

論地震所激起而作用于水坝上的流体 动压力及地震激起的流体表面波*

陈振誠

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文在总结前人工作的基础上提出了更为普遍的解,并将所得结果作了分析,得到下列几个结论:

1. 证实了以前被人们忽略掉的地面垂直振动对流体动压力的影响是不能忽视的;
2. 给出了重力和流体表面波对流体动载荷影响的定量数据,证实了当 Qh 很大时,对于平面问题的水平振动部分, M. Westergaard 和 Л. С. Лейбензон 的解在工程实践中是可用的;
3. 指出了畑野正给出的数据和压力分布图及其结论是不对的;
4. 指出了 Ш. Г. Напетвардэ 的工作在问题的提法上有不妥之处;
5. 提出了在试验工作中应如何对付模拟实物时难以处理的重力影响的建议;
6. 给出了计算流体自由表面涌高的公式。

一、问题的提法

关于研究地震作用下流体压力沿着水坝分布的规律,1933年 M. Westergaard^[1] 提出了这个问题的解法。他处理了水平谐和振动的情况,根据他的最后结果可以导出相当于不可压缩流体作用于坝面上的流体动压力振幅

$$p_0^* = -0.81\omega V_1 h \rho \sum_{n=1,3}^{\infty} \sin C_n y / n^2 \quad \left(C_n = \frac{n\pi}{2h} \right), \quad (1.1)$$

式中 $\rho = \omega_0/g$ 为流体密度。由此可以作出 p_0^* 沿着坝面的分布图如图1所示。从图1可以看出,在某个给定的 u_1 和 h 值下,流体动压力随着振动周期的变小,即随着 ω 的增大而迅速增长,其中 $u_1 = V_1/\omega$ 为地面的水平位移振幅。在 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 处为解的奇点,因为他给出

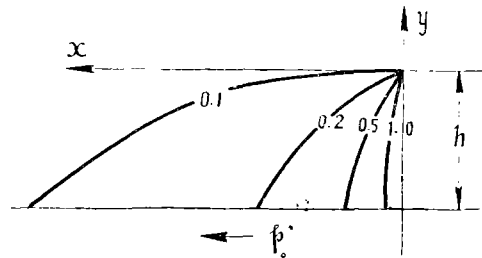


图 1

$$\eta_{y=1} = -\frac{2r}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4h} \quad \left(r = \frac{\alpha g T^2}{4\pi^2} \right), \quad (1.2)$$

* 1961年7月6日收到。

式中 η 为水分子在 y 方向的位移, T 为地面振动周期, $\alpha = V_1\omega/g$.

1935 年 Л. С. Лейбензон^[2] 也考虑了水平谐振和振动的情况. 在假定流体为理想不可压缩的情况下他给出了

$$\varphi(x, y, t) = -\sin \omega t \sum_{n=1,3}^{\infty} A_n e^{-C_n x} \sin C_n y, \quad (1.3)$$

式中 $A_n = -8V_1 h / (n\pi)^2$. 由(1.3)可得, 在 $x = 0$ 处

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \cos \omega t \sum_{n=1,3}^{\infty} A_n \sin C_n y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\sin \omega t \sum_{n=1,3}^{\infty} A_n C_n \cos C_n y. \quad (1.4)$$

从(1.4)可得与(1.1)相同的 p_0^* . 在 $y \rightarrow 0$ 处 $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \rightarrow \infty$, 因而也是解的奇点. 虽然动水压力的解答和著作[1]相同, 但 Л. С. Лейбензон 首先提出了在研究弹性坝体的自震频率时, 应该考虑动水压力对于坝自震频率影响的理论计算公式.

1949 年畑野正^[3] 在考虑表面波影响的情况下对这个問題作了解答. 他给出相应于 $K = \infty$ 时作用于坝和流体接触面上的流体动载荷振幅为

$$p_0^* = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_1\omega}{\gamma'_n} \rho \frac{\sin \gamma'_n h}{\sin 2\gamma'_n h + 2\gamma'_n h} \cos \gamma'_n (y + h), \quad (1.5)$$

式中 γ'_n 为超越方程 $\gamma'_n \operatorname{tg} \gamma'_n h = -\omega^2/g$ 的根. 他给出了数字计算数据, 并给出了相当于(1.5)的压力分布图如图 2 所示. 他还得到了

如下结论: 动水压力随着周期的变小而逐渐变小, 并随着高度呈正负交替的变化, 于是成为复杂的曲线. 图 2 中的数字表示地震的周期^[3].

1955 年 Ш. Г. Напетваридзе^[4] 不考虑流体的运动, 而只考虑水坝自身的振动来求得动力系数, 然后将三角形分布的流体静压力乘上这一系数而作为流体的动压力.

1958 年钱令希、邱大洪^[5] 提出了测量倾斜坝水接触面上流体动载荷的试验方案. 1959 年 М. Т. Уразбаев^[6] 也提出了自己的研究结果.

从图 1 和 2 看出, 由于问题提法的不同而导出了差异较大的结果. 所有以前的著作中都没有考虑地面垂直振动对流体动压力的影响, 没有给出重力对动载荷影响的定量数据. 本文考虑了表面波的影响和地面的垂直振动, 并在运动着的边界上满足了边界条件, 最后给出了计算流体动压力的公式, 从而提出了在一定条件下应当考虑地面垂直振动必要性的理论依据; 对前人的工作作了一些比较, 论证了表面波和重力对流体动压力影响的范围. 从而提出了在工程实践中, 采用何种公式来计算由于地面横向振动所激起而作用于水坝上的流体动压力较为合适的建议, 并提出了模型试验中如何处理 g 对流体动载荷的影响的建议; 另外还给出了流体表面波方程, 从而可以计算流体在坝附近的涌高.

二、地表面振动时所激起的流体动压力及流体表面波

设直角坐标系的 $x = u_1(t)$ 平面是坝和流体的接触面, 平面 $y = u_2(t)$, $y = u_2(t) - h$

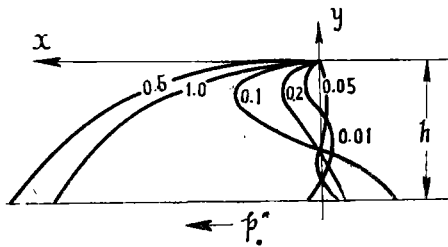


图 2

分别为流体的自由表面和处于水下的地面; 以条件 $x \geq u_1(t)$, $u_2(t) - h \leq y \leq u_2(t)$, $-\infty \leq z \leq \infty$ 限制着的空间部分充满着流体; 地表面以速度 $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ 振动着, $\mathbf{V}(t)$ 是 xy 平面中和水平面成倾角 θ 的矢量; $u_1(t) = u(t) \cos \theta$, $u_2(t) = u(t) \sin \theta$, 而 $u(t) = \int_0^t \mathbf{V}(\tau) d\tau$ 是地表面的位移. 假定水坝的弯曲变形对流体运动的影响是可以忽略的, 并且假定流体是理想不可压缩的. 现在我们来研究 $\mathbf{V}(t) = 0$ ($t < 0$), $\mathbf{V}(t) = V_0 \cos \omega t$ ($t \geq 0$) 的情况. 这时 $u(t) = u_0 \sin \omega t$.

这一情况意味着, 地表面由于地震而突然取得了初始速度 V_0 , 也就是地面和水坝突然向流体作用了一个速度为 V_0 的初始冲量, 然后地面按照 $\mathbf{V}(t) = V_0 \cos \omega t$ 的规律振动着. 这样我们就有问题的初始条件

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ 时:} \\ \frac{\partial \varphi(x, 0, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(0, y, 0)}{\partial x} = V_1, \\ \frac{\partial \varphi(x, -h, 0)}{\partial y} = V_2; \end{aligned} \quad (2.1)$$

而问题的边界条件是

$$t > 0 \text{ 时:} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_1 \cos \omega t, \quad \text{在 } x = u_1 \sin \omega t \text{ 处;} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_2 \cos \omega t, \quad \text{在 } y = u_2 \sin \omega t - h \text{ 处;} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \text{在 } y = u_2 \sin \omega t \text{ 处;} \quad (2.4)$$

$$\text{没有从 } \infty \text{ 向 } x = 0 \text{ 方向传来的波动,} \quad (2.5)$$

式中 $V_1 = V_0 \cos \theta$, $V_2 = V_0 \sin \theta$, $u_1 = u_0 \cos \theta$, $u_2 = u_0 \sin \theta$.

引入满足 Laplace 方程 $\Delta \varphi = 0$ 的流体速度势

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = \cos \omega t \int_0^\infty [A(\alpha) \cos \alpha Y + B(\alpha) \sin \alpha Y] e^{-\alpha X} d\alpha + \\ + \cos \omega t \int_0^\infty [C(k) \operatorname{ch} k(Y+h) + D(k) \operatorname{sh} kY] \cos kX dk, \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中 $X = x - u_1 \sin \omega t$, $Y = y - u_2 \sin \omega t$, $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(k)$, $D(k)$ 分别为 α 或 k 的任意函数. 将 $\varphi(x, y, t)$ 代入边界条件(2.4)中, 并忽略掉速度的二阶小量, 我们得到

$$QA(\alpha) = \alpha B(\alpha), \quad (kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)C(k) = -kgD(k), \quad (2.7)$$

式中 $Q = \omega^2/g$. 满足边界条件(2.2), 我们得到

$$-\int_0^\infty \frac{B(\alpha)}{Q} [\alpha \cos \alpha Y + Q \sin \alpha Y] \alpha d\alpha = V_1. \quad (2.8)$$

引入新变量 $\lambda = (\alpha/Q)^2$, $Y = -v$, 按照著作[7]那样处理, 即可求得

$$B(\alpha) = \frac{2Q\Gamma_1 [Q(1 - \cos ah) - \alpha \sin ah]}{\pi \alpha^2 (\alpha^2 + Q^2)}. \quad (2.9)$$

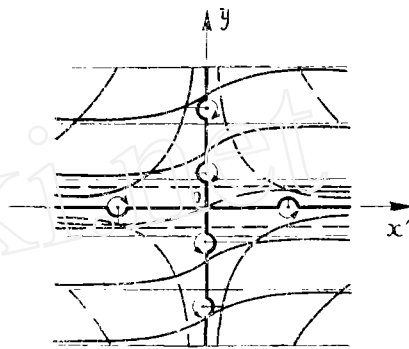


图 3

从满足边界条件(2.3)我們得到另一个积分方程

$$\int_0^{\infty} D(k) k \operatorname{ch} kh \cos kY dk + \frac{2V_1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\alpha) M(\alpha) e^{-\alpha Y} d\alpha = V_2, \quad (2.10)$$

式中 $G(\alpha) = \pi B(\alpha)/2V_1Q$, $M(\alpha) = \alpha(\alpha \sin ah + Q \cos ah)$. 再从(2.10)可以求得

$$D(k) = \frac{V_2 \delta(k)}{k \operatorname{ch} kh} - \frac{4V_1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{G(\alpha) M(\alpha) \alpha}{k \operatorname{ch} kh} d\alpha, \quad (2.11)$$

式中 $\delta(k) = \frac{2}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sin kl}{k}$ 为 δ 函数.

现在来分析流体动压力. 把 $\varphi(x, y, t)$ 对 t 微分一次. 在 $x = u_1 \sin \omega t$ 处, 我們有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \frac{4V_1}{\pi^2} \iint_0^{\infty} \frac{f(\alpha) M(\alpha)}{\alpha(\alpha^2 + Q^2) k \operatorname{ch} kh} \left\{ \operatorname{sh} kY \omega \sin \omega t + V_2 \cos^2 \omega t k \operatorname{ch} kY - \right. \\ & \left. - \frac{kg}{k g \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh} [\operatorname{ch} k(Y+h) \omega \sin \omega t + V_2 \cos^2 \omega t k \operatorname{sh} k(Y+h)] \right\} d\alpha dk - \\ & - \frac{2V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha^2(\alpha^2 + Q^2)} \{ F(\alpha, Y) [\omega \sin \omega t - V_2 \cos^2 \omega t \alpha] - V_2 \alpha \cos^2 \omega t (\alpha \sin \alpha Y - \\ & - Q \cos \alpha Y) \} d\alpha - V_2 \omega \sin \omega t Y - u_2 g \sin \omega t - V_2^2 \cos^2 \omega t, \end{aligned} \quad (2.12)$$

式中 $f(\alpha) = [Q(1 - \cos ah) - \alpha \sin ah]$, $F(\alpha, Y) = \alpha \cos \alpha Y + Q \sin \alpha Y$. 在计算上述的二重积分时, 先对 α 积分. 当对变数 k 积分时, 如被积函数为奇函数, 则取线路(1), 如图4所示. 将所有的积分计算结果代入(2.12)并加以整理后 (应注意到线路图4是处于图3所示的复平面上的) 可得, 在 $x = u_1 \sin \omega t$ 处

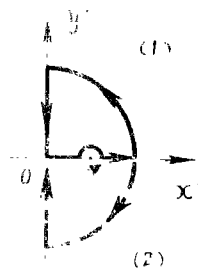


图 4

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & -2V_1 \omega Q h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^+ \cos[\gamma_n(Y+h)/h] \sin \omega t}{\gamma_n [\gamma_n^2 - (1-Qh)Qh] \cos \gamma_n} - \\ & - V_2 \omega Y \sin \omega t - u_2 g \sin \omega t - \\ & - 2V_1 V_2 Q h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^+ \sin[\gamma_n(Y+h)/h] \cos^2 \omega t}{[\gamma_n^2 - (1-Qh)Qh] \cos \gamma_n} - \\ & - V_2^2 [1 - 2(1 - e^{-Qh})e^{-QY}] \cos^2 \omega t - V_2^2 \cos^2 \omega t, \end{aligned} \quad (2.13)$$

($C_n^+ = 1 - C_n^-$, 而 $C_n^- = 2R_0 \gamma_n^2 / (\gamma_n^2 + Q^2 h^2) \cos \gamma_n$),

式中 $R_0 = (1 - e^{-Qh})e^{-Qh}$.

将 $\varphi(x, y, t)$ 对 y 微分, 在 $x = u_1 \sin \omega t$ 处, 我們有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = & \frac{2V_1}{\pi} \cos \omega t \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha) [Q \cos \alpha Y - \alpha \sin \alpha Y]}{\alpha(\alpha^2 + Q^2)} d\alpha - \\ & - \frac{4V_1}{\pi^2} \cos \omega t \iint_0^{\infty} \frac{R(\alpha) \operatorname{ch} kY d\alpha dk}{(\alpha^2 + k^2)(\alpha^2 + Q^2) \operatorname{ch} kh} + \\ & + \frac{4V_1}{\pi^2} g \iint_0^{\infty} \frac{R(\alpha) k \operatorname{sh} k(Y+h) d\alpha dk \cos \omega t}{(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh) \operatorname{ch} kh} + V_2 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.14)$$

式中 $R(\alpha) = f(\alpha)(\alpha \sin ah + Q \cos ah)$.

同样地用留数理论来计算(2.14). 积分的顺序和线路的选择同(2.12). 积分后我們

得到,在 $x = u_1 \sin \omega t$ 处

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2V_1 Q h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^+ \sin[\gamma_n(Y+h)/h]}{[\gamma_n^2 - (1-Qh)Qh]} \cos \gamma_n \omega t + V_2 \cos \omega t, \quad (2.15)$$

此外我們已知

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_1 \cos \omega t, \quad (2.16)$$

现在来研究流体表面波, 表面波的方程为

$$\zeta(x, t) = \frac{4\omega V_1}{\pi^2} \iint_0^{\infty} \frac{R(\alpha) \cos kX \sin \omega t d\alpha dk}{(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)} + u_2 \sin \omega t + \frac{2\omega V_1}{g\pi} \sin \omega t \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha(\alpha^2 + Q^2)} e^{-\alpha x} d\alpha, \quad (2.17)$$

用 η 表示(2.17)中的二重积分, 对变数 α 积分后, 我們有

$$\eta = \frac{Q\pi R_0}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(k, x, t) dk}{(k^2 - Q^2)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)} - \frac{\pi}{8i} \int_0^{\infty} \frac{[Q(1 - \operatorname{ch} kh) + k \operatorname{sh} kh] e^{-kh}}{k(k - Q)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)} J(x, k, t) dk, \quad (2.18)$$

式中

$$J(k, x, t) = \exp[i(\omega t + kX)] + \exp[i(\omega t - kX)] - \exp[-i(\omega t - kX)] - \exp[-i(\omega t + kX)].$$

象計算动压力时那样选择积分綫路, 并考虑积分綫路(2)和(4)(见图4和图5), 不过应注意, 在計算包含有 $J(x, k, t)$ 前二項的积分时, 該如图中实綫所示的那样繞道极点; 而对于包含有 $J(x, k, t)$ 后二項的积分, 則取如箭头所示的繞道^[8]. 还应注意, 綫路图5也是处于复平面图3上的. 經一系列的积分計算, 并将結果代入(2.17)中, 我們最后得到在 $t > 0$ 时的流体表面波方程为

$$\zeta(x, t) = \frac{2u_1 Q^2 h^2 C_s \cos \left[\frac{\gamma_s}{h} \left(X - \frac{\omega h}{\gamma_s} t \right) \right]}{(\gamma_s - Qh) [\gamma_s^2 + (1 - Qh)Qh] \operatorname{ch} \gamma_s} + u_2 \sin \omega t + 2u_1 Q^2 h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^+ \exp(-\gamma_n X/h)}{[\gamma_n^2 - (1 - Qh)Qh] \gamma_n} \sin \omega t, \quad (2.19)$$

式中

$$C_s = e^{-\gamma_s} - C'_s, \quad C'_s = 2R_0 \gamma_s / (\gamma_s + Qh).$$

由(2.19)可以看出, 在坝附近的流体表面随着水坝的振动而周期地升降. 由此而造成的表面前进波以速度 $\omega h / \gamma_s$ 由水坝附近向无穷远处传播, 其波长为 $2\pi h / \gamma_s$.

三、結果的比較

引入公式

$$\frac{p^*}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + g\zeta, \quad (3.1)$$

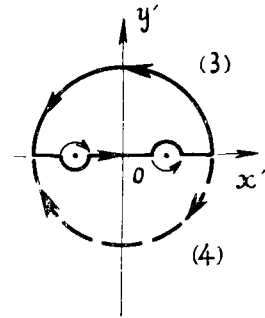


图 5

考虑地震时所出现的 ω 与 u_0 的数值和它们之间的关系, 将公式(2.13)与(2.15)、(2.16)比较就可以看出, (3.1)中的 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2$ 乃是可以略去的高阶小量. 于是, 我们就得到

$$p^* = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \zeta. \quad (3.2)$$

从这里我们看到本文所给出的解是处处严格的, 即使在坝与水面的连接处也并不出现解的奇点. 当 u_0 很小时, 从后面的计算(3.15)可以发现, (3.2)中的 $g\rho\zeta$ 为可以略去的小量, 这时就有

$$p^* = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.3)$$

比较(2.15)中的各项, 并略去高阶小量, 整理之后得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2u_0 g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[\gamma_n(Y+h)/h] \sin \omega t}{\gamma_n[\varepsilon^2 \gamma_n^2 - (\varepsilon - 1)] \cos \gamma_n} - \omega l^2 Y \sin \omega t, \quad (3.4)$$

从这里我们看到, 当 u_0 很小时, 可以在 $x=0$ 处满足坝-水接触面上的条件, 因为这时 u_0 是一阶小量, 式中 $\varepsilon = 1/Qh$. 从超越方程 $\gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = -Qh$, 可得

$$\cos \gamma_n = (-1)^n \varepsilon \gamma_n / \sqrt{1 + \varepsilon^2 \gamma_n^2}, \quad (3.5)$$

这样就可以将(3.4)式化简为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2\omega^2 u_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[\gamma_n(Y+h)/h]}{\gamma_n^2 (1-\lambda) \sqrt{\varepsilon^2 \gamma_n^2 + 1}} \sin \omega t - \omega l^2 Y \sin \omega t, \quad (3.6)$$

式中 $\lambda = \varepsilon/(1 + \varepsilon^2 \gamma_n^2)$. 如果无量纲量 Qh 相当大, 则 ε 和 λ 都是小量. 从图3可以看到, 这时有 $\gamma_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$. 如令 $\gamma_n = \left[\frac{(2n+1)}{2} \pi + \delta_n \right]$, $\frac{\pi}{2} > \delta_n > 0$, 此处 $n = 0, 1, 2, \dots$, 则可将超越方程(3.5)改写为

$$-\varepsilon \gamma_n (-1)^{n+1} \cos \delta_n = (-1)^n \sin \delta_n,$$

即

$$\varepsilon \gamma_n \cos \delta_n = \sin \delta_n, \quad (3.7)$$

从而有

$$\sin \delta_n = \varepsilon \gamma_n / \sqrt{1 + \varepsilon^2 \gamma_n^2}, \quad \delta_n = \sin^{-1} \varepsilon \gamma_n / \sqrt{1 + \varepsilon^2 \gamma_n^2}. \quad (3.8)$$

当 Qh 大到使 $(\varepsilon \gamma_n)^2$ 成为可以略去的高阶小量时,

$$\delta_n \approx \sin^{-1} \varepsilon \gamma_n = \varepsilon \gamma_n + \frac{(\varepsilon \gamma_n)^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 (\varepsilon \gamma_n)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (\varepsilon \gamma_n)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

从而我们有

$$\begin{aligned} \delta_n = \varepsilon \left[\frac{(2n+1)}{2} \pi + \delta_n \right] &\approx \frac{(\varepsilon \gamma_n)^2}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 (\varepsilon \gamma_n)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots, \\ \delta_n &\approx \frac{(2n+1)\pi\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \left[1 + \frac{\varepsilon^2 \gamma_n^3}{3(2n+1)\pi} + \frac{1 \cdot 3 \varepsilon^4 \gamma_n^5}{4 \cdot 5 (2n+1)\pi} + \dots \right]. \end{aligned}$$

考虑到这时 δ_n 为小量, 而 $\gamma_n \rightarrow \frac{2n+1}{2} \pi$, 则有

$$\delta_n \approx \frac{(2n+1)\pi\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \left[1 + \frac{(\varepsilon \gamma_n)^2}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 (\varepsilon \gamma_n)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (\varepsilon \gamma_n)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right], \quad (3.9)$$

假如我們要求解答准确到 1%, 而 $Qh = 1000$, 則从(3.9)式可以看到 δ_n 乃是可以略去的小量, 从而我們可将(3.6)式写成

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx -\frac{8}{\pi^2} \omega V_1 h \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin C_n Y}{n^2} \sin \omega t - \omega V_2 Y \sin \omega t. \quad (3.10)$$

从(3.10)我們知道, 当地面的垂直位移振幅和水平位移振幅相等时, 由垂直振动所激起的流体动压力的最大值(在坝底)为水平振动所引起的动压力的 1.35 倍. 从而我們证实, 考虑地面垂直振动对流体动压力的影响是必要的.

从(2.19)可以看到, 地面的垂直运动沒有引起水波. 这时我們有 $dp_2 = \rho V_2 \omega dy$, 积分之即得 $p_2 = \rho V_2 \omega y$, 它和(3.10)中的第二項相符. 但应指出, 若地表面波动时的波长不是趋于 ∞ , 則只能用上述严格的数学方法才能求出动压力, 此处的简单計算就不解决问题了.

据悉現有工程规范所采用的地震周期 T 为 1—0.1 秒, 而地面位移 $u_0 = 0.001—0.002$ 米. 我們取 $h = 200$ 米, 則流体靜压力为 $p^0 = -\rho gy$, 而 $p_{\max}^0 = 1960\rho$. 設 $\beta = p_0^*/p^0$, $W_0 = \omega^2 u_0$,

1) $T = 0.2$ 秒, $u_1 = u_2 = 0.002$ 米, $W_0 \approx 0.2g$, 則 $p_0^*(-h) = 688\rho$, $\beta = 35\%$, $p_0^*(-0.5h) = 438\rho$, $\beta = 45\%$, $p_0^*(-0.1h) = 178.9\rho$, $\beta = 91\%$;

2) $T = 0.1$ 秒, $u_1 = u_2 = 0.001$ 米, $W_0 \approx 0.4g$, 則 $p_0^*(-h) = 1376\rho$, $\beta = 70\%$, $p_0^*(-0.5h) = 876.6\rho$, $\beta = 90\%$, $p_0^*(-0.1h) = 357.7\rho$, $\beta = 182\%$;

3) $T = 0.2$ 秒, $u_1 = u_2 = 0.001$ 米, $W_0 \approx 0.1g$, 則 $p_0^*(-h) = 344\rho$, $\beta = 18\%$, $p_0^*(-0.5h) = 219\rho$, $\beta = 22\%$, $p_0^*(-0.1h) = 89.5\rho$, $\beta = 46\%$.

将 1), 2) 作出压力分布图 6, 7, 图中虛綫表示流体靜压力, 而实綫表示流体动載荷.

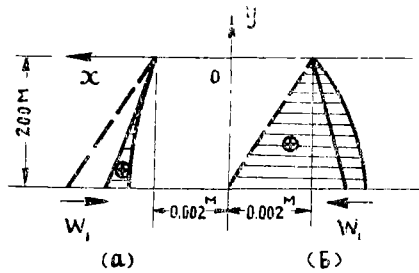


图 6

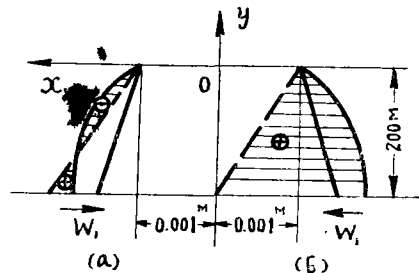


图 7

y 軸和实直綫夹成的部分为地面垂直振动所激起的流体动压力, 而实直綫和实曲綫围成的部分为横向振动所激起的流体动压力.

从(3.10)和图 6, 7 可以看見, 流体最大动压力出现在当水坝移至 $x = -u_1$ 处而取得迎水方向运动的最大加速度时, 这时坝体的惯性力也取得最大值. 坝体的最大惯性力、最大流体动压力和流体靜压力具有相同的方向. 三种力的迭加对坝体构成了最大的傾复力. 当水坝运动到 $x = u_1$ 处而取得离水方向运动的最大加速度时, 出現如图 7 中 (a) 所示的傾复力矩. 这种情况对坝身結構可能是頗不利的. 由此可見, 象著作[4]那样不从流体运动的規律着手来求流体的动压力, 可能是不恰当的.

令 $V_2 = 0$, 就可得到只考虑地面水平位移的解. 这时

$$\frac{p_0^*}{\rho} \approx -\frac{8}{\pi^2} \omega_1^2 h \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin C_n y}{n^2}. \quad (3.11)$$

应当注意, (3.11) 是从 (3.6), (3.10) 逐步通过近似分析导出的.

如果我们要求解答准确到 1% , 那么, 无量纲量 $Qh = 1000$ 时, 取 (3.11) 中级数的首 16 项即与 [1], [2] 的 (1.1) 首 16 项近似相等. 要注意的是 (1.1) 不包括 $y \rightarrow 0$ 的一小段, 因为该处是 [1], [2] 所给解的奇点. 从而我们证实, 当 $Qh \geq 1000$ 时, 采用 (3.11) 或 (1.1) 来计算由地面水平振动所激起的流体动载荷均可. 这时可以不考虑 g 的影响. 如果 $Qh < 1000$, 则要考虑 g 的影响而采用 (3.6) (令 $V_2 = 0$) 来计算地面水平振动所激起的流体动载荷.

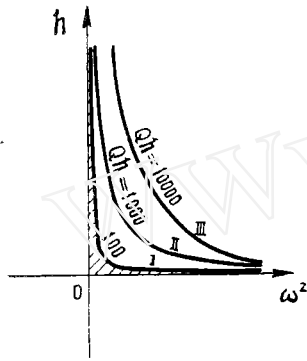


图 8

图 8 所示的是 Qh 曲线. 如果我们要求解答准确到 1% , 则当 Qh 值落在曲线 I 的左边时就需要考虑 g 的影响; 若落在右边则可不计及 g 的影响. 其余类推. 根据准确度的要求, 可以按 Qh 值列出一条界线以确定是否需要考虑 g 的影响, 这对模型试验工作是颇有意义的. 因为, 这样一来我们就有可能使 g 对流体动载荷的影响被排除在准确度的要求之外. 例如我们要模拟 $T = 0.1$ 秒的震动试验, 而准确度要求为 1% , 则当 $h \geq 2.5$ 米时即可排除 g 对 p^* 的影响; 如准确度为 1% , 则 $h \geq 0.25$ 米时即可不考虑 g . 总之, 根据试验要求使 Qh 落在图 8 曲线的右边就可以使模拟实物时难以处理的 g 排除出去.

比较压力分布图 1, 2, 6-(6), 7-(6), 可以看出图 2 及文献 [3] 的结论是不对的, 而且是定性上的不对. 让我们来检查 [3] 中的 (30) 式, 该文指出, 当坝高 h 较大时, 该文中公式 (32) 的第一项为可以忽略的小量; 而当 $K = \infty$ 时第二项不存在, 只留下如 (1.5) 所示的动压力公式. 让我们来检查一下公式 (1.5). 令 $kh = \gamma_n$, 则可将 (1.5) 改写为

$$p_0^* = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_1 \omega_1 h}{\gamma_n} \rho \frac{\sin \gamma_n}{\sin 2\gamma_n + 2\gamma_n} \cos[\gamma_n(y+h)/h], \quad (3.12)$$

γ_n 为方程 $\gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = -Qh$ 之根. 如果 Qh 很大, 则

$$p_0^* = -\frac{8}{\pi^2} \omega_1^2 h \rho \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin C_n y}{n^2} \quad (3.13)$$

与 (1.1), (3.11) 相同. 这样看来, 当 Qh 很大时, 著作 [3] 所采用的数学处理是收敛的. 因为这时已略去公式 (30) 中的一项, 而只留下最后一项. 这一项的特点是, 从式

$$\frac{d^2 Y_m}{dy^2} - k_m^2 Y_m = 0, \quad k_m \operatorname{tg} k_m h + \frac{\omega^2}{g} = 0,$$

可以证明

$$\int_{-h}^0 Y_m Y_n dy = 0, \quad m \neq n, \quad \text{其中} \quad \begin{cases} Y_m = 2Ae^{ik_m h} \cos k_m(y+h) \\ Y_n = 2Ae^{ik_n h} \cos k_n(y+h) \end{cases} \quad (3.14)$$

由此我们证实在 Qh 很大时, 著作 [3] 的结果近似地等于本文所给的 (3.11) 和著作 [1], [2] 所给的 (1.1). 这样看来, 压力分布图 2 和著作 [3] 所给的数字结果的差异可能是由于

解方程 $k \operatorname{tg} kh = -\omega^2/g$ 时或其他数字计算时的錯誤所引起的。

最后让我们来计算涌高。从(2.19)可以看到,当 Qh 很大时,等号右边的第一项是可以略去的小量。略去该项后即得,在 $x = u_1 \sin \omega t$ 处

$$\zeta_{\max} = \frac{4u_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n[\varepsilon^2 \gamma_n^2 - \varepsilon + 1]} \quad (3.15)$$

当 $Qh = 80000$, $T = 0.1$ 秒, $h = 200$ 米时,取 $n = 1, 3, \dots, 11251$, 则 $\zeta_{\max} = 5.288 \times \frac{4u_1}{\pi}$; 如 $T = 0.2$ 秒, $h = 200$ 米, 则 $Qh = 20000$, 取 $n = 1, 3, \dots, 6399$, 就有 $\zeta_{\max} = 5.01 \times \frac{4u_1}{\pi}$ 。从这里可以知道,对涌高影响最大的因素是 u_1 。如 u_1 不大,例如 $u_1 = 0.001$ 米,则显然 ζ_{\max} 是一个小量。如 u_1 较大,就有考虑 ζ_{\max} 的必要。如果 Qh 不大,则应按公式(2.19)计算 ζ_{\max} 。

附註。 在著作[7]第153页第二、三、四段中所給的数据有較大的誤差,一切均应以本文所給数据为准。这些誤差是由于逐次逼近求解方程 $\gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = -Qh$ 时的数字计算所引起的。因为在 Qh 较大时 $\gamma_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 在 $\frac{\pi}{2}$ 的邻域内 γ_n 的微小誤差会引起 $\operatorname{tg} \gamma_n$ 的很大誤差,从而对[7]中公式(23)的第一項的分母 $\cos \gamma_n$ 带来很大的影响。

本文所提問題是在 X. A. Рахматулин 和 Л. Н. Сретенский 等同志的指导下解决的[7,8]。在写成本文的过程中,郑哲敏同志提供了宝贵建議,解伯民同志提供了帮助,黄敦同志和作者一起討論过,描图工作由范桃卿同志帮助完成,数字计算工作中有黄丽仙同志的帮助,作者对他们衷心致謝。

参 考 文 献

- [1] Westergaard, M., Water pressures on dams during earthquakes, *Trans. ASCE.*, 1933.
- [2] Лейбензон, Л. С., О натуральных периодах колебаний плотины, подпирющей реку, Ученые Записки МГУ, № 2, 1935.
- [3] 畑野正, 地震力对重力坝的影响(地震时动水压力的正确解法), 日本土木学会志, 昭和 22, 23 年 论文集(水利譯丛, 3, 1957).
- [4] Напетваридзе, Ш. Г., Гидродинамическое давление при сейсмическом воздействии, Труды института строительства А. Н. Груз. ССР Тбилиси, 1955.
- [5] 錢令希, 邱大洪, 利用电模拟法计算挡水坝在滿庫时的自振頻率, 土木工程学报, 5, 2, 1958 年 4 月, 132—139.
- [6] Уразбаев, М. Т., Сейсмостойкость гидро-упругих систем, Строительная механика и расчёт сооружений, вып. 5, 1959.
- [7] 陈振誠, О динамическом давлении жидкости на плотину при землетрясении, *ПММ*, т. XXV, вып. 1, 1961.
- [8] Сретенский, Л. Н., О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению, *ПММ*, т. XX, вып. 3, 1956.
- [9] 陈振誠, О гидродинамическом давлении на плотину, вызванном её аперриодическими или импульсивными колебаниями и вертикальными колебаниями земной поверхности, *ПММ*, т. XXV, вып. 4, 1961.

К ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ НА ПЛОТИНУ, ВЫЗВАННОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕМ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ЖИДКОСТИ

Чень Чжень-чен

(Институт Механики АН КНР)

Резюме

Работа является попыткой проследить развитие теории гидродинамического давления на плотину при землетрясении и решении этой задачи с учётом влияния силы тяжести и вертикальных колебаний земной поверхности на гидродинамическую нагрузку плотины.

В работе конспективно излагаются работы^[1,2,3,4,5]. После решения задачи по новой постановке мы получим результат, который показывает, что вертикальные колебания земной поверхности, находящейся под жидкости, оказывают значительное влияние на гидродинамическую нагрузку плотины. Мы узнаем, что при большом Qh , где $Q = \omega^2/g$, ω —частота колебания земной поверхности, h —глубина жидкости, можно пренебречь влиянием силы тяжести на нагрузку плотины для плоской задачи. Показана область значений Qh , при которой надо учитывать влияние силы тяжести. Отсюда попытается предполагать инженерам для справедливого применения формулы при расчёте динамического давления жидкости на плотину, вызванного землетрясением, а также предполагать экспериментаторам для распоряжения “ g ” при моделировании в плоской задаче. Дана формула для расчёта повышенного размера поверхности жидкости вблизи плотины при землетрясении. Доказываются ошибки вычислений в работе^[3].