

研究简报

电磁流体管道流的进口段分析*

薛明伦

(中国科学院力学研究所)

提 要

最近有不少文章讨论了导电流体在横向磁场作用下管内完全发展流动的规律,例如文献[1]。但是在确定这些结果的实用范围之前,必须估计出进口段的长度,即管道从进口处开始,直到中心流速和完全发展流动的中心流速相差1%处那一段的长度。文献[2]曾考虑过这一问题,并应用 Rayleigh 近似得出了一个适用于大 Hartmann 数情况的估计。文献[3]则考虑了小 Hartmann 数的流动。本文利用 Langhaar 假设^[4,5]来处理了同一问题,原则上对 Hartmann 数的大小没有限制;给出了一些数值结果,并和文献[2, 3, 7]的结果作了比较。

考虑在横向磁场作用下的一根宽度为 $2L$ 的二元管道¹⁾。当磁 Reynolds 数 $\ll 1$ 时,层流运动的连续方程和动量方程是^[6]

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dW_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \sigma (E - \mu W_x H_0) H_0 + \nu \left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

对于管内流动,仿照 Langhaar 的基本假设^[4],令

$$\frac{dW_x}{dt} = \frac{\mu^2 \sigma H_0^2}{\rho} \beta^2 W_x. \quad (3)$$

而由于 $\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2}$, 故方程(2)可写成

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} - (1 + \beta^2) M^2 W_x = KM^2 \left(y' = \frac{y}{L} \right), \quad (4)$$

其中 β^2 和 K 都只是 x 的函数,而 Hartmann 数 $M = \mu H_0 L \left(\frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{\frac{1}{2}}$ 。

方程(4)的解为

$$\lambda = \frac{W_x}{W_{cp}} = \frac{1 - \frac{\text{ch} \sqrt{1 + \beta^2} M y'}{\text{ch} \sqrt{1 + \beta^2} M}}{1 - \frac{\text{sh} \sqrt{1 + \beta^2} M}{\sqrt{1 + \beta^2} M \text{ch} \sqrt{1 + \beta^2} M}}. \quad (5)$$

* 1962年4月5日收到。

1) 所得到的结果对内径之比接近于1的环形通道也近似地适用。

式(5)给出进口段速度的分布规律, 只要知道了 $\beta^2 = f_1(x)$ 的具体形式, 沿管道的流速分布就可以完全确定。下面就来决定 $\beta^2 = f_1(x)$ 。

对方程(2)沿 y' 积分并以方程(1)代入, 减去中心流线上的对应方程后整理之, 可得

$$\frac{d}{dx'} \int_{-1}^1 (\lambda_0^2 - 2\lambda^2) dy' = 2M^2 \int_{-1}^1 (\lambda - \lambda_0) dy' + 2 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y'^2} \right)_0 - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y'^2} \right] dy', \quad (6)$$

其中 $x' = \frac{x}{L} \frac{\nu}{W_{cp} L} = \frac{x}{L} \frac{1}{Re}$, 下标“0”表示中心流线上的数值。

把(5)代入(6), 对于 $M \geq 5$ 的情况, 积分后近似可得

$$dx' = -\frac{1}{2} \frac{(3+N)}{(N-1)^2(N^2-M^2)} dN, \quad (7)$$

其中 $N = \sqrt{1 + \beta^2} M$ 。

当 $\beta^2 = \infty$ (即 $N = \infty$) 时, $x' = 0$; 而当 $\beta^2 = 0$ (即 $N = M$) 时为完全发展流动, 但这时 $x' = \infty$ 。故我们定义进口段长度为从进口处到中心流速和流动完全发展时中心流速相差 1% 为止的这段距离。对于 $M > 100$ 的流动, 由于流动完全发展时的中心流速和平均流速之差 $< 1\%$, 所以上面的定义是不适用的, 但不是上述方法不适用, 一般说来这时进口段已十分短, 问题的本身已无意义。

设 N_e 为进口段结束时的 N 值, 则

$$N_e = \frac{0.99M}{1 - 0.01M} \quad (M > 5 \text{ 时误差} < 1\%). \quad (8)$$

积分式(7), 可得

$$\begin{aligned} x' = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2(1-M^2)} \left[\ln \frac{(N-1)^2}{N^2-M^2} + \frac{1}{M} \ln \frac{N+M}{N-M} \right] - \right. \\ & - \frac{4}{1-M^2} \left[\frac{1}{N-1} + \frac{1}{1-M^2} \left(\ln \frac{(N-1)^2}{N^2-M^2} + \frac{1}{M} \ln \frac{N+M}{N-M} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2M} \ln \frac{N+M}{N-M} \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

式(9)表示了 N 也就是相应的 β^2 对 x' 的关系。将这个关系代入(5)就可得到任一 x' 位置上的速度分布规律。显然以(8)代入(9), 就可得到进口段的长度

$$\left(\frac{x}{L} \right)_e = f(M) Re(L), \quad (10)$$

这和文献[2, 3, 7]所得结果的形式相同, 但 $f(M)$ 的具体数值有所不同, 比较如下:

$f(M)$	M			
文 献	5	10	20	50
[2]			0.25×10^{-2}	4×10^{-4}
[3]	约 0.05			
[7]	8.86×10^{-2}	1.77×10^{-2}	0.24×10^{-2}	4×10^{-1}
本 文	4.91×10^{-2}	0.615×10^{-2}	0.102×10^{-2}	0.303×10^{-1}

由此可以得到以下结论:

1. 本文得到的结果在 $M = 5$ 时和文献[3]吻合。应该指出, [3]的方法用于小 M 数时

是比较精确的。至于本文,从推导过程来看,则当 M 数愈大时,精确度提高。所以本文和文献[3]合起来,可以对 $0 < M < 100$ 的进口段流动作出比较精确的估计。

2. 文献[2]和[7]用了同一近似方法¹⁾,看来无论在大 M 数时^[2,7]或小 M 数时^[7]都不够精确。

3. 在一般情况下($Re_L \approx 5000$),当 $M > 50$ 时,进口段的长度可以忽略。

参 考 文 献

- [1] Chang, C. C. and Lundgren, T. S., The flow of an electrically conducting fluid through a duct with transverse magnetic field, Heat transfer and Fluid mechanics Institute, Stanford University, Press, 1959.
- [2] Shercliff, J. A., Entry of conducting and non-conducting fluids in pipes, *Proc. of Camb. Phil. Soc.*, **52**, 1955, 473.
- [3] Roidt, M. and Cess, R. D., An approximate analysis of laminar MHD flow in the entrance region of a flat plate, *Trans. ASME, Series E. J. A. M.*, **29**, 1, 1962, 171.
- [4] Langhaar, H. L., Steady flow in the transition length of a straight tube, *Trans. ASME*, **64**, 9, 1942, A-55.
- [5] Han, L. S., Hydrodynamic entrance lengths for incompressible laminar flow in rectangular ducts, *Trans. ASME, Sec. E.*, **27**, 3, 1960, 403.
- [6] 柯 林, 电磁流体力学, 科学出版社, 1960, 11—13.
- [7] Охременко, Н. М., Развитие ламинарного течения вязкой электропроводящей жидкости между параллельными плоскостями под действием поперечного магнитного поля, Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы II. АН Лат. ССР, Инс. физ., Рига, 1962, 551—557.

ANALYSIS OF LAMINAR MHD FLOW IN THE ENTRANCE REGION OF A FLAT DUCT

Hsueh Ming-lun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

1) 文献[2]和[7]用了同一近似方法,但它们的进口段长度定义是不同的。但在大 M 数时($M > 20$),二者的数值结果相差极小。