

縱向无弯矩柱形壳体按截面展开成 本征函数的級数的解法*

鍾 万 綱

(中国科学院力学研究所)

一、引 言

B. 3. Власов 在专著[1]中提出了半有矩柱形壳的理論，他作了假設：1) 忽略壁的縱向抗弯和抗扭能力；2) 忽略壁在橫向的伸縮应变和中曲面的剪切应变，推得了基本方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2(\sigma h)}{\partial z^2} + \Omega M &= P, \\ \Omega \sigma - \frac{E}{D} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中

$$P = -\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial p_s}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(R p_n) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(R \frac{\partial m}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{m}{R}\right), \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(R \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s}\right), \quad (3)$$

而 $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ 。其他的一些內力和位移則可由下列方程推求：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\sigma}{E}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= -\frac{1}{E} R \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right], \\ M &= -D \frac{\partial \theta}{\partial s}, \\ Q &= \frac{\partial M}{\partial s} - m, \\ T &= -R \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - R \left(p_n - \frac{\partial m}{\partial s} \right), \\ \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial s} - p_s + \frac{\partial}{\partial s} (R p_n) - \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial m}{\partial s} \right) + \frac{m}{R} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* 1962年1月26日收到。

针对这些方程, В. З. Власов 提出在 z 方向按横向振动梁的本征函数展开而求解的方法。

但这种解法有其不方便之处: 在集中力作用或在支座附近的情形下必须取很多项才能把结果算准。在 z 方向支承情况比较复杂时, 例如对连续几跨壳体, 这种解法就更不方便了。因此本文打算用按截面展开成本征函数的级数的方法来解这些方程, 从而把这个方法应用于考虑横截面变形的薄壁杆件理论。

应当指出, 在横截面不可变形的假设下, 考虑中曲面剪应变的薄壁杆件理论中, 也有按横截面的本征函数展开的方法^[2]。

二、横截面上的本征函数

考虑方程(1)的齐次方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2(\sigma h)}{\partial z^2} + \Omega M &= 0, \\ \Omega \sigma - \frac{E}{D} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

现在用分离变数法来解这对方程。令

$$\sigma(z, s) = B_n(z)\sigma_n(s), \quad (6)$$

$$M(z, s) = A_n(z)m_n(s), \quad (7)$$

并代入方程(5), 得

$$B_n''\sigma_n h + A_n \Omega m_n = 0,$$

$$B_n \Omega \sigma_n - \frac{E}{D} A_n'' m_n = 0,$$

式中的撇号代表对 z 的微商。于是可得

$$\frac{B_n''}{A_n} = -\frac{\Omega m_n}{\sigma_n h} = \lambda_{n1}^2,$$

$$\frac{A_n''}{B_n} = \frac{\Omega \sigma_n}{\frac{E}{D} m_n} = -\lambda_{n2}^2.$$

因 $\frac{B_n''}{A_n}$ 和 $\frac{A_n''}{B_n}$ 只是 z 的函数, 而 $\frac{\Omega m_n}{\sigma_n h}$ 和 $\frac{\Omega \sigma_n}{\frac{E}{D} m_n}$ 只是 s 的函数, 故 λ_{n1}^2 和 λ_{n2}^2 都只是常数,

并且只要在 A_n 或 B_n 前乘以适当的常数就可使

$$\lambda_{n1}^2 = \lambda_{n2}^2.$$

这样, 以后就只写 λ_n^2 而对 λ_{n1}^2 和 λ_{n2}^2 不加区分。于是得

$$\left. \begin{aligned} B_n'' - \lambda_n^2 A_n &= 0, \\ A_n'' + \lambda_n^2 B_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ 或 } \left. \begin{aligned} B_n^{IV} + \lambda_n^4 B_n &= 0, \\ A_n^{IV} + \lambda_n^4 A_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以及

$$\Omega m_n + \lambda_n^2 \sigma_n h = 0, \quad (9a)$$

$$\Omega \sigma_n + \lambda_n^2 \frac{E}{D} m_n = 0. \quad (9b)$$

边界条件如下:在 $s = 0$ 及 $s = l$ 处有

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } u = 0 \text{ 或 } S = 0, \\ \text{ii) } v = 0 \text{ 或 } T = 0, \\ \text{iii) } w = 0 \text{ 或 } Q = 0, \\ \text{iv) } \theta = 0 \text{ 或 } M = 0. \end{array} \right\} \quad (10)$$

用 σ_n 和 m_n 来表示,即

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \sigma_n = 0 \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial m_n}{\partial s} = 0, \\ \text{ii) } \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} = 0 \text{ 或 } R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} = 0, \\ \text{iii) } R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial m_n}{\partial s} = 0, \\ \text{iv) } \frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} = 0 \text{ 或 } m_n = 0. \end{array} \right\} \quad (11)$$

在横截面周线闭合的情况下,边界条件就成为这八个量都是周期的条件.

方程(9)是对弧长 s 的两个四阶齐次微分方程,故有八个积分常数. 现在正好有八个边界条件,故当 λ_n^2 为任意值时,(9)只有恒等于零的解. 只对一些特殊的 λ_n^2 , 方程(9)及边界条件才有不等于零的解. 这些 λ_n^2 称为本征值,相应的函数 $\sigma_n(s)$ 和 $m_n(s)$ 就称为本征函数.

现在来找出本征函数之间的正交关系式. 若 $\sigma_i(s)$ 和 $m_i(s)$ 为相应于 λ_i^2 的本征函数,则

$$\Omega m_i + \lambda_i^2 \sigma_i h = 0, \quad (12a)$$

$$\Omega \sigma_i + \lambda_i^2 \frac{E}{D} m_i = 0. \quad (12b)$$

将(12a)乘以 σ_n , (9a)乘以 σ_i 再相减,得

$$(\lambda_n^2 - \lambda_i^2) h \sigma_n \sigma_i = \sigma_n \Omega m_i - \sigma_i \Omega m_n;$$

将(12b)乘以 m_n , (9b)乘以 m_i 并相减,得

$$(\lambda_n^2 - \lambda_i^2) \frac{E}{D} m_n m_i = m_n \Omega \sigma_i - m_i \Omega \sigma_n.$$

把这两式相加,并对整个截面的弧长积分,得

$$\begin{aligned} (\lambda_n^2 - \lambda_i^2) \int_0^l \left(h \sigma_n \sigma_i + \frac{E}{D} m_n m_i \right) ds &= \\ &= \int_0^l (\sigma_n \Omega m_i - m_i \Omega \sigma_n) ds + \int_0^l (m_n \Omega \sigma_i - \sigma_i \Omega m_n) ds. \end{aligned}$$

利用分部积分法,再注意边界条件(11)或周期条件,可知上式的右边为零,故证得

$$\int_0^l \left(h \sigma_n \sigma_i + \frac{E}{D} m_n m_i \right) ds = 0, \text{ 当 } \lambda_n^2 \neq \lambda_i^2 \text{ 时.} \quad (13)$$

可以证明, λ_n^2 必定是实数,这是因为

$$\int_0^l \left(h \sigma_n \bar{\sigma}_n + \frac{E}{D} m_n \bar{m}_n \right) ds \neq 0$$

之故。其次,若 λ_n^2 是本征值,则 $-\lambda_n^2$ 也是本征值,相应的本征函数为

$$\sigma_{-n} = \sigma_n, \quad m_{-n} = m_n,$$

这只要由(9)就可看出。因 $\lambda_n^2 \neq 0$ 时 λ_n^2 和 $-\lambda_n^2$ 互不相等,故正交关系式(13)应当成立,于是得

$$\int_0^l \sigma_n^2 h ds = \int_0^l \frac{E}{D} m_n^2 ds, \quad \text{当 } \lambda_n^2 \neq 0 \text{ 时.} \quad (14)$$

同样,当 $\lambda_n^2 \neq \pm \lambda_i^2$ 时还应当有正交关系式

$$\int_0^l \left(h \sigma_n \sigma_i - \frac{E}{D} m_n m_i \right) ds = 0.$$

把这个方程与(13)联立,可知

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \sigma_n \sigma_i h ds &= 0, \\ \int_0^l \frac{E}{D} m_n m_i ds &= 0, \end{aligned} \right\} \text{当 } \lambda_n^2 \neq \pm \lambda_i^2 \text{ 时.} \quad (15)$$

现在来说明本征值 λ_n^2 的意义。方程(8)是常系数线性微分方程,它与弹性地基上梁的方程一样。 $[-\lambda_n^4]^{\frac{1}{4}}$ 有 4 个根:

$$\begin{aligned} &\lambda_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \quad \lambda_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \\ &\lambda_n \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \quad \lambda_n \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

令 $\mu_n = \lambda_n^2 / \sqrt{2}$, 于是 $B_n(z)$ 和 $A_n(z)$ 的解为

$$B_n = C_1 e^{\mu_n z} \cos \mu_n z + C_2 e^{\mu_n z} \sin \mu_n z + C_3 e^{-\mu_n z} \cos \mu_n z + C_4 e^{-\mu_n z} \sin \mu_n z, \quad (16)$$

$$A_n = C_2 e^{\mu_n z} \cos \mu_n z - C_1 e^{\mu_n z} \sin \mu_n z + C_4 e^{-\mu_n z} \cos \mu_n z - C_3 e^{-\mu_n z} \sin \mu_n z. \quad (17)$$

对于只在端部受力的无限长杆件来说,只用包含系数 C_3 和 C_4 的二个解(杆件在 $z > 0$ 处),因为在无穷远处应力应当为零。于是 μ_n 的意义即是说明应力衰减的快慢。对整个杆件来说, μ_n 大时自相平衡的局部载荷只产生局部的影响,可以适用 St. Venant 原理。

方程(9)有一个特殊的本征值,即当 $s = 0$ 和 $s = l$ 完全自由时, $\lambda_n = 0$ 是一个本征值。此时相应的本征函数为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 1, & m &= 0; \\ \sigma &= x(s), & m &= 0; \\ \sigma &= y(s), & m &= 0; \\ \sigma &= \omega(s), & m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

四对。这只要把它们代入方程(9)就可得到验证。这四个本征应力状态相应于薄壁杆件理论中的均匀拉伸,二个方向的弯曲,以及双力矩这些应力状态。B. З. Власов 在[1], [3]中证明了薄壁杆件理论相当于横截面刚度趋于无限大时的情况,而本文的说法则较为一般。

相应于(18)的本征应力状态,方程(8)成为

$$A^{IV} = 0, \quad B^{IV} = 0.$$

因 $m = 0$, 所以在目前这种情况下 A 是不起作用的, 可以不去管它. B 的方程在均匀拉伸与弯曲时与薄壁杆件的方程一样, 相应于双力矩的则少了 GJ_d 的一项. 这是因为这一项是截面上沿壁厚剪应力分布不均匀而产生的扭矩, 它在纵向无弯矩壳体理论中本来就是被忽略的. 双力矩的应力状态因为相应于 $\mu = 0$, 故不能适用 St. Venant 原理.

当沿一条边为铰支时, 例如 $s = 0$ 时, $v = w = 0$, 而另一条边为自由. 此时 $\lambda = 0$ 也是本征值, 相应的本征函数为

$$\begin{aligned}\sigma &= 1, & m &= 0; \\ \sigma &= \omega_0(s), & m &= 0,\end{aligned}$$

其中 $\omega_0(s)$ 是以 $s = 0$ 点为中心的扇形面积的二倍. 关于这点, 只要把它们代入方程 (9) 和相应的边界条件, 就可得到验证.

一般说来, 当刚性的横截面有自由度时, 总有相应于 $\lambda = 0$ 的本征应力状态.

由此知道, 薄壁杆件的理论只是相应于本征值为零的情况, 而把本征值不等于零的应力状态忽略了. 这只有在杆件横截面抗变形的刚度跟整个杆件的抗弯和抗扭刚度相比是很大时才正确, 即只有在 $\frac{EJ}{L^2} \ll \frac{Eh^3}{l}$ 时才行, 其中 L 指杆件在 s 方向的长度, 而 J 代表 J_x, J_y 和 J_ω/l^2 .

三、变分原理

方程(9)是两个四阶微分方程的联合, 有八个积分常数, 要求一个准确的本征解是很繁的. 变分原理可以帮助我们求出近似的本征值和本征函数.

将方程(9a)乘以 $\delta\sigma_n$, (9b) 乘以 δm_n , 相加后再对 s 进行积分, 得

$$\lambda_n^2 \int \left(h\sigma_n \delta\sigma_n + \frac{E}{D} m_n \delta m_n \right) ds + \int (\Omega m_n \delta\sigma_n + \Omega \sigma_n \delta m_n) ds = 0.$$

利用分部积分法, 得

$$\begin{aligned}\int \Omega m_n \delta\sigma_n ds &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_n}{\partial s} \right) \delta\sigma_n - R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} \delta \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \right]_0^l + \\ &+ \int \left(R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} \delta \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial m_n}{\partial s} \delta \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \right) ds, \\ \int \Omega \sigma_n \delta m_n ds &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \right) \delta m_n - R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} \delta \frac{\partial m_n}{\partial s} \right]_0^l + \\ &+ \int \left(R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} \delta \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \delta \frac{\partial m_n}{\partial s} \right) ds.\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}\delta \int \left[\left(R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \frac{\partial m_n}{\partial s} \right) + \lambda_n^2 \left(\frac{\sigma_n h}{2} + \frac{E m_n^2}{2D} \right) \right] ds + \\ + \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_n}{\partial s} \right) \delta\sigma_n - R \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} \delta \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} - \right. \\ \left. - R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} \delta \frac{\partial m_n}{\partial s} + \left(\frac{\partial}{\partial s} R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \right) \delta m_n \right]_0^l = 0.\end{aligned}\quad (19)$$

在力的边界条件下, 变分时在边界上应当使条件

$$\delta m_n = 0 \text{ 和 } \delta \frac{\partial m_n}{\partial s} = 0 \quad (20)$$

得到满足, 而 σ_n 的变分则不受任何限制. 由 $\delta \sigma_n$ 和 $\delta \frac{\partial \sigma_n}{\partial s}$ 的任意性可知, 其他两个力的边界条件自然而然地就得到满足. 在位移的边界条件下, 则变分时在边界上应当令

$$\delta \sigma_n = 0 \text{ 和 } \delta \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} = 0, \quad (21)$$

而 m_n 则不受任何限制. 同样, 由 δm_n 和 $\delta \frac{\partial m_n}{\partial s}$ 在边界上的任意性可知, 其他两个位移的边界条件也自然得到满足. 于是变分方程

$$\delta \int \left(R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2} \frac{\partial^2 m_n}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} \frac{\partial m_n}{\partial s} + \frac{\lambda_n^2 \sigma_n^2 h}{2} + \frac{E \lambda_n^2 m_n^2}{2D} \right) ds = 0 \quad (22)$$

及相应的条件(20)或(21)就跟方程(9)和边界条件相抵. 关于这一点, 只要把刚才的推导过程倒过来就可证实. (22)式也可以写成

$$\lambda_n^2 = \text{ext.} \frac{- \int \left(R \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial m}{\partial s} \right) ds}{\int \left(\frac{\sigma^2 h}{2} + \frac{E m^2}{2D} \right) ds}. \quad (23)$$

这个变分式说明, 本征值 λ_n^2 和相应的本征应力状态可以用 Rayleigh-Ritz 法求出.

四、相应的位移

由中曲面剪应变为零和横向弧线不可压缩的假设:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R} = 0 \quad (24)$$

知道有位移函数 $F(z, s)$ 存在, 使

$$u = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial s}, \quad w = -R \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}. \quad (25)$$

由应力应变关系 $\sigma = E \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ 可求得相应于本征应力状态的 F 为

$$F_n(z, s) = -\frac{1}{E} \frac{A_n(z)}{\lambda_n^2} \sigma_n(s). \quad (26)$$

由此就可求得相应的位移.

五、利用本征函数的展开式求解

在第二节中已证明了本征函数 $\sigma_n(s)$ 的正交性, 利用与[4]中完全相似的方法可证明在截面上任一函数按 $\sigma_n(s)$ 展开的可能. 现在就应用这个展开来求解方程(1). 探讨这个问题以能量法为最方便. 把 $F(z, s)$ 展开为

$$F(z, s) = \sum f_n(z) \sigma_n(s). \quad (27)$$

杆件的应变能为

$$U = \int_0^L \int_0^l \left(\frac{\sigma^2 h}{2E} + \frac{M^2}{2D} \right) ds dz. \quad (28)$$

由(27)及应力应变关系,得

$$\left. \begin{aligned} \sigma(z, s) &= \sum E f_n'' \sigma_n(s), \\ u(z, s) &= \sum f_n' \sigma_n(s), \\ v(z, s) &= -\sum f_n \frac{\partial \sigma_n}{\partial s}, \\ w(z, s) &= -\sum f_n R \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2}, \\ M(z, s) &= D \sum f_n \Omega \sigma_n = -\sum E \lambda_n^2 f_n m_n. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

将(29)式代入(28)式,经过运算,得

$$U = \sum \frac{E}{2} \int_0^L [(f_n'')^2 + \lambda_n^4 f_n^2] dz \cdot \int_0^l \sigma_n^2 h ds.$$

在运算过程中已运用了正交性条件(15)和方程(14). 引进归一化条件:

$$\int_0^l \sigma_n^2 h ds = 1, \quad (30)$$

即得

$$U = \sum \frac{E}{2} \int_0^L [(f_n'')^2 + \lambda_n^4 f_n^2] dz. \quad (31)$$

根据最小势能原理,得

$$f_n^{IV} + \lambda_n^4 f_n = \int_0^l (p_s v_n + p_n w_n) ds + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^l p_z \sigma_n ds, \quad (32)$$

其中

$$v_n = -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s}, \quad w_n = -\frac{R}{E} \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial s^2}. \quad (33)$$

相应的边界条件为:在杆件端点:

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } f_n &= 0 \quad (\text{即 } v = w = 0, \text{截面无变形}) \\ \text{或 } f_n''' &= 0 \quad (\text{截面变形无约束}); \\ \text{ii) } f_n' &= 0 \quad (u = 0, \text{纵向无位移}) \\ \text{或 } f_n'' &= 0 \quad (\sigma = 0). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

方程(32)就是基本微分方程. 可以看出,它和弹性地基上梁的方程完全一样,这给我们的计算工作带来很大的方便.

方程(32)也可由方程(1)再利用本征函数的性质得到.

六、褶板的情况

褶板的情况是退化的特殊情形,此时 $R \rightarrow \infty$,而在折点上是 $R = 0$. 由横向弧长不可压缩的条件得知,在每一块板上切向位移 v 是常数,再由 $\gamma = 0$ 的条件得知,在每一块板上 u 和 σ 总是直线分布的, m_n 在板上也是直线分布的. 这些内容在[3]中有详细的叙述. 相应于方程(1)的基本微分方程组也已在[3]中推得. 关于这个问题,在[3]中仍旧是用在 s 方向展开为梁振动的本征函数的级数来求解. 本文建议用展开为截面上的本征函数的级数的方法求解. 在褶板的情况下, $\sigma(s)$ 在截面上线性无关的分布是有限的,所以本征值和本征函数的数目也是有限的. 对于截面上的在每块板上为直线变化的任意函数,仍可按本征函数 σ_n 来展开,特别, F 可以用 σ_n 来展开.

现在应用按截面上的本征函数展开的方法来算一个褶板的例，这个例在 [3] 中曾算过，尺寸见图 1。这是一个对称的壳体。对于这种壳体可以把解分解成对称和反对称二种情况相加，现在只求对称载荷的解。在计算中，长度一律以米为单位。· 头一个步骤是求本征值和本征函数，对称变形的齐次微分方程为¹⁾

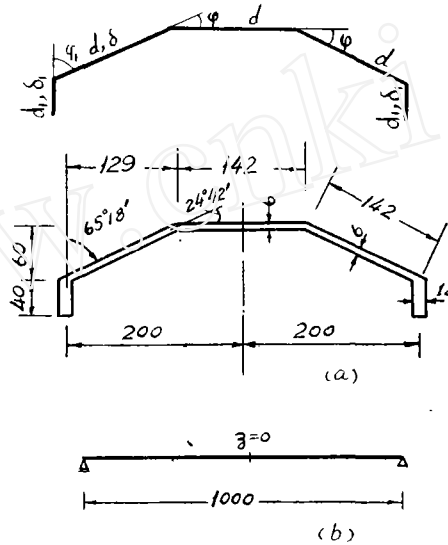


图 1 (a) 表示截面尺寸，以厘米为单位；(b) 表示壳体长度

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{3} \sigma_a'' + \frac{F_1}{6} \sigma_b'' + \frac{1}{d_1 d \sin \varphi_1} M_c &= 0, \\ \frac{F_1}{6} \sigma_a'' + \frac{F_1 + F}{3} \sigma_b'' + \frac{F}{6} \sigma_c'' - \frac{1}{d^2} \left(\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d}{d_1 \sin \varphi_1} \right) M_c &= 0, \\ \frac{F}{6} \sigma_b'' + \frac{5F}{6} \sigma_c'' + \frac{1}{d^2} (\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi) M_c &= 0, \\ \frac{1}{d_1 d \sin \varphi_1} \sigma_a - \frac{1}{d^2} \left(\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d}{d_1 \sin \varphi_1} \right) \sigma_b + \\ &+ \frac{1}{d^2} (\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi) \sigma_c - \frac{10d}{\delta^3} M_c'' = 0. \end{aligned}$$

把数字代入后，得（例如 $\frac{F_1}{3} = \frac{0.4 \times 0.12}{3} = 0.016$ 等）

$$\begin{aligned} 0.016 \sigma_a'' + 0.008 \sigma_b'' + 1.938 m_c &= 0, \\ 0.008 \sigma_a'' + 0.0444 \sigma_b'' + 0.0142 \sigma_c'' - 3.244 m_c &= 0, \\ 0.0142 \sigma_b'' + 0.0710 \sigma_c'' + 1.306 m_c &= 0, \\ 1.938 \sigma_a - 3.244 \sigma_b + 1.306 \sigma_c + 6.57 \times 10^4 m_c &= 0. \end{aligned}$$

求本征值的特征方程为

1) 参见 [3] 表 18 (新版为表 26)。

$$\begin{vmatrix} 0.016\lambda^2 & 0.008\lambda^2 & 0 & 1.938 \\ 0.008\lambda^2 & 0.0444\lambda^2 & 0.0142\lambda^2 & -3.244 \\ 0 & 0.0142\lambda^2 & 0.0710\lambda^2 & 1.306 \\ 1.938 & -3.244 & 1.306 & 6.57 \times 10^4\lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

由此方程求出本征值为

$$\lambda^4 = 0, \quad \lambda^2 = \pm 0.1091.$$

相应于本征值 $\lambda^2 = 0$ 的本征应力状态是均匀拉伸和弯曲, 它们的计算与普通的梁完全一样, 不去讨论它. 相应于 $\lambda^2 = 0.1091$ 的本征函数为

$$\sigma_a = 4.55, \quad \sigma_b = -3.01, \quad \sigma_c = 1.07, \quad m_c = 27.7 \times 10^{-4}.$$

相应的位移表示在图 2 中.

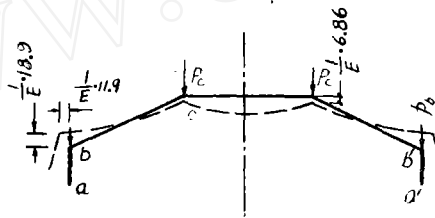


图 2

方程(32)成为

$$f^{IV} + 0.012f = \frac{13.72}{E} p_c - \frac{35.8}{E} p_b.$$

当两端铰支时, 边界条件为

$$f'' = 0, \quad f = 0, \quad \text{当 } z = \pm 5 \text{ 时.}$$

当 $p_c = 100$ 公斤/米, $p_b = 0$ 时, 求得

$$f = \frac{10^4}{E} (11.3 + 3.44 \operatorname{ch} 0.234z \cos 0.234z + 6.71 \operatorname{sh} 0.234z \sin 0.234z).$$

把它代入(20)式, 所得的 M 与[3]中的精确结果符合. σ 的非双曲函数项不同, 则是因为尚需加入相当于弯曲的应力. 比较起来, 本文的计算简单多了.

展开成截面上的本征函数的方法有助于把联立微分方程分离. 在处理各种不同的载荷与 z 方向的边界条件时比较方便, 而且得到的是精确解. 若按梁振动的本征函数在 z 方向展开, 则在载荷具有局部影响之处, 例如在集中载荷作用之处而 λL 又比较大时, 以及在支座处, 得到的解将不够准确.

为说明问题起见, 考虑上述截面壳体的一个三跨连续壳的情形(图 3). 这时微分方程与上面一样, 本征函数等也不必重求, 只需把边界条件改变一下即可. 在端点处, 有

$$f'' = f = 0;$$



图 3

在中間支座处, 有

$f = 0$, f' 和 f'' 連續.

計算的进行过程与弹性地基上梁的情形完全一样. 相应于弯曲的情形則与普通的連續梁一样. 这个問題如要按[3]中所介紹的方法来計算, 就麻煩得很了.

胡海昌同志看了本文的初稿, 并提出了宝贵的意見, 作者向他表示深切的感謝.

参 考 文 献

- [1] Власов, В. З., Общая теория оболочек, ГИТТЛ М-Л, 1949 (有中譯本).
 [2] Джанелидзе, Г. Ю. и Пановко, Я. Г., Статика упругих тонкостенных стержни, ОГИЗ Госгехиздат, 1948 (有中譯本, 彈性薄壁杆件的靜力学, 胡海昌, 解伯民譯, 科学出版社, 1955, 第五章).
 [3] Власов, В. З., Тонкостенные пространственные систем, Государственное издательство строительной литературы, Москва, 1949 或 1958, (有中譯本).
 [4] 胡海昌, 鍾万鋐, 关于含有流动液体管道的弯曲振动, 印度第三屆理論及应用力学會志, 1957 (Hu Hai-chang and Tsoon Wan-shia, On the flexural vibrations of a pipe line containing flowing fluid, Proceedings of the Third Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Bangalore, India, Dec. 1957).

THE SOLUTION OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS BY EIGENFUNCTION EXPANSION WITH RESPECT TO TRANSVERSE COORDINATE

TSOON WAN-SHIA

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The theory of orthotropic cylindrical shells was established by V. Z. Vlasoff in Part IV of his monograph [1]. He obtained the following pair of differential equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2(\sigma h)}{\partial x^2} + \Omega M &= P, \\ \Omega \sigma - \frac{E}{D} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

His method of solution consists in expanding in series of the eigenfunctions of the transverse vibration of beams with respect to the longitudinal coordinate.

In this paper, the expansion is carried out with respect to the transverse coordinate in series of appropriate eigenfunctions. The coefficients satisfy equations similar to those of elastically supported beams. The present expansion converges more rapidly than that of Vlasoff, especially in the vicinity of concentrated loads and supports.

Numerical example of a prismatic cylindrical shell is given at the end of this paper.