

## 对塑性变形問題的一些看法 ——并答王仁同志的书評

李敏华

(中国科学院力学研究所)

王仁同志对于笔者所写的专著“硬化材料的軸对称塑性平面应力問題的研究”<sup>[1]</sup>作了介紹<sup>[2]</sup>,并指出了該专著在叙述上还欠簡洁,重复的地方較多,全书缺乏一段結論和討論以給出一个总的概括。这些的确都是該专著的缺点,承王仁同志指出,笔者非常感謝。此外王仁同志还提出了一些其他問題和意見,对这些問題和意見,笔者认为还需要进一步討論。

該专著虽然仅研究了軸对称平面应力的三个具体問題,但所得的結論涉及塑性形变理論的应用范围、塑性比例应变的特点和近似解法、以及理想塑性材料近似解的准确性等問題。这些問題对目前塑性力学来講也还是較大的問題,笔者在[1]中沒有給出总的結論(結論分散在几处)。通过軸对称塑性平面应力問題和一些其他的工作,笔者对于上述这些問題有一些看法。本文前四节討論这些看法。王仁同志所提出[1]的缺点中有关这些問題的部分也在第一、二、四节中討論;其他問題在第五节中討論。最后笔者将此中各节所給的結論綜合写在第六节中,并补充了自己目前对这些結論的看法。

### 一、塑性形变理論的应用范围

这里所討論的塑性形变理論是指納达依(A. Nadai)<sup>[3]</sup>和依留欣(A. A. Ильюшин)<sup>[4]</sup>的形变类型的塑性应力应变关系理論<sup>1)</sup>。要討論它們的应用范围,需要从形变理論的应用条件以及在具体問題中这些条件是否容易滿足的两个問題来討論。

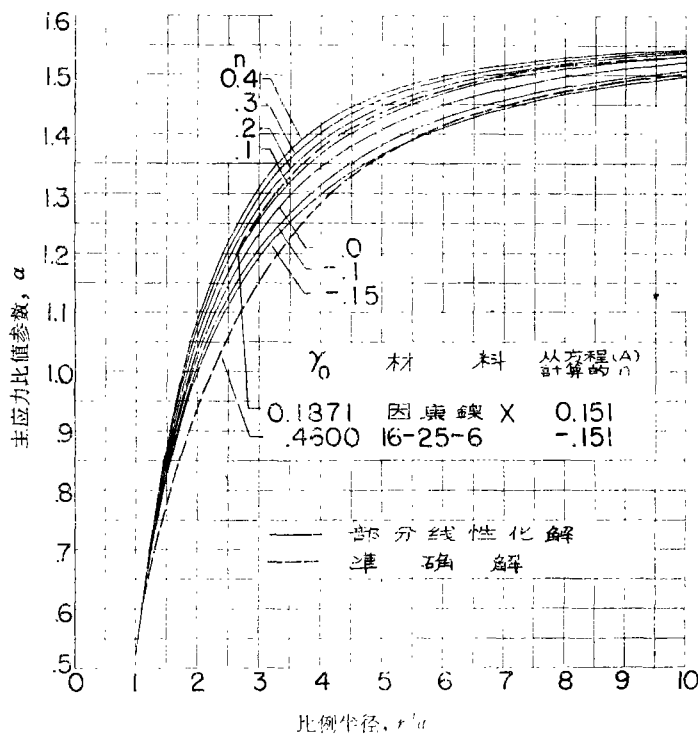
塑性形变是一个不可逆的过程。因此对于許多不同的任意加载过程,一般的来說,应力分量的函数和总应变分量的函数之間沒有唯一的关系。也就是任意加载过程中的某一点的总应变状态不完全决定于該点的应力状态,而和加载过程也有一定的关系。但是,对于初始各向同性的材料,在簡單加载或偏离簡單加载的条件下,納达依(考虑有限应变)和依留欣(考虑微小弹塑性应变)的形变理論得到了实验验证。并且这两个理論的屈服函数都和八面体面上的剪应力的函数相同<sup>[1]</sup>,而八面体面上的法应力又等于平均法应力。靜水压力不影响屈服的实验結果又說明了平均法应力不影响屈服。所以这两个理論也都有了一定的物理基础。

其次要討論的是物体在塑性形变过程中各点的应力状态是否接近于簡單加载。依留欣<sup>[5]</sup>証明了在小应变范围内,如果外載按比例增加以及材料的应力強度和应变強度假定成指数函数关系,則物体內各点的主应力比值在加载过程中保持不变,并且应力分布和应变分

1) 形变类型的理論是用总应变分量的函数和应力分量的函数来描写材料的应力应变关系,在应用上比較方便,但有应用条件的限制。为簡便起見,以下将形变类型的应力应变关系理論簡称为形变理論。

布都按比例增加。文献[6]和[7]对于依留欣提出的理論<sup>[5]</sup>进行了一些討論(参看[1]中第54頁)。但是上述依留欣关于外載和材料曲綫的条件对于具体元件和一般工程材料是否容易得到滿足,以及在大应变范围内形变理論的应用条件等問題都还没有解决。

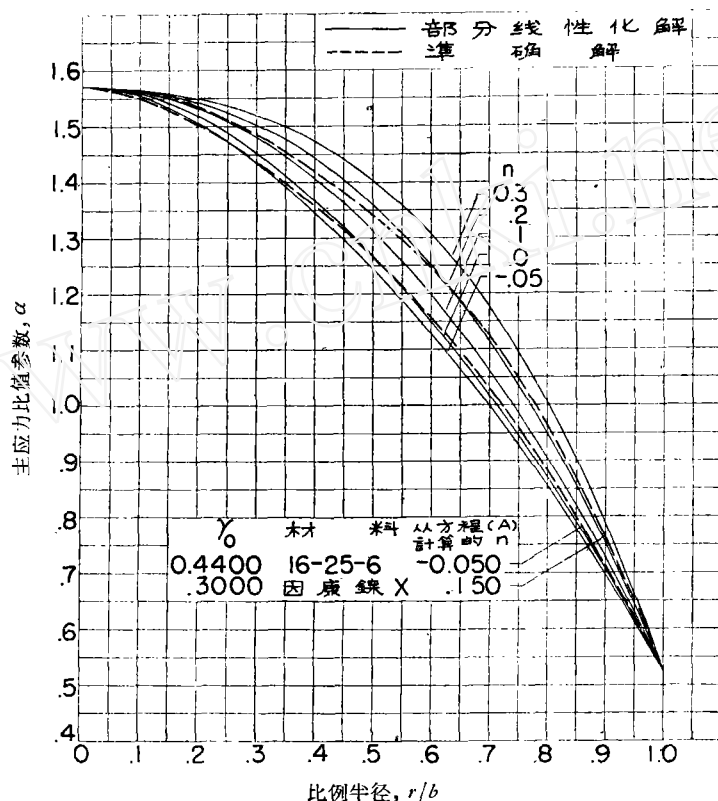
专著<sup>[1]</sup>中先通过具体材料的受压圓形薄膜<sup>1)</sup>以及大变形的轉盘和薄圓环<sup>2)</sup>的計算結果,看出了这些具体材料的具体物体,在加载过程中,内部各点的主应力比值的變化很小。书中又进一步將大变形的薄圓环和轉盘的方程部分綫性化,得到了材料和載荷的參数 $(m - c\gamma_0)$ ,以及在大应变范围内形变理論应用于轉盘和薄圓环的条件。这条件是:如果某一材料在整个硬化区的參数 $(m - c\gamma_0)$ 的變化不大,則形变理論可以应用于該材料的轉盘和薄圓环。最后并根据大部分工程材料<sup>3)</sup>的应力应变曲綫估計了每一材料整个硬化区的 $(m - c\gamma_0)$ 数值;再从不同 $(m - c\gamma_0)$ 值的主应力比值參数 $\alpha$ 的分布曲綫(图A和B中的实曲綫,这些曲綫取自[1]中图21(a)和24(b),是从部分綫性化的方程計算得到的),看出了形变理論可以应用到一般工程材料的轉盘和薄圓环,包括材料的整个硬化区。



图A. 薄圓环(或圓孔无限板)的主应力比值參数 $\alpha$ 沿比例半径的分布曲綫

王仁同志认为专著[1]的第一个缺点是“书中还有不少地方比較粗糙,結論也有待进一步討論和精确化。例如作者推广了形变理論的适用条件,但是外載仍然是按比例增加的(在小变形条件下),因而主要是推广到材料不按指数关系的情形,但从书中图5材料

- 1) 受压圓形薄膜的主应力比值分布是应用格萊茨尔(A. Gleyzal)<sup>[4]</sup>(考虑小应变)給出的应力分布曲綫計算的。
- 2) 为簡便起見,本文將圓孔薄圓板和圓孔无限板簡称为薄圓环。
- 3) 大部分工程材料包括在文献[9,10,11]中所給的各材料曲綫以及因康鎳 X、16-25-6、中炭鋼(文献[5]所用的材料)、和 SAE 1078 号鋼、鍍銅合金、鎳基合金([1]中图 30 的曲綫)等。

图 B. 旋轉盘的主应力比值参数  $\alpha$  沿比例半径的分布曲线

的性质看来,在本书例題的范围  $\gamma_0 = 0.04$  到  $0.3$  内,和指数关系的偏离有多少(从图上看是小于  $5\%$ ),……”。笔者认为书中在安排上写法上可能有不少地方比较粗糙,但是結論却都是根据計算結果和分析結果得出的,是有充分根据和足够准确的。例如王仁同志所提到的关于形变理論适用范围的結論,书中是根据大部分工程材料的曲线得出的,不限于书中图 5 所給的两种材料因康 X 和 16-25-6;另一方面,这两种材料的曲线和指数关系的偏离也并不小,在书中例題范围内决不会小于  $5\%$ ;并且受压圆形薄膜和大变形的轉盘的載荷都和按比例增加有一定的偏离。这里将书中有关这些問題的討論和数据简单的写在以下三段中。

关于形变理論在薄圓环的适用范围問題的討論如下:书中第 53 頁:“从图 21(a) 的曲线可以看出,当  $n$  从  $-0.15$  变到  $0.4$ ,在任何  $r/a$  处的  $\alpha$  的数值的变化小于  $10\%$ 。”其中  $n$  是材料和載荷的参数,即

$$n = m - c\gamma_0. \quad (A)$$

薄圓环的  $c$  等于  $0.7$ ;轉盘的  $c$  等于  $0.5$ 。在同一頁又接着討論“作者曾將大部分的工程材料<sup>[36-38]1)</sup>在不同  $\gamma_0$  数值下的  $n = (m - 0.7\gamma_0)$  的数值估計过,  $n$  的数值大約在  $-0.1$  到  $+0.25$  的范围内。”“在大部分的工程材料的  $n$  数值范围内,  $-0.1$  到  $+0.25$ ,薄板任何  $r/a$

1) 即本文参考文献[9-11]。

处的  $\alpha$  的数值的差别小于 7%。”每一种工程材料的“ $n$  数值的变化只占其中的极小部分，因此可以肯定，对于大部分工程材料的圆孔薄圆板受有径向拉力在加载过程板内各点的  $\alpha$  的变化很小，也就是形变理论可以应用。”同样地在第 66 页讨论了形变理论对于转盘的适用范围，得出相同的结论。从这些讨论可以看出，结论是根据大部分工程材料得出的。

因康镍 X 和 16-25-6 两种材料跟其他材料的曲线相比，不论从和指数关系的偏离度或材料的硬化程度来讲，也都是具有代表性的。在书中的例题范围内，从  $\gamma_0 = 0.04$ ， $\gamma_b = 0.007$  到  $\gamma_0 = 0.30$ ， $\gamma_b = 0.054$ ，因康镍 X 和 16-25-6 与指数关系的偏离决不会小于 5%。以转盘为例，将具体数值列于下表：

材 料	$\gamma$ 范 围	$m$	$\frac{m_{0.3} - m_{0.04}}{m_{0.3}}$	$\frac{m_{0.3} - m_{0.04}}{m_{0.04}}$
因康镍 X	$\gamma_0 = 0.04, \gamma_b = 0.007$	0.088	$\frac{0.165 - 0.088}{0.165} = 46.7\%$	$\frac{0.165 - 0.088}{0.088} = 87.5\%$
	$\gamma_0 = 0.30, \gamma_b = 0.054$	0.165		
16-25-6	$\gamma_0 = 0.04, \gamma_b = 0.007$	0.112	$\frac{0.30 - 0.112}{0.30} = 62.7\%$	$\frac{0.30 - 0.112}{0.112} = 167.9\%$
	$\gamma_0 = 0.30, \gamma_b = 0.048$	0.30		

表中最后两行的数字清楚地说明，不论用  $\gamma_0 = 0.04$  的  $m$  值 ( $m_{0.04}$ ) 或用  $\gamma_0 = 0.30$  的  $m$  值 ( $m_{0.30}$ ) 作为基数，这两种材料和指数关系的偏离，如用百分比来表达，都是很大的。表中  $m$  数值取自专著[1]中的计算数据，并且是根据[1]中所给出的方法计算的。王仁同志提出从图 5 的材料曲线看，专著[1]中例题范围内的材料曲线和指数关系的偏离小于 5%，显然他所用的计算  $m$  的方法和专著[1]中所给的方法不同，可能他只考虑了  $\gamma$  在 0.04 到 0.3 的一段应力应变曲线。但是[1]中对于  $m$  值的计算方法是作了解释的：第 45 页“用一直线近似从  $\gamma_b$  到  $\gamma_0$  一段的  $\ln \tau - \ln \gamma$  曲线，并且用  $m$  代表这直线的斜度”。在同一页上还特别加了脚注，强调近似从  $\gamma_b$  到  $\gamma_0$  的一段曲线，并说明了“和普通所用的‘指数函数’的近似不同”，另外还用第 46 页的图 20 作了说明。

王仁同志并提到“外载仍然是按比例增加的（在小变形条件下）”。但是在专著[1]中，除了受压圆形薄膜是应用文献[8]（考虑小应变）的计算结果外，其他问题都是考虑大变形的。转盘各点的体积力和  $(\gamma + u)$  成比例，在大应变情况下， $u$  和  $\gamma$  相比不能忽略，因此各点载荷的增加是和按比例增加有偏离的<sup>1)</sup>。至于受压圆形薄膜，由压力所产生的在各微小元素平面内的分力，和各微小元素的瞬时倾斜度有关，因此各微小元素的载荷的增加也和按比例增加有所偏离。薄圆环的载荷则是按比例增加的，它只在一个边界上有均匀载荷。这三个例子都是有实用意义的，它们的载荷增加情况，一方面说明，当载荷跟按比例增加有偏离时，物体内各点的主应力比值的变化仍然不大；另一方面说明，载荷按比例增加或按偏离比例增加的情况，在工程上提出的力学问题中也是常有的。

1956 年笔者又分析了一般平面应力问题的方程<sup>[12]</sup>，认为如外载接近于按比例增加，则受平面应力作用的物体各点的主应力比值在加载过程中的变化可能不大。1959 年

1) 在小应变情况下， $u$  和  $\gamma$  相比较为很小，可以忽略，因而盘中各点的载荷按比例增加。但专著[1]所考虑的是大应变问题。

又进行了单向拉伸圆孔薄板的实验<sup>1)</sup>,证实了这一可能性。因此笔者认为形变理论能应用到外载接近于按比例增加的平面应力问题;而在一般的工程问题中,外载接近于按比例增加的情况是相当多的。

对于平面应变问题,其中一个主应变等于零。如用  $\epsilon_2$  代表该主应变,我们可以很容易看出,由于塑性不可压缩性,当  $\epsilon_2 = 0$  时  $\epsilon_1 = -\epsilon_3$ 。也就是当  $\epsilon_2 = 0$  时,

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} = 0,$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = -1.$$

当外载按比例增加或接近于按比例增加时,边界上的主轴方向不变或接近于不变,估计物体内各点主轴方向的变动不大。所以对于外载按比例增加或接近于按比例增加的平面应变的物体,各点的加载过程一定是简单加载或者是接近于简单加载。这也就是说,形变理论能应用到外载接近于按比例增加的平面应变问题。

形变理论在苏联一直是被广泛应用的。美国普拉格 (W. Prager) 等在 1948 年前后对于形变理论的物理基础曾进行了很多讨论<sup>2)</sup>。之后,通过薄管实验,形变理论在塑性屈曲问题中的应用,以及薄圆环和转盘的主应力比值分析等工作,对于形变理论的应用条件和范围都在逐步明确。苏联茹可夫 (A. M. ЖУКОВ) 等又进行了系统的薄管实验和讨论了偏离简单加载的范围,美国布第扬斯基 (B. Budiansky)<sup>3)</sup> 对形变理论又作了重新评价,这些问题得到了更进一步的明确。但是近年来普拉格<sup>[5]</sup> 等还提出形变理论没有物理基础的问题。笔者认为普拉格等指出形变理论应用的局限性以及在某些情况下会给出矛盾的结果(即使这些情况在形变理论应用范围内并不存在),对于明确形变理论的应用范围和新的塑性理论的探求都是有幫助的,但是否定形变理论的物理基础或过分缩小形变理论的应用范围,则是不适当的。

从上述各文献的研究结果和笔者本人进行的分析和实验工作,笔者认为虽然塑性变形是一个不可逆的过程,虽然用总应变函数和应力函数来描述应力应变关系的纳达依理论和依留欣理论有一定的应用条件,但是这些条件是容易得到满足的。对于外载荷接近于按比例增加的平面问题,包括一般材料的整个硬化区域,形变理论是可以给出很好的结果的。

强调对形变理论应用范围的正确估计,并不是不重视其他的塑性理论的发展。正相反,这样就明确了在超偏离简单加载<sup>3)</sup> 和包括卸载的情况下,新的塑性理论的建立是非常需要的。例如往复运动的机械零件和作机动飞行的飞行器结构等都存在着超偏离简单加载和部分卸载的问题。此外,即使在简单加载和偏离简单加载的情况下,更简单的新的理论的提出也是很重要的,可以使许多急待解决的塑性变形问题容易得到解答。

- 1) 李敏华、雪家雄、宣正勇: 圆孔薄板在单向拉力下的塑性应变集中, 力学研究所 1959 年研究报告 (未发表)。
- 2) 主要是指出在中性变载情况下,形变理论所给出的结果存在着矛盾。实际上,在形变理论的应用范围内,即在简单加载或偏离简单加载的范围内,中性变载是不存在的。
- 3) 这里用超偏离简单加载代表主应力比值变化较大的加载过程。

## 二、塑性比例应变的特点和通用应变近似解法

前节讨论变形理论的应用范围,只需要考虑每一材料在加载过程中物体内各点主应力比值的变化。本节是将大部分工程材料联系起来考虑,讨论大部分工程材料的薄圆环和转盘的各主应力比值分布曲线和各比例应变分布曲线的共同特点。

[1]中用准确解计算了因康镍 X 和 16-25-6 二种材料的薄圆环和转盘在不同载荷下的  $\sigma_r/\sigma_\theta$  和  $\gamma/\gamma_0$  的分布曲线([1]中图 7 和 11)。从这些曲线看出,不但每一种材料的各  $\sigma_r/\sigma_\theta$  和各  $\gamma/\gamma_0$  分布曲线很接近,并且这两种材料的所有曲线亦都相当接近。又从大部分工程材料曲线在硬化区的  $(m - c\gamma_0)$  数值以及部分线性化解在不同  $(m - c\gamma_0)$  值的  $\alpha$  分布曲线和  $\gamma/\gamma_0$  分布曲线看出,材料的应力应变曲线和载荷对于薄圆环和转盘的主应力比值分布和比例应变分布的影响不大。利用这一特点,得到了以某一塑性比例应变作为已知近似值的近似解法。这近似解法,在计算应变时和实际材料曲线无关;计算应力时则应用实际材料的曲线。因此这近似解中的应变是通用的,在这里我们称它为通用应变近似解。也因为这样,解法非常简便,并且易于应用到难解的非均匀材料的塑性变形问题。

王仁同志认为专著[1]的第四个缺点中的一部分是“把塑性计算结果和蠕变实验比较也是不能令人满意的”。笔者认为因康镍 X 材料的转盘在塑性变形下的比例应变能和铬钢(12%铬)的转盘在蠕变变形下的比例应变分布的实验数据(华尔(A. M. Wahl)的实验<sup>[10]</sup>)接近比预期的满意。这说明了[1]中提出的“材料应力应变曲线对塑性比例应变分布影响不大”的结论有推广到包括蠕变变形的可能。实验结果和计算结果进行比较时,由于目的不同,要求也随之不同。如果用实验来验证计算结果的准确性,那么实验条件和计算条件要尽可能的一致。如果用实验来验证结论的普遍性,那么要验证普遍性的这一条件的范围选择得愈广,就愈能说明结论的普遍性。[1]中用某一种材料转盘的蠕变比例应变(由实验得到的)和另一种材料转盘的塑性比例应变分布进行比较,是属于后一种比较方法,它说明了结论的应用范围可以更广。

此外王仁同志还提到用  $m = c\gamma_0$  近似(即通用应变近似解)的误差问题。这近似解的误差,[1]中是用曲线的比较来讨论的([1]中图 23 和 26)。进行比较所选择的例题是[1]中所有计算中误差最大的( $\alpha$  分布曲线和  $\gamma/\gamma_0$  分布曲线中正值误差和负值误差最大的例题)。图 A 和 B 中虚曲线和  $n$  等于零的实曲线分别代表上述例题的准确解的  $\alpha$  分布曲线和近似解的  $\alpha$  分布曲线。从[1]中曲线的比较可以看出,近似解所给的应力分布和应变分布的误差不很大,特别是应力的误差很小。因为  $\tau-\gamma$  曲线比较平坦,根据  $\gamma$  的已知近似值,从  $\tau-\gamma$  曲线得出的  $\tau$  的数值的误差要比  $\gamma$  的误差小很多。至于近似解所得的转盘转速的误差,从[1]中和荷姆斯(A. G. Holms)实验<sup>[17]</sup>的比较([1]中 76—78 页)可以看出是非常的小,在 0.13% 到 3.22% 的范围内。

笔者在文献[12]中(1956年)分析了一般平面应力问题的平衡方程,得到了和轴对称平面应力问题相似的参数  $\frac{\gamma}{\tau} \frac{d\tau}{d\gamma} = f\left(\alpha, \frac{\gamma}{\gamma_0}\right) \gamma_0$ , 提出了材料曲线和载荷对平面应力问题的塑性比例应变分布的影响也可能不大。之后又进行了单向拉伸的圆孔薄板的实验,测

得了圆孔两旁垂直于拉力方向的直线上的塑性应变分布。所得到的铜试件在三个不同载荷下和中碳钢试件在二个不同载荷下的塑性比例应变分布相当接近。实验结果说明了材料曲线和载荷对一般平面应力问题的塑性比例应变分布影响不大的可能性是存在的。1959年笔者又对轴对称平面应变问题的高压圆柱形厚壁容器进行了分析<sup>1)</sup>。在小变形情况下，塑性比例应变仅是半径的函数，不是材料曲线和载荷的函数。在大变形情况下，塑性比例应变也不包括材料曲线的参数，只是半径  $r$  和最大应变  $\gamma_0$  ( $\gamma_0$  随载荷增加而增加) 的函数，并且不同  $\gamma_0$  值的塑性比例应变曲线都非常接近。因此轴对称平面应变问题的高压圆柱形厚壁容器的塑性比例应变和材料曲线无关，同时载荷对它的影响也很小。笔者认为上述结论的应用范围还可能继续扩大。在专著[1]脱稿时，单向拉伸圆孔薄板的实验和厚壁圆柱形容器的分析工作正在进行，虽已获得初步结果，但当时为了更肯定起见，在专著[1]内没有提到，现在已有更多的结果，今后将整理发表。

### 三、理想塑性材料近似的准确性

专著[1]中将不同材料(包括理想塑性材料)的薄圆环和转盘的塑性比例应力和比例应变分布曲线(图12,13,23和图26)作了比较并进行了分析，得出材料曲线和载荷对薄圆环和转盘的塑性比例应变分布的影响不大，但对塑性比例应力分布的影响却很大(见[1]56页和69页)的结论。用理想塑性材料近似实际工程材料时，一般都考虑小应变，因此参数  $n$  中的  $\gamma_0$  和有限值  $m$  相比较可以忽略： $n = m - c\gamma_0$  成为  $n = m$ ；而理想塑性材料的  $\tau$  又等于常数，则  $m$  亦等于零。这样，所用理想塑性材料近似就成为  $n = 0$  中的一个特殊情况。因此，用理想塑性近似所得的应变分布和前节的通用应变近似解的应变分布相同，因而也是相当准确的。至于应力，理想塑性材料近似用  $\tau = \tau_0 =$  常数来近似实际的  $\tau-\gamma$  曲线。但因应力直接随  $\tau$  的变化而变化，所以用理想塑性材料的近似所得应力分布和准确解有很大差别(见[1]图23和26的比较)。[1]中第56页得到了“用理想塑性材料近似实际工程材料时，它的应变分布相当准确，但是应力分布则有很大的差别”的结论。

### 四、塑性应变集中和应力集中

在弹性变形问题中，应力和应变成线性关系，因此不论用应力集中因数或应变集中因数都能表达应力集中和应变集中的程度。可能由于应力和载荷更有直接联系，在弹性变形问题中习惯于用应力分布的不均匀性来表达应力集中和应变集中的程度。但在塑性变形下，由于材料的应力和应变成非线性关系，应力分布的不均匀度比应变分布的不均匀度小得很多，如果仍沿用弹性力学中根据应力分布来判断应力集中和应变集中的程度，则不够灵敏。也因为这个原因，有时被人误认为“塑性变形能解除应力集中”。笔者为了要强调塑性应力集中和应变集中问题，在书中特将转盘和薄圆环的弹性和塑性的应力分布和应变分布曲线进行了比较；从而说明虽然塑性应力分布表现得比较均匀，但从塑性应变分布的不均匀和应变强度分布的不均匀可以看出，塑性应力集中和应变集中的程度并没有减小。因此笔者提出用塑性应变分布的不均匀度来衡量塑性应变集中和应力集中的程

1) 李敏华, 汤绍源: 高压圆柱形厚壁容器在大塑性变形下的简单解法, 力学研究所 1959 年研究报告 (未发表)。

度。

王仁同志提出：“书中有一些提法我认为是不够确切的。例如在 42 页关于应变集中的讨论中，作者强调了应该注意应变过大的危害性，但忽视了应力和应变的统一性。从文中看来似乎应力较均匀就可与应力无关……”第 42 页的讨论是从第 39 页开始的（中间隔了六个图）。在第 39 页，应变集中和应力集中一直是并提的，例如：“因为进入塑性变形后，由于材料的应力应变曲线趋于平坦而使塑性应力分布比较均匀，但是塑性应变分布的不均匀性则不会减少的。”……等等。从[1]第 39 页的讨论说明了在塑性变形情况下，用应力分布的不均匀度来反映应力集中和应变集中是不够灵敏的。同时又因为一般习惯于常提应力集中，不注意应变集中，因此笔者在第 42 页提出“对于塑性变形增加应变分布不均匀性的这一结论应当予以重视”，并进行了讨论。提出重视应变分布不均匀性并不意味着和应力无关。正如弹性变形问题中一般常用应力集中并不意味着和应变无关或是忽视应力和应变的统一性。可能在[1]中的讨论写得不够清楚，希望这些补充的讨论能将笔者对塑性应力集中和应变集中问题的看法说得更清楚些。

## 五、对王仁同志提出的其他问题的答复和讨论

王仁同志提出的其他问题中还有他所提出的第三个缺点的另一部分，关于“本书好象只处理了等厚度旋转盘……而作者一直没有指出”的问题，实际上书中第 9 页已说明了“考虑一外径等于  $b$ ，厚度等于  $b_0$  的旋转盘”。

此外王仁同志所提出专著[1]的第二个缺点包括：“作者对按增量理论及其他方法所得的结果很少介绍”；书中没有提到苏联在这方面的的工作（指出了具体的“公开理论资料<sup>[18,19]</sup>”）；以及“全书没有指出产生有利的残余应力分布的问题”。专著[1]的主要目的是想通过这几个问题的比较准确的解、计算结果、分析结果和所得到的参数等等，对塑性变形问题中的应力和应变方面的情况和特点能多少获得一些了解，并对几种近似解的准确性进行讨论；希望通过这些情况的了解，对于生产上提出的其他的塑性变形问题的解决能有些帮助。专著[1]的目的不是讨论和考虑残余应力，也不是对于轴对称塑性平面应力问题的解法进行介绍。但是书中没有把 1950 年以后的文献补进去是一个缺点，而笔者没有这样做也还有些原因，因为有关这一类问题的文献大都和专著[1]的内容关系不大<sup>1)</sup>，而少量的关系较大的文献则有的解法比较麻烦<sup>[16,20]</sup>，有的解法虽然简单而笔者又认为存在着一些问题需要进一步讨论<sup>[21,22]</sup>。例如王仁同志指出的两个文献<sup>[18,19]</sup>主要都是考虑特殊问题，属于关系不大的一类。文献[18]主要考虑转盘的弹性弯曲应力，塑性应力分析部分只考虑理想塑性材料（对于径向不均匀温度的转盘，各点的屈服函数等于常数是半径的已知函数）。文献[19]主要叙述和讨论特殊设计的转盘的优越性和有关的实验数据，塑性变形方面只包括了用塑性应力分布计算塑性应变分布的方程。又如文献[16]<sup>2)</sup>和[20]虽然和[1]的关系较大，但前者用逐次趋近法，后者从四个方程和材料曲线进行数值积分，计算都比较麻烦。文献[21]和[22]<sup>2)</sup>分别给出圆孔转盘的破坏转速方程和蠕变下的应力和应变分

1) 和[1]内容关系不大的文献有考虑理想塑性材料的，有考虑非塑性变形用逐次趋近法的，有主要考虑特殊问题而包括小量的塑性应力分析或应变分析的。

2) 文献[16]和[22]虽然是考虑蠕变下的应力和应变分析，但解法和塑性变形的应变和应力分析可以通用。



布。这两文献都应用了普拉格<sup>[23]</sup>提出的增量理论,解法虽然简单,但笔者认为存在着一些问题。例如:(1)圆孔转盘在内圆周处的应变的边界条件没有满足;(2)这两文献中的解法应用到实心转盘时 $\epsilon_r$ 的连续问题如何处理(专著[1]中主要考虑实心转盘)。

## 六、结 束 语

专著“硬化材料的轴对称塑性平面应力问题的研究”的总的结论是:

(1) 纳达依和依留欣的形变类型的塑性应力应变关系理论,可以应用到轴对称平面应力问题的转盘和薄圆环,包括一般工程材料的整个硬化区域;也可以应用到外载和按比例增加略有偏离的情况(受压圆形薄膜和大变形转盘的载荷都是和按比例增加有偏离的)。

(2) 材料的应力应变曲线和载荷对于薄圆环和转盘的主应力比值分布和比例应变分布的影响不大。利用这些特点,用一已知的塑性比例应变分布作为通用应变近似值,所得的解可以给出相当准确的结果而解法非常简单。

(3) 虽然材料曲线和载荷对于塑性比例应变分布的影响不大,但对塑性比例应力分布则有较大的影响。因此用理想塑性材料近似解所得到的应变分布相当准确,但所得的应力分布的误差则较大。

(4) 用分段指数函数近似实际材料曲线,可以得到非常准确的结果。

(5) 物体产生塑性变形后,虽然应力分布表现得比较均匀,但是从塑性应变分布的不均匀可以看出,塑性应力集中和应变集中的严重性仍然存在,必须重视。并建议用塑性应变分布的不均匀度来衡量塑性应力集中和应变集中的程度。

笔者目前对这些结论的补充看法:

(1) 纳达依和依留欣的形变理论可以应用到外载接近于按比例增加的平面问题,包括一般工程材料的整个硬化区。在一般工程问题中,外载接近于按比例增加的相当多。

(2) 轴对称平面应变问题的圆柱形厚壁容器在大应变情况下的塑性比例应变和材料曲线无关,同时载荷对它的影响很小。对于一般平面应力问题,材料曲线和载荷对塑性比例应变分布的影响也可能不大。

## 参 考 文 献

- [1] 李敏华,硬化材料的轴对称塑性平面应力问题的研究,科学出版社,1960年。
- [2] 王仁,评“硬化材料的轴对称塑性平面应力问题的研究”,力学学报,第5卷第1期,1962年2月,64—66。
- [3] Nadai, A., Plastic behavior of metals in the strain hardening range, Part I, *Jour. of Appl. Phys.*, **8**, 3, March 1937, 205—213.
- [4] Ильющин, А. А., 塑性(中译本),建筑工程出版社,1958。
- [5] Ильющин, А. А., К теории малых упруго-пластических деформации, *ПММ*, **10**, 1946, 347—356.
- [6] Winzer, A. and Prager, W., On the use of power laws in stress analysis beyond the elastic range, *JAM*, **14**, 4, Dec. 1947, 281.
- [7] Batdorf, S. B. and Stowell, E. Z., Discussion on “On the use of power laws in stress analysis beyond the elastic range”, *JAM*, **15**, 2, June 1948, 185—186.
- [8] Gfeyzal, A., Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure, *JAM*, **15**, 3, Sept. 1948, 288—296.

- [9] MacGregor, C. W., The tension test, *Proc. ASTM*, **40**, 1940, 508—534.
- [10] Low, J. R. Jr. and Garofalo, F., Precision determination of stress-strain curves in the plastic range, *Proc. SEEA*, **4**, 2, 1947, 16—24.
- [11] Hollomon, J. H., Tensile deformation, *Trans. AIME, Iron and Steel Div.*, **162**, 1945, 268—289.
- [12] 李敏华, 材料的应力应变曲线对于塑性平面应力问题的解的影响, *力学学报*, 第1卷第1期, 1957, 77—94.
- [13] Handelman, G. H., Lin, C. C. and Prager, W., On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range, *Quarterly of Appl. Math.*, **4**, 1947, 397—407; Drucker, D. C., A reconsideration of deformation theories of plasticity, *Trans. ASME*, **71**, 5, July 1949, 587—592.
- [14] Budiansky, B., A reassessment of deformation theories of plasticity, *JAM*, **25**, 2, June 1959, 259—264; Budiansky, B., Discussion on "New method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids", *JAM*, **24**, 3, Sept. 1957, 481.
- [15] Prager, W., A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids, *JAM*, **23**, 4, Dec. 1956, 493—496.
- [16] Wahl, A. M., Sankey, G. O., Manjoine, M. J., Shoemaker, E., Creep tests of rotating disks at elevated temperature and comparison with theory, *JAM*, **21**, 3, Sept. 1954, 225—235.
- [17] Holms, A. G. and Jenkins, J. E., Effect of strength and ductility on burst characteristics of rotating disks, *NACA*, TN 1667, 1948.
- [18] Макавдце, М. Ш., Упруго-пластические деформации в быстро вращающихся дисках переменной толщины, *Инж. Сбн.*, том XV, 1953, 21—34.
- [19] Карпин, Е. Б., Из опыта автофретирования турбинных дисков, *Энерго-машиностроение*, 1, 1959, 39—42.
- [20] Zaid, M., Fully plastic rotating disk with large strains, *JAS*, **20**, 1953, 369.
- [21] Weiss, H. J. and Prager, W., The bursting speed of a rotating plastic disk, *JAS*, **21**, 3, March 1954, 196—200.
- [22] Wahl, A. M., Analysis of creep in rotating disks based on the Tresca criterion and associated flow rule, *JAM*, **23**, 2, June 1956, 231—238.
- [23] Prager, W., Singular yield conditions and associated flow rules, *JAM*, **20**, 3, Sept. 1953, 317—320.