eta)\}.$$

上式对任何 ξ、η 均成立。对 ξ、η 微分后得

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial P_0}{\partial x_i} - \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_i} - \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \eta} = 0,\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

显然 $dx_i^{(1)} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \xi} d\xi$ 及 $dx_i^{(2)} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \eta} d\eta$ 代表 Γ 在 J 点的两条切綫方向，$\frac{\partial P_0}{\partial x_i}$、$\frac{\partial P_1}{\partial x_i}$ 则分别代表波面 P_0 和 P_1 在 J 点的法綫方向，因此(12)中前两式的意义为波面 P_0、P_1 在 J 点的法綫向量之差垂直于 Γ，换句話説，这三个曲面 P_0、P_1、Γ 在 J 点的法綫在同一平面内。同样可証明其余 S_1，P_2，S_2 在 J 点的法綫也在这个平面内。在这个平面内取坐标軸如图所示，x_1 沿 Γ 的切綫方向，x_3 沿 Γ 的法綫方向。所有波面沿 x_1 的視速度应該相等，即

$$\frac{\sin\alpha_0}{a_1} = \frac{\sin\alpha_1}{a_1} = \frac{\sin\beta_1}{b_1} = \frac{\sin\alpha_2}{a_2} = \frac{\sin\beta_2}{b_2}, \tag{13}$$

这里 α_0、α_1、$\cdots$、β_2 如图所示，分别表示各波面与 x_1 的夾角。(13)就是习知的 Snell 定律。当 $a_2 > a_1$ 而 $\alpha_0 > \sin^{-1}\frac{a_1}{a_2}$ 时，求不到实数的 α_2，这即是发生全反射的情况。至于反射波和折射波的波面强度則应根据在 Γ 上的速度和应力連續条件求出。前述五个波面及 Γ 划分入射平面为 0，1，⋯，5 等六个区域。跨过每一波面有相应的間断。从各个区域向 J 点逼近就得到相应的波面强度之和。例如从区域 1 向 J 逼近时得到 P_0 的强度，而从区域 3 向 J 逼近时則得到的是 P_0、P_1 和 S_1 的强度之和。用上标表示从相应的区域向 J 逼近时所得之值，应有

$$\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}^{(4)}, \quad \sigma_{ij}^{(3)}\cdot\mathbf{k} = \sigma_{ij}^{(4)}\cdot\mathbf{k}, \tag{14a,b}$$

其中 $\mathbf{k}$ 表示沿 x_3 的单位向量。(14a, b) 也可写为

$$\{\mathbf{v}^{(3)} - \mathbf{v}^{(2)}\} + \{\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\} + \{\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(0)}\} = \{\mathbf{v}^{(4)} - \mathbf{v}^{(5)}\} + \{\mathbf{v}^{(5)} - \mathbf{v}^{(0)}\}, \tag{15a}$$

$$\begin{aligned}&\{\sigma_{ij}^{(3)} - \sigma_{ij}^{(2)}\}\cdot\mathbf{k} + \{\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}\}\cdot\mathbf{k} + \{\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(0)}\}\cdot\mathbf{k} =\\ &= \{\sigma_{ij}^{(4)} - \sigma_{ij}^{(5)}\}\cdot\mathbf{k} + \{\sigma_{ij}^{(5)} - \sigma_{ij}^{(0)}\}\cdot\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{15b}$$

(15a, b) 中每个花括号内的量显然代表相应的波所引起的間断。前面已証明过，波面上

的应力和速度間断对于縱波全部可通过其体积应变的間断来表示，而对于橫波則全部可通过其轉动的間断表示． 如果用 $\Delta^{(0)}$, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 分別表示 P_0, P_1, P_2, S_1, S_2 的強度（$\Delta^{(0)}$ 为已知），則从（15a, b）可得到关于 $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 等八个未知量的六个方程，再加上橫波的条件 $\boldsymbol{\omega}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\nu}_{S1}=\boldsymbol{\omega}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\nu}_{S2}=0$（$\boldsymbol{\nu}_{S1}$ 及 $\boldsymbol{\nu}_{S2}$ 分別表示 S_1 及 S_2 在 J 点的法綫），卽可解出全部八个未知量，經过計算可得 $\omega_1^{(1)}=\omega_3^{(1)}=\omega_1^{(2)}=\omega_3^{(2)}=0$，这表示 S_1 和 S_2 波面上的速度是在入射平面內，卽和平面波的情况完全相同．其余四个未知量 $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\omega_2^{(1)}$ 和 $\omega_2^{(2)}$ 則与 $\Delta^{(0)}$ 成正比，比例系数則可以証明和一般著作中所討論的平面諧和波自平界面反射和折射时的相应系数完全相同．事实上，設 $\boldsymbol{\nu}(l_1, l_2, l_3)$ 表示波面的单位法綫，則对于平面諧和縱波 $\varphi=\varphi_0 e^{ip\left(\frac{l_i x_i}{a}-t\right)}$ 有下列关系

$$v_i=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x_i}=-a l_i\Delta \quad (\Delta=\nabla^2\varphi), \tag{16a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}=-\frac{l_j}{a}v_i; \tag{17a}$$

而对于平面諧和橫波 $\psi=\psi_0 e^{ip\left(\frac{l_i x_i}{b}-t\right)}$ 則有

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}=2b\,(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}) \qquad \left(\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\nabla^2\boldsymbol{\psi}\right), \tag{16b}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\boldsymbol{\psi})_i=-\frac{l_j}{b}v_i. \tag{17b}$$

(16a, b) 和 (17a, b) 跟前面导出的波头关系 (5a, b) 和 (3) 完全相同．取諧波的入射平面为 (x_1, x_3)，平界面为 (x_1, x_2)，則附图中之 P_0, P_1, S_1, P_2, S_2 可看成是入射、反射和折射的諧波，此时 Snell 定律(13)自然仍成立，在平界面 (x_1, x_2) 上的速度和应力連續条件写出后和由(15a, b)得到的完全一样，因此在这两种情况下的解 $\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(0)}}$, $\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta^{(0)}}$, $\frac{\omega_2^{(1)}}{\Delta_0}$, $\frac{\omega_2^{(2)}}{\Delta_0}$ 也完全相同．显而易見，如果入射的波是非定常的橫波，以及界面是自由或固定的情况，非定常波反射和折射时波头的強度和相应的諧和平面波情况也完全相同．这使得我們对非定常波反射和折射时計算波头的強度很方便，直接引用平面諧和波的結果卽可．

参 考 文 献

[1] Keller, J. B., Geometrical accoustics, I. The theory of weak shock waves, *Jour. Appl. Phys.*, **25**, 1954, 938.

[2] Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed., 295—297.

[3] Кочин, Н. Е. 著，史福培等譯，向量計算及张量計算初步，1956.

[4] Смирнов, В. И. 著，孙念增等譯，高等数学教程，第 2 卷，§ 128.

GEOMETRICAL OPTICS ANALOGY OF UNSTEADY ELASTIC WAVES

Shi Po-ming

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)