第6卷 第1期
1963年3月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 6, No. 1
March, 1963

各向同性夹层板反对称小挠度的若干問題*1)

胡 海 昌
(中国科学院力学研究所)

提 要

本文首先把各向同性夹层板的反对称小挠度問題(E. Reissner[1]的理論)归結为求解两个位移函数 ω 和 f. 这里 ω 滿足一个四阶微分方程,而 f 滿足一个两阶微分方程. 接着証明,对于周边簡支的多角形夹层板,f 恆等于零,并进一步指出 ω 与同样形状的单层薄板的挠度 w_0 的关系. 利用这个关系使人有可能从許多单层薄板的已知解答导出相应的夹层板問題的解答.

一、引 言

夹层板是一种新的板状結构元件,它具有刚度大重量輕的优点,因此为航空及其他技术部門日益广泛地采用. 有关夹层板的理論已提出过許多种. 1947年 E. Reissner[1] 曾提出过各向同性夹层板的一种理論. 接着, А. П. Прусаков[2] 和杜庆华[3]提出了顾及表板抗弯刚度和整块板的厚度变化的夹层板理論2). А. П. Прусаков, 杜庆华及以后其他作者的研究表明,在三层板的横向弯曲和反对称失稳問題中,表板的抗弯刚度和整块板的厚度变化可以忽略不計.

E. Reissner[1] 的夹层板理論虽已提出十余年了,但是由于基本方程的复杂性,根据它解出的实际問題还是很少(大部分已解出的問題的解答收集在文献[4]中). 所以为了更有效地求解具体問題,有必要先将基本方程轉換成簡单整齐的形式. 在无外載荷的情况,E. Reissner[1,5]仿照扭轉問題中引进应力函数的办法,把齐次方程的解用三个調和函数(其中两个互为共軛)和一个波动方程的解表示出来. 但是他的方法不能用到有載荷的情况,更不能推广到有預加的板向力的情况. 本文仿照我們以前的方法[6],把各向同性夹层板的反对称小挠度問題归結为求解两个位移函数 ω 和 f. 这里 ω 滿足一个四阶微分方程,而 f 滿足一个两阶微分方程. 接着我們証明,对于周边簡支的多角形板,f 恆等于零,并进一步指出 ω 与同样形状的单层薄板的挠度 w_0 的关系. 利用这个关系,使我們有可能从許多单层薄板的已知解答导出相应的夹层板問題的解答.

---

* 1962年11月6日收到.

1) 本文初稿曾在1962年10月中国力学学会板壳理論学术討論会上宣讀过. 現在根据会上的意見作了局部的修改与补充.

2) 在这两个理論中还曾考慮到其他一些因素,如各向异性和非綫性項. 由于本文的目的不在探討基本理論,所以不作詳細交待了.

二、記号的意义

C——抗剪刚度.

D——抗弯刚度.

M_x, M_y, M_{xy}——x, y 坐标系中的弯矩与扭矩.

M_n——边界上的法向弯矩.

N_x, N_y, N_{xy}——板平面内的内力.

n——边界法綫方向.

Q_x, Q_y——横向剪力.

q——横向载荷.

s——边界的切綫方向.

u, v——x、y 軸向的位移.

w——撓度.

x, y, z——直角坐标.

ν——Poisson 系数.

ψ_x, ψ_y——变形前与中面垂直的綫段在 xz 及 yz 平面内的轉动.

ψ_n, ψ_s——变形前与中面垂直的綫段在 nz 及 sz 平面内的轉动.

ω, f——见公式(14).

三、基本方程和它的两类特解

考虑一块各向同性的三层板的平衡和稳定問題. 我們采用文献[1]中的理論, 在这理論中补充上必要的項, 并适当地改变一些記号, 便可得到基本方程如下:

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= -D\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right), \\
M_y &= -D\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right), \\
M_{xy} &= -\frac{1}{2} D(1-\nu)\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right), \\
Q_x &= C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right), \\
Q_y &= C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0, \\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

方程(1)是联系广义内力与广义位移的关系式, 方程(2)是平衡条件. 将(1)代入(2), 經过簡化后得到以广义位移表示的平衡方程如下:

$$
\left.\begin{aligned}
&D\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\right)=0,\\
&D\left(\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)+C\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\right)=0,
\end{aligned}\right\}\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
C&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)+\\
&\qquad+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+q=0.
\end{aligned}\tag{4}
$$

方程(1)—(4)实質上与 Б. Ф. Власов[7] 及 С. А. Амбарцумян[8] 的考慮剪应变的板的理論相同；而如果在方程(1)的前两个式子中各加上与外載荷 q 有关的項，又与 E. Reissner[5,1] 的考慮剪应变的板的理論相同．所以方程(1)—(4)的适用范围实际上不限于夹层板．

在文献[6]中曾介紹过一个方法，怎样把滿足两个齐次方程的三个函数用一个函数表达出来．将这个方法应用到方程(3)，便可将 ψ_x, ψ_y, w 用一个函数 ω 表示如下：

$$
\psi_x=\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad \psi_y=\frac{\partial\omega}{\partial y},
$$
$$
w=\omega-\frac{D}{C}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right).\tag{5}
$$

将(5)代入(3)，可見这个表示式已經滿足了方程(3)．为了滿足方程(4)，只要 ω 滿足下列方程便可以了：

$$
D\nabla^2\nabla^2\omega-\left(N_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\omega-\frac{D}{C}\nabla^2\omega\right)=q.\tag{6}
$$

和文献[8]相似，算式(5)只包括方程(3)，(4)的一部分解，因此它只是特解而不是全解．

在 $q=0$ 的情况下，E. Reissner[1,5] 曾将齐次方程(3)，(4)的解用三个調和函数(其中两个互为共軛)和一个波动方程的通解表示出来．这里我們感兴趣的是其中与波动方程有关的一部分解．用代入驗算的办法不难証明，在 $q=0$ 的情况下，方程(3)，(4)的另一类特解可用一个函数 f 表示如下：

$$
\psi_x=\frac{\partial f}{\partial y},\quad \psi_y=-\frac{\partial f}{\partial x},\quad w=0;\tag{7}
$$

而函数 f 滿足下列方程：

$$
\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-Cf=0.\tag{8}
$$

由算式(5)，(7)表示的两类特解，各有自己的变形特点．对于第一类特解，从算式(5)可知

$$
\frac{\partial\psi_x}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial x}=0.\tag{9}
$$

我們知道板内各点在 x, y 軸向的位移为

$$
u=-z\psi_x,\quad v=-z\psi_y.\tag{10}
$$

由此可知对于第一类特解

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{11}$$

此式表明在 xy 平面内的平均轉动(即繞 z 軸的平均轉动)为零. 所以第一类特解可簡单地称为无轉动的变形.

对于第二类特解,从算式(7)可知

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial \psi_y}{\partial y}=0. \tag{12}$$

利用(10)式后便有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{13}$$

此式表示对于第二类的特解,与 xy 面平行的面积沒有变化. 因此第二类特解可簡单地称为面积不变的变形.

四、基本方程的全解

上面我們求得了基本方程(3),(4)的两类特解. 本节我們要証明,上述两类特解之和便是方程(3),(4)的全解. 这就是說,方程(3),(4)的解总可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\psi_x=\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\quad \psi_y=\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x},\\&W=\omega-\frac{D}{C}\nabla^2\omega,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

而 ω 与 f 分別滿足方程(6)和(8).

为了証明这一点,我們首先注意到,不論 ψ_x、ψ_y 是怎样的函数,我們总可以用某两个函数 ω 和 f 表示如下:

$$\psi_x=\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\quad \psi_y=\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{15}$$

这种表示法不是唯一的, 也就是說在給定 ψ_x, ψ_y 后根据(15)去找 ω 和 f, 可以不止得到一組解,这是因为齐次方程

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial x}+\frac{\partial f_0}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \omega_0}{\partial y}-\frac{\partial f_0}{\partial x}=0 \tag{16}$$

有解存在. 方程(16)的解可用一个复变函数 $\varphi(x+iy)$ 表示如下:

$$f_0+i\omega_0=\varphi(x+iy). \tag{17}$$

显然可見,若将 ω 增加一个 ω_0,同时将 f 增加一个 f_0,不会改变 ψ_x 与 ψ_y 的值.

由于 ψ_x, ψ_y, w 滿足方程(3),所以将(15)代入方程(3)后可知 ω, f, w 必滿足方程:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}[D\nabla^2\omega+C(w-\omega)]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2 f-Cf\right]=0,\\&\frac{\partial}{\partial y}[D\nabla^2\omega+C(w-\omega)]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2 f-Cf\right]=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

把这組方程中的两个方括号內的函数看作两个独立的函数, 那末方程(18)便是 Cauchy-Riemann 方程,它的解可以用一个复变函数 $F(x+iy)$ 来表示. 这样我們便得到

$$\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2 f - Cf + i[D\nabla^2\omega + C(w-\omega)] = F(x+iy). \tag{19}$$

这是 f, ω 与 w 的非齐次微分方程，它的解可表示为任一特解与相应的齐次方程的全解之和. 注意到 $F(x+iy)$ 的实数和虚数部分都是调和函数，可見方程(19)的特解可取为

$$f_1 + i\omega_1 = -\frac{1}{C}F(x+iy), \quad w_1 = 0. \tag{20}$$

而与(19)相应的齐次方程为

$$\begin{aligned} &\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2 f - Cf = 0, \\ &D\nabla^2\omega + C(w-\omega) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

特解(20)不产生挠度，同时也不引起法綫的轉动 ψ_x, ψ_y. 因此它是无足輕重的可忽略的一組解. 这样只要把 f, ω 与 w 理解为满足齐次方程(21)的函数便可以了. 从(21)的第二个方程我們得到(14)的第三个式子，而(21)的第一个方程已經就是方程(8). 将算式(14)代入方程(4)，化簡后便得到方程(6).

这样便証明了本节开头提出的論断.

五、边界簡支的多角形板

考虑一块边界为直綫段組成的多角形(三角形、四角形等)板. 設板边都是簡支的，于是边界条件为：

在边界上：

$$w = 0, \ M_n = 0, \ \psi_s = 0. \tag{22}$$

由于边界是直綫，所以

$$M_n = -D\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial n} + \nu\frac{\partial\psi_s}{\partial s}\right) = 0.$$

利用(22)的第三个条件，可知 $\partial\psi_s/\partial s = 0$，因此边界条件可簡化为

在边界上：

$$w = 0, \ \frac{\partial\psi_n}{\partial n} = 0, \ \psi_s = 0. \tag{23}$$

从公式(14)可以导得

$$\psi_n = \frac{\partial\omega}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial s}, \quad \psi_s = \frac{\partial\omega}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial n}. \tag{24}$$

因此边界条件又可写成为在边界上

$$\left.\begin{aligned} &\omega - \frac{D}{C}\nabla^2\omega = 0, \ \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial n\partial s} = 0, \\ &\frac{\partial\omega}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

这組边界条件最后又可簡化为

在边界上：

$$\omega = 0, \ \nabla^2\omega = 0, \ \frac{\partial f}{\partial n} = 0. \tag{26}$$

函数 f 满足方程(8)和条件(26)的第三个，因此可見在本問題中

$$f \equiv 0. \tag{27}$$

这样，需要我們决定的只有一个函数 ω，它满足方程(6)与边界条件(26)的前两个条件.

現在我們来討論簡支多角形板的几种特殊的受力情况.

先来考虑只有横向載荷 q 而无板向內力的情况. 这时由于 $N_x = N_y = N_{xy} = 0$，方程(6)和条件(26)簡化为

$$\left.\begin{aligned} &D\nabla^2\nabla^2\omega = q, \\ \text{在边界上:}\quad &\omega = 0,\ \nabla^2\omega = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

这个方程与边界条件，跟具有同样形状和同样抗弯刚度的簡支单层板(薄板)在同样載荷作用下所产生的挠度所满足的方程与边界条件相同. 命 $w_0(x, y)$ 为相应的单层板的挠度，那么便有

$$\omega = w_0. \tag{29}$$

将此式代入公式(14)計算 ϕ_x, ϕ_y 与 w，然后再代入公式(1)計算內力，得到

$$\left.\begin{aligned} w &= w_0 - \frac{D}{C}\nabla^2 w_0, \\ M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}, \\ Q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w_0, \\ Q_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w_0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

这些公式表明，內力分布与相应的单层薄板中的內力分布相同，只有挠度稍有差别.

利用公式(29)我們可以将簡支多角形三层板的問題化为一个相应的单层板的問題. 这样无論在作計算或模拟实驗方面都很有用. 例如，对于单层薄板，現在已得到了正三角形、等腰直角三角形和矩形板的精确解，以及某种三角形、梯形和平行四边形板的近似解. 从这些解出发，我們立即可以得到相应的三层板的解. 在 1950 年 E. Reissner[9] 曾求得四边簡支的矩形夹层板在均匀載荷作用下的重三角級数解. 从本文的对比关系看来，这种推导是根本不必要的.

再来考虑三层板在四周等压力作用下的稳定性. 在这种場合，$N_x = N_y = -P$，$N_{xy} = 0$，$q = 0$，因此 ω 的方程与边界条件化为

$$\left.\begin{aligned} &D\left(1 - \frac{P}{C}\right)\nabla^2\nabla^2\omega + P\nabla^2\omega = 0, \\ \text{在边界上:}\quad &\omega = 0,\ \nabla^2\omega = 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

命相应的单层薄板在周向均匀压力作用下的临界力为 P_0，失稳后的挠度为 w_0. w_0 与 P_0 满足下列方程与边界条件:

在边界上:
$$\left.\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w_0 + P_0\nabla^2 w_0 = 0,\\ w_0 = 0,\ \nabla^2 w_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

对比方程(30)与(31)可以看到

$$P = \frac{P_0}{1+\dfrac{P_0}{C}}, \tag{32}$$

所以在周向均匀压力的情况下，求三层板的临界力可以簡单地归結为求相应的单层薄板的临界力.

上面我們討論了两种特殊的受力情况. 对于其他的受力情况，可以进行类似的分析.

六、討　論

将两个函数 ψ_x, ψ_y 按公式(15)用另外两个函数 ω, f 表示出来，这总是可能的. 而 ω 与 f 的方程(仅指微分方程，不包括边界条件)能够彼此分离的根本原因在于 xy 平面是物体的各向同性面. 这一点实际上在文献[6]中已經作了証明. 由此可知，表达式(15)还可以用于簡化各向同性夹层板的振动方程和热应力方程，并且在方程中还允許考虑表板的抗弯刚度和部分非綫性項.

参　考　文　献

[1] Reissner, E., On bending of elastic plates, *Quart. Appl. Math.*, **5**, 1947, 55—68.

[2] Прусаков, А. П., Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем, *Прикл. Мат. Мех.*, **15**, 1951, 27—36.

[3] 杜庆华，三合板的一般弹性理論，物理学报，**10**，1954，395—411.

[4] Александров, А. Я., Брюккер, Л. Э., Куршин, Л. М., Прусаков, А. П., Расчет трехслойных панелей, Оборонгиз, 1960.

[5] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Jour. Appl. Mech.*, **12**, 1945, A69—A77.

[6] 胡海昌，横观各向同性体的弹性力学的空間問題，物理学报，**9**，1953，130—144.

[7] Власов, Б. Ф., Об уравнениях теории изгиба пластинок, *Изв. АН СССР, ОТН*, 12, 1957, 57—60.

[8] Амбарчумян, С. А., К теории изгиба анизотропных пластинок, *Изв. АН СССР, ОТН*, 5, 1958, 69—77.

[9] Reissner, E., Small bending and stretching of sandwich-type shells, *NACA Rep.*, No. 975, 1950.

ON SOME PROBLEMS OF THE ANTISYMETRICAL SMALL DEFLECTION OF ISOTROPIC SANDWICH PLATES

HU HAI-CHANG
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the problem of the antisymmetrical small deflection of isotropic sandwich plates (in the theory of E. Reissner[1]) is reduced to the solution of two displacement-functions ω and f, where ω satisfies a differential equation of fourth order, and f satisfies a differential equation of second order. For a simply supported polygonal sandwich plates, it is proved that f vanishes identically, and the relation between ω and the deflection w_0 of a similar single-layered thin plates is established. By this relation, the solutions of a class of problems of sandwich plates may be derived from the corresponding solutions of single-layered thin plates.