第3卷 第1期 力学学报 Vol. 3, No. 1
1959年1月 ACTA MECHANICA SINICA Jan., 1959

在均匀各向異性的孔隙介質中，地下水向不完整井流动的研究*

刘慈群
(中国科学院力学研究所)

提要

用仿射变换，把在均匀各向異性介质中渗流的連續性方程轉換成拉普拉斯方程. 然后根据在空間中，"汇点"所引起的势場(滲流場)的迭加原則，来解决所提出的問題.

前言

均匀各向异性的孔隙介質是由顆粒成份不同的成层土所形成的，因此它的透水性带有方向性，并且沿着层理面的滲透系数 K_t 大于层理面法綫方向的滲透系数 K_n.

假如我們在成层土中打一口不完整井，那么地下水就在人工造成的水头差作用下，經过孔隙介質作定常的滲流. 本文就是研究：在这种条件下孔隙介質中水头分布的規律，以及如何計算不完整井的流量和孔隙介質的各向异性是怎样影响不完整井的流量.

我們已知，地下水在各向异性孔隙介質中滲流滿足下面的水流連續性方程：

$$K_t\cdot\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)+K_n\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

式中 S——測压水位降深.

若令

$$\xi=\sqrt{K_n}\cdot x,\qquad \eta=\sqrt{K_n}\cdot y,\qquad \zeta=\sqrt{K_t}\cdot z,$$

則(1)式变换为拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2}=0 \tag{2}$$

从(2)式可知：地下水在孔隙介質中的流动与电荷在导体中流动相似，因此，可以借助电学的方法和實驗来研究地下水的运动. 我們可以認为地下水向不完整井的流动完全相似于地下水向"汇綫"的流动，所謂"汇綫"就是由无穷多"汇点"所組成的綫. 因此研究地下水向不完整井的流动就化为研究地下水向"汇点"及"汇綫"的流动. 以上就是运用鏡象法和迭加原理来解决所提問題的基础.

一、在无限孔隙介質中，地下水向"汇点"的流动

使坐标原点放在"汇点"上(图1). 由于汇点的作用，在无限介質中所引起的測压水位

* 1958年6月24日收到.

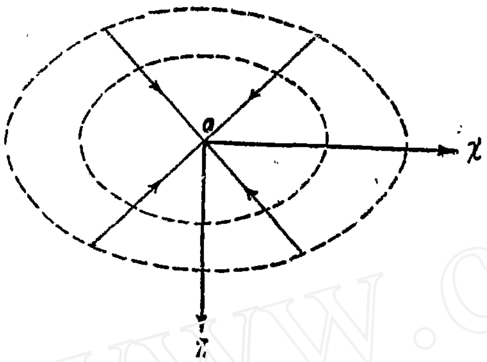

图1 均匀各向异性介质中的“汇点”渗流場

降深 S，根据(2)式的积分应为

$$S = \frac{C}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}, \tag{3}$$

式中 C 为积分常数．

把 x, y, z 的値代入(3)式，得

$$S = \frac{C}{\sqrt{K_n}\cdot\sqrt{x^2+y^2+\lambda^2 z^2}}, \tag{4}$$

式中 $\lambda = \sqrt{\frac{K_t}{K_n}}$ 为孔隙介质的各向异性系数．

由(4)式可知，在均匀各向异性的孔隙介质中，由于“汇点”的作用所产生的等测压水位降深面或等水头面

$$x^2+y^2+\lambda^2 z^2 = \frac{C^2}{K_n S^2} = 常数 \tag{5}$$

是一簇繞 z 軸旋轉的椭圆曲面（見图1）．

根据达尔西定律，沿坐标軸滲透速度 v 的矢量分量为

$$v_x = K_t\cdot\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{K_t}{\sqrt{K_n}}\cdot\frac{Cx}{(x^2+y^2+\lambda^2 z^2)^{3/2}}, \tag{6}$$

$$v_y = K_t\cdot\frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{K_t}{\sqrt{K_n}}\cdot\frac{Cy}{(x^2+y^2+\lambda^2 z^2)^{3/2}}, \tag{7}$$

$$v_z = K_n\cdot\frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{K_t}{\sqrt{K_n}}\cdot\frac{Cz}{(x^2+y^2+\lambda^2 z^2)^{3/2}}; \tag{8}$$

且滿足比例式：

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_y}{y} = \frac{v_z}{z}. \tag{9}$$

因此流綫是一些向原点（汇点）汇集的直綫．也就是說，介質的各向异性不改变流綫的形状．

沿着径向方向的滲透速度 v 若采用球坐标系为：

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \frac{C\cdot K_t}{\sqrt{K_n}}\cdot\frac{1}{(\sin^2\theta+\lambda^2\cos^2\theta)^{3/2}}\cdot\frac{1}{R^2}. \tag{10}$$

現在求常数 C_1：以原点为中心，作一半径为 R 的球，因此通过該球面的流量 q 为

$$q = \iint_S v\cdot dS = 2\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} v\cdot R^2\cdot\sin\theta\cdot d\theta.$$

将公式(10)中的 v 値代入上式，并引入新变量 $u = \frac{[1+(\lambda^2-1)\cdot\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}}{\cos\theta}$，积分后得

$$q = \frac{C\cdot K_t}{\sqrt{K_n}}\cdot 2\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(\sin^2\theta+\lambda^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{4\pi\cdot C\cdot K_t}{\sqrt{K_n}}\int_\lambda^\infty\frac{du}{u^2} = 4\pi\sqrt{K_t}\cdot C,$$

$$\therefore \quad C=\frac{q}{4\pi\cdot\sqrt{K_t}}.$$

将C值代入(4)式卽得(由于"汇点"的作用在无限均匀各向异性孔隙介质中所引起的)测压水位降深方程：

$$S=\frac{q}{4\pi\cdot\sqrt{K_t\cdot K_n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\lambda^2z^2}}. \tag{11}$$

采用圓柱坐标(因我們所討論的問題系軸对称)，則(11)式变为

$$S=\frac{q}{4\pi\sqrt{K_t\cdot K_n}}\cdot\frac{1}{r^2+\lambda^2z^2}, \tag{12}$$

若"汇点"距坐标面 X-Y 为 ζ，則上式变为

$$S=\frac{q}{4\pi\sqrt{K_t\cdot K_n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+\lambda^2(z-\zeta)^2}}. \tag{13}$$

二、在半无限孔隙介质中，地下水向"汇点"的流动

半无限孔隙介质的分界面就是半无限成层含水层的分界面，卽隔水頂板．因此垂直于分界面的滲透速度应等于零，卽

$$v_n=K_n\cdot\frac{\partial S}{\partial n}=0. \tag{14}$$

設"汇点"A距分界面(隔水頂板)为ζ(图 2)．

根据鏡象法的原理："汇点"A在半无限介质中所引起的测压水位降深应等于"汇点"A及其鏡象A'(以分界面为鏡面)在无限介质中所引起的测压水位降深，因为这两种情况所引起的滲流場滿足同样的边界条件(14)．

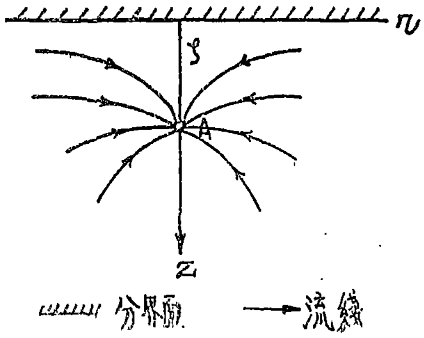

图 2　在半无限介质中，地下水向"汇点"流动图

根据(13)式和迭加原理，"汇点"A在半无限介质中所引起的测压水位降深S应等于

$$S=\frac{q}{4\pi\cdot\sqrt{K_t\cdot K_n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+\lambda^2(z-\zeta^2)^2}}+\frac{q}{4\pi\cdot\sqrt{K_t\cdot K_n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+\lambda^2(z+\zeta)^2}}. \tag{15}$$

三、在半无限孔隙介质中，地下水向"汇綫"的流动

我們認为"汇綫"是由"汇点"組成的，假定經过"汇綫"的流量Q均匀分布在长度为l的"汇綫"上，这样經过距分界面(頂板)为ζ的微小"汇綫"段$d\zeta$(图 3)的微小流量为$dQ=\frac{Q}{l}d\zeta$．因此微小"汇綫"段在半无限介质中任一点所引起的测压水位降深，根据(15)式，若将q用dQ代，S用dS代，則得

$$dS=\frac{Q}{4\pi\cdot\sqrt{K_t\cdot K_n}\cdot l}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+\lambda^2(\zeta-z^2)}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+\lambda^2(\zeta+z)^2}}\right]\cdot d\zeta.$$

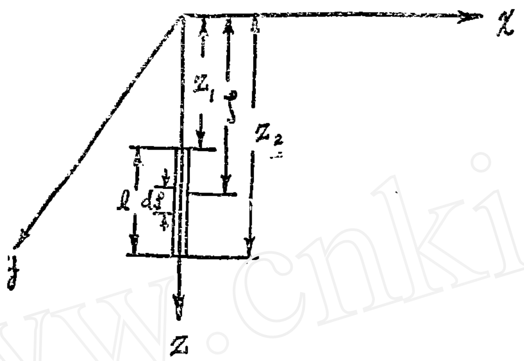

图 3 在半无限介质中，"汇綫"(井)計算略图

根据迭加原理，沿着"汇綫"长度 l，从 z_1 到 z_2 积分上式，得到在汇綫作用下，测压水位降深的方程：

$$S=\frac{Q}{4\pi K_t\cdot l}\left[\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{z+z_2}{r}-\mathrm{Arsh}\,\lambda\cdot\frac{z+z_1}{r}-\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{z-z_2}{r}+\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{z-z_1}{r}\right]. \tag{16}$$

式中 Arsh 为反双曲綫正弦函数.

若 $z_1=0$，$z_2=l$；这相当于"汇綫"的一端在分界面上，則上式簡化为

$$S=\frac{Q}{4\pi\cdot K_t\cdot l}\left[\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{l+z}{r}+\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{l-z}{r}\right]. \tag{17}$$

当 $K_t=K_n=K$ 时，这相当于各向同性孔隙介质的情况，即 $\lambda=1$，則(17)式变为

$$S=\frac{Q}{4\pi K\cdot l}\cdot\left[\mathrm{Arsh}\frac{l+z}{r}+\mathrm{Arsh}\frac{l-z}{r}\right]. \tag{17a}$$

四、不完整井流量公式的討論

严格地講，流量均匀分布的"汇綫"所引起的滲流場与半径为 r_0，长度为 l 的不完整井所引起的滲流場是不完全重合的. 但根据在各向同性介质中的"水电比拟"实驗研究[1]証实：当 $r=r_0$，$z=0.75\,l$ 时，如取 S 等于井中测压水位降深 S_0，則所得出的計算流量与实际流量能最好地符合. 在均匀各向异性介质的情况，我們仍然采用上述均匀各向同性的实驗結論；这是由于方程(1)可以通过仿射变换变为方程(2). 于是令 $r=r_0$；$z=0.75l$；$S=S_0$；代入(17)式，得在均匀各向异性半无限介质中不完整井的流量公式：

$$Q=\frac{4\pi K_t\cdot l\cdot S_0}{\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{1.75l}{r_0}+\mathrm{Arsh}\cdot\lambda\frac{0.25\,l}{r_0}}. \tag{18}$$

通常 $\frac{l}{r_0}\gg 1$，則(18)式簡化为 $\left(根据\ \mathrm{Arsh}\frac{l}{r_0}\doteq\ln\frac{2l}{r_0}\right)$

$$\boxed{Q=\frac{2\pi K_t\cdot l\cdot S_0}{\ln\cdot\lambda\cdot\frac{1.32\,l}{r_0}}}. \tag{19}$$

根据"水电比拟"实験研究[1]，有限孔隙介質的下分界面（隔水底板）对流量的影响很小，假使井（过滤器）的长度不超过 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ 孔隙介質（成层土）的厚度，則其誤差不超过 10%；这个結論也适用于各向异性的情况.

当 $\lambda=1$ 时，代入（19）式，得在各向同性半无限孔隙介質中不完整井的巴布什金（Бабушкин）流量公式[2]：

$$Q_0=\frac{2\pi K\cdot l\cdot S_0}{\ln\frac{1.32\,l}{r_0}}. \tag{20}$$

令 $\frac{Q}{Q_0}$ 表示孔隙介質的各向异性对流量影响的程度，据（19），（20）式，得

$$\frac{Q}{Q_0}=\frac{\ln\frac{1.32\,l}{r_0}}{\ln\cdot\lambda\cdot\frac{1.32\,l}{r_0}}=\frac{\lg\frac{1.32\,l}{r_0}}{\lg\frac{1.32\,l}{r_0}+\lg\lambda}. \tag{21}$$

分析上式可得：（1）随着介質各向异性系数的增加，各向异性介質中不完整井的流量是在逐渐减小，但减小得較慢；（2）随着 l 的减小（l 也表示打开含水层的程度），介質的各向异性对井流量的影响逐渐增大.

結　　論

当不完整井工作（抽水）时，在各向异性孔隙介質中，测压水位降深的分布为：

$$S=\frac{Q}{4\pi K_t l}\cdot\left[\operatorname{Arsh}\cdot\sqrt{\frac{K_t}{K_n}}\cdot\frac{l+z}{r}+\operatorname{Arsh}\cdot\sqrt{\frac{K_t}{K_n}}\cdot\frac{l-z}{r}\right]. \tag{17}$$

不完整井的流量公式为

$$Q=\frac{2\pi K_t\cdot l\cdot S_0}{\ln\sqrt{\frac{K_t}{K_n}}\cdot\frac{1.32\,l}{r_0}}. \tag{19}$$

分析公式（17），（17a）及（19），（20），得：如果在滲流場中，使平行于层理面的尺寸不变，垂直于层理面的尺寸相应地縮放 $\sqrt{\frac{K_t}{K_n}}$ 倍，則这个滲透系数为 $\sqrt{K_t\cdot K_n}$ 的均匀的各向同性的滲流場将与实际的各向异性滲流場等值，于是各向异性介質的滲流場（軸对称流）可以当作各向同性介質的滲流場来研究.

参　考　文　献

[1] Абрамов, С. К., Бабушкин, В. Д., Методы расчета притока воды к Буровым скважинам (1955), стр. 83—98.

[2] Абрамов, С.К., Бабушкин, В.Д., 同前书, стр. 37.

О ПРИТОКЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Лю Цы-Цюнь

(Институт Механики АН Кнр)

Резюме

При помощи аффинного преобразования уравнение неразрывности для фильтрации в однородной анизотропной среде сведено к уравнению Лапласа, затем наложением потенциалов скоростей, вызванных пространственными источниками, решается поставленная задача.