

自由分子流中鏡面反射模型是否自相矛盾?*

——Krzywoblocki “論自由分子流的基础观点”一文的錯誤

沈 青

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文指出了美国力学工作者 Krzywoblocki 在他的文章[1]中所犯的两个推理上的錯誤, 即: (1)在計算反射分子的动量流时, 搞乱了反射方向; (2)把分子的动量流量和物体所受的压力錯誤地等同起来, 事实上在反射时, 它們具有相反的符号. 由于这些錯誤, 他得到了鏡面反射模型自相矛盾的結論, 即: 要么 $p_r \approx p_i, \tau_r \approx -\tau_i$; 要么如令 $p_r = p_i, \tau_r = -\tau_i$, 則將导致物理上荒謬的条件. 我們利用他的計算证明了 $p_r = p_i, \tau_r = -\tau_i$ 是完全正确的. 在 [1]中还列举了鏡面反射中三种理論上可能的法向速度变化情况: a) $\xi_i^{(a)} = -\xi' + e_1 U^{[2]}$, b) $\xi_i^{(b)} = \xi' + e_1 U^{[3]}$, c) $\xi_i^{(c)} = -\xi' - e_1 U^{[4]}$; 并证明了 c) 是应该抛弃掉的, 但认为似乎不能分辨其余哪一种是唯一可能的. 我們证明了仅第一种, 即錢学森所建議的那一种是可能的.

Krzywoblocki 在他的文章[1]中, 主要想說明, 在自由分子流理論的分子-表面相互作用問題中有必要进行方法上和理論工具上的改进, 但是他依据了鏡面反射模型自相矛盾的錯誤論断來說明这点. 本文为了指出他的錯誤, 不免要簡短地重复他的一些論述.

令 x', y', z' 是与静止的稀薄气体相联系的直角坐标系. 法向方向为 x' 軸的表面 S 以速度 $\vec{U}(e_1 U, e_2 U, e_3 U)$ 在此气体中运动, 其中 e_1, e_2, e_3 是 \vec{U} 的方向余弦. 如果引入与运动物体相联系的坐标系 x, y, z (x, y, z 与 x', y', z' 平行), 那么, 如果气体分子对于 x', y', z' 的速度(热运动速度)为 ξ', η', ζ' , 則在 x, y, z 坐标系中的速度分量 ξ, η, ζ 将滿足下式:

$$\xi = \xi' - e_1 U, \quad \eta = \eta' - e_2 U, \quad \zeta = \zeta' - e_3 U. \quad (1)$$

在 x, y, z 坐标系中, 气体分子在单位時間内传給 S 表面单位面积且在方向余弦为 e'_1, e'_2, e'_3 方向的动量流为

$$\begin{aligned} M_i = & -\rho(h\pi^{-1})^{3/2} \int_{-\infty}^0 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \xi(e'_1 \xi + e'_2 \eta + e'_3 \zeta) \times \\ & \times \exp\{-h[(\xi + e_1 U)^2 + (\eta + e_2 U)^2 + (\zeta + e_3 U)^2]\} d\zeta = \\ & = -\frac{1}{2} \rho U^2 \{ [U(\pi h)^{1/2}]^{-1} (e_1 e'_1 + e_2 e'_2 + e_3 e'_3) \exp[-h(e_1 U)^2] + \\ & + [e'_1 (2hU^2)^{-1} + e_1 (e_1 e'_1 + e_2 e'_2 + e_3 e'_3)] \cdot [1 + \operatorname{erf}(e_1 U h^{1/2})] \} \end{aligned} \quad (2)$$

(可參看[1]之(1.14)和(1.14 a)); 这里 ρ 是密度,

$$h = (2RT)^{-1}. \quad (3)$$

* 1962年4月12日收到.

(2)式实际上是分子在单位時間、經单位面积在 (e'_1, e'_2, e'_3) 方向的动量流量。在鏡面反射中,它与入射分子传给物体表面的压力相等。对此应做如下的理解:弹性分子与弹性表面的碰撞可以分为入射阶段和反射阶段,第一阶段末它們具有最大形变,达到相对静止,气体分子的动量,完全传递给物体表面;因(2)式是每个分子入射阶段单位時間对单位面积的动量传递之和,故亦为物体表面由于分子在入射阶段作用所受的压力。但在第二阶段,即反射阶段,物体表面与分子的形变逐渐恢复,至它們完全分离为止,分子带走一定的动量,同时传给表面以相反方向的动量。这时分子的动量流与物体表面因分子在反射阶段的作用而受的压力具有相反的符号。

为了求分子在入射阶段使物体受的正压力,应在(2)式中令 $e'_1 = -1, e'_2 = e'_3 = 0$: 为了求剪切应力,则应令 $e'_2 = -1, e'_1 = e'_3 = 0$ (不失一般性可以认为 $e_3 = 0$)。

为了計算反射分子的动量流, Krzywoblocki 在[1]中列举了三种“理論上可能的”反射机理:

a) 分子与物体相对速度的法向分量改变方向(錢学森的假設^[2])

$$\xi_r^{(a)} = -\xi = -\xi' + e_1 U, \quad \eta_r = \eta, \quad \zeta_r = \zeta;$$

b) 分子宏观速度 \bar{U} 的法向分量改变方向(Heinemann 的假設^[3])

$$\xi_r^{(b)} = \xi' + e_1 U, \quad \eta_r = \eta, \quad \zeta_r = \zeta;$$

c) 分子热运动速度改变法向分量方向(Krzywoblocki 的假設^[4])

$$\xi_r^{(c)} = -\xi' - e_1 U, \quad \eta_r = \eta, \quad \zeta_r = \zeta;$$

这里 ξ_r, η_r, ζ_r 是 x, y, z 坐标系中反射后的速度分量。

Krzywoblocki 在[1]中的計算表明:

$$n_r^{(a)} = n_r^{(b)} = n_i, \quad \text{而} \quad n_r^{(c)} \neq n_i$$

[这里 n 是单位時間从单位面积入射的(i)或反射的(r)分子数目],从而証明了 c) 是不合理的,应该除去。

利用 a), b) 两种假設計算出反射分子单位時間从 S 的单位面积带走的在 (e'_1, e'_2, e'_3) 方向的动量流,它們給出相同的結果:

$$M_r = M_r^{(a)} = M_r^{(b)} = \frac{1}{2} \rho U^2 \{ [U(\pi h)^{1/2}]^{-1} (e_1 e'_1 - e_2 e'_2 - e_3 e'_3) \exp[-h(e_1 U)^2] + [(2hU^2)^{-1} e'_1 + e_1 (e_1 e'_1 - e_2 e'_2 - e_3 e'_3)] [1 + \operatorname{erf}(e_1 U h^{1/2})] \} \quad (4)$$

(見[1]之(3.4)式)。

这里(4)式是分子带走的动量流量,而并非物体在 (e'_1, e'_2, e'_3) 方向所受的压力。在(4)中如令 $e'_1 = -1, e'_2 = e'_3 = 0$, 我們并没有得到 P_r , 而得到 $-P_r$; 如令 $e'_2 = -1, e'_1 = e'_3 = 0$, 我們將得到的不是 τ_r , 而是 $-\tau_r$ 。Krzywoblocki 沒有注意到这一点,在[1]中他实际上将 P_r 与 $M_r(e'_1 = -1, e'_2 = e'_3 = 0)$ 及 τ_r 与 $M_r(e'_2 = -1, e'_1 = e'_3 = 0)$ 錯誤地等同了起来,这是他的錯誤之一。

現在我們利用(2), (4) 两式来証明 $P_r = P_i, \tau_r = -\tau_i$ 。在(2)式中令 $e'_1 = -1, e'_2 = e'_3 = 0$, 我們有分子在入射阶段产生的正压力:

$$P_i = M_i^{(p)} = -\frac{1}{2} \rho U^2 \{ [U(\pi h)^{1/2}]^{-1} (-e_1) \exp[-h(e_1 U)^2] + [-(2hU^2)^{-1} + e_1 (-e_1)] [1 + \operatorname{erf}(e_1 U h^{1/2})] \}; \quad (5)$$

如令 $e'_2 = -1$, $e'_1 = e'_3 = 0$, 我們得到分子在入射阶段产生的剪切应力的公式:

$$\begin{aligned} \tau_i = M_i^{(\tau)} = & -\frac{1}{2} \rho U^2 \{ [U(\pi h)^{1/2}]^{-1} (-e_2) \exp[-h(e_1 U)^2] + \\ & + e_1(-e_2)[1 + \operatorname{erf}(e_1 U h^{1/2})] \}. \end{aligned} \quad (6)$$

在(4)式中令 $e'_1 = -1$, $e'_2 = e'_3 = 0$, 即得到带有负号的分子在反射阶段产生的正压力:

$$\begin{aligned} -P_r = M_r^{(p)} = & \frac{1}{2} \rho U^2 \{ [U(\pi h)^{1/2}]^{-1} (-e_1) \exp[-h(e_1 U)^2] + \\ & + [-(2hU^2)^{-1} + e_1(-e_1)][1 + \operatorname{erf}(e_1 U h^{1/2})] \}; \end{aligned} \quad (7)$$

令 $e'_2 = -1$, $e'_1 = e'_3 = 0$, 我們得到带有负号的分子在反射阶段产生的剪切应力:

$$\begin{aligned} -\tau_r = M_r^{(\tau)} = & \frac{1}{2} \rho U^2 \{ [U(\pi h)^{1/2}]^{-1} \cdot e_2 \cdot \exp[-h(e_1 U)^2] + \\ & + [e_1 e_2][1 + \operatorname{erf}(e_1 U h^{1/2})] \}. \end{aligned} \quad (8)$$

比較(5)式与(7)式及(6)式与(8)式, 我們可以看出錢学森的結論^[2]

$$P_r = P_i, \quad \tau_r = -\tau_i \quad (9)$$

是完全正确的.

Krzywoblocki 在这里犯了另一个推理上的錯誤, 即“重复地”估計了反射作用. 在 a) 假設下, 在 $e_1 = \sin \theta$, $e_2 = \cos \theta$, $e_3 = 0$ 的特例中, 令 $\xi^{(a)} = -\xi = -\xi' + \sin \theta U$, 我們即已估計了反射作用(譬如, 令 $\xi' = -200$, $\sin \theta = 0.5$, $U = 150$, 則 $\xi = -275$, $\xi^{(a)} = 275$). 但 Krzywoblocki 却认为, 为了估計反射作用, 除了要令 $\xi^{(a)} = -\xi$ 之外, 还要在这式中取 $e_1 = -\sin \theta$, $e_2 = \cos \theta$, $e_3 = 0$. 这是多余的(如果这样, 在上面的例中, 我們将得出 $\xi = -275$, $\xi^{(a)} = 125$, 这显然是錯誤的). 他的表 I 和表 II 就是在这种概念下制出的, 同时还弄反了 P_r 与 τ_r 的符号, 因此没有什么意义. 但是可以指出, 表中的 P_r 与 τ_r 改变符号以后, 表 I 的第五行和表 II 的第一行是仅仅可用的两行, 这时它們与我們的(5), (7)及(6), (8)在 $e_1 = \sin \theta$, $e_2 = \cos \theta$, $e_3 = 0$ 情况下完全相同.

應該讲, 錢学森的假設 a) 和他的結論(9)是十分明显的. 因为根据对每一个分子反射的分析, 可以精确地得出这个結論, 没有什么理由設想, 在简单的求和后, 这結果会改变. Krzywoblocki 想通过計算来驗證錢学森这个結論的正确性, 但由于他的不正确的推理, 而誤认为这結論是錯誤的. 我們看到, 正确的推理和計算完全証实了錢学森的結論.

我們还想指出, 虽然 b) 情况和 a) 情况給出同样的宏观結論(即按照它們計算出来的反射动量流和能量流量完全相同^[1]), 但并不应象 Krzywoblocki 一样认为它們都是正确的. 事实上 b) 情况(Heineman 的假設^[3]) 在物理上是不正确的. 不能想象分子在相对运动中能够“感觉”出自己运动的哪一部分是宏观的, 哪一部分是微观的. 它的不合理性在于物理上是不可能的. 我們还是用最简单的数字例子來說明这点. 設 $\xi' = -200$, $e_1 = 0.5$, $U = 150$, 那么 $\xi^{(b)} = -200 + 75 = -125$, 即在一种可能的入射情况下, 分子按照 b) 的假設反射后, 似乎穿越了物体表面, 繼續沿与 x 軸相反的方向运动, 这在物理上是不可能的.

順便指出[1]中的(1.38)式

$$C_D = 2\cos^2 \eta = 2(\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta \sin \beta)^2$$

(这里用了[1]的記号)并没有象他提到那样估計了离心力的作用,而不过是原始牛頓公式对于有攻角旋轉体的簡單应用而已。

我們指出了[1]中的錯誤,証明了在“自我圓滿性”这点上是不能否定鏡面反射模型的。但是我們很同意 Krzywoblocki 关于研究分子-表面相互作用問題中应利用量子力学和統計流体动力学这个意見,因为实际上分子-表面相互作用很复杂,是不能用鏡面反射模型或完全扩散反射模型描述的,而决定它的机理,不是經典力学可以胜任的。

参 考 文 献

- [1] Krzywoblocki, M. Z. v., On the fundamental aspects of free molecule flow, *Rarefied gas dynamics*, Proceedings of the first international symposium held at Nice, edited by F. M. Devienne, Pergamon Press, 1960, 352—366.
- [2] Tsien, H. S. (錢学森), *Superaerodynamics, mechanics of rarefied gases*, *J. Aero. Sci.*, **13**, 12, Dec. 1946, 653—664.
- [3] Heineman, M., Theory of drag in highly rarefied gases, *Comm. Pure Appl. Maths.*, **1**, 3, Sept. 1948, 259—273.
- [4] Krzywoblocki, M. Z. v., On some problems in free molecule-slip flow regimes, *Acta Phys. Austriaca*, **9**, 3—4, 1955, 216—257.

DOES THE MODEL OF SPECULAR REFLECTION IN FREE MOLECULE FLOW CONTRADICT ITSELF? — ABOUT THE MISTAKES OF M. Z. V. KRZYWOBLOCKI'S PAPER "ON THE FUNDAMENTAL ASPECTS OF FREE MOLECULE FLOW"

SHEN CHING

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In the present paper, two mistakes in reasoning of M. Z. v. Krzywoblocki's work [1] are pointed out, namely: (1) on calculating the reflected momentum the direction of reflection had been mishandled; (2) the momentum flux carried by the molecules and the stress suffered by the surface had been incorrectly identified (in fact they are, in the case of reflection, directed opposite to each other and hence have the different signs). Due to these two mistakes, he drew the unjustifiable conclusion that the model of specular reflection contradicts itself, namely: either $P_r \cong P_i$, $\tau_r \cong -\tau_i$; or, if $P_r = P_i$, $\tau_r = -\tau_i$, which would be physically absurd. Using his calculation we have proved that Tsien's suggestion $P_r = P_i$, $\tau_r = -\tau_i$ is correct. In [1], Krzywoblocki enumerated three "theoretically possible" cases of alteration in the normal velocity component under the specular reflection: a) $\xi_r^{(a)} = -\xi' + e_1 U^{[2]}$, b) $\xi_r^{(b)} = \xi' + e_1 U^{[3]}$, c) $\xi_r^{(c)} = -\xi' - e_1 U^{[4]}$, and showed that the case c) must be excluded, but he suggested that it seems impossible to establish which of the remainders is the correct one. In a simple example, we have shown that the case suggested by Tsien is physically the only possible one. Pointing out the mistakes of M. Z. v. Krzywoblocki's paper, we nevertheless share his opinion that it is necessary to use the quantum mechanics and statistical fluid dynamics to solve the problem of molecule-surface interaction.