在半无限双层含水层中排水管列的滲流計算*

刘 慈 羣

（中国科学院力学研究所）

（一）前言

地表水經过下伏土层滲流到水平排水管列（成无限鏈狀分布）的研究，是合理的进行給水，鹽田冲洗，排水等工程的理論基础．維捷尔尼科夫[1]用复变数函数保角映射的方法，得出一系列排水管滲流計算公式．不足的是他只考虑了均質上的情况，然而实际的地質条件表明：有时下伏土层不是均質的，而是由滲透系数为K_1（上层）和K_2（下层）的双层土所組成，且下层的厚度远大于上层土的厚度．为了簡化計算，实际上可以認为相对于上层土，下层土的厚度为无限大．为此研究在半无限双层含水层中，排水管列的滲流計算有較大的理論和实踐意义．我們如此所考虑的情况和所得計算公式，包括了維捷尔尼科夫所考虑的情况和所得計算公式．不仅如此，所得公式也可以应用在水压驅动油藏成帶狀条件下，求井成鏈狀分布时，單个井产量．

（二）計算

在計算上，可以用“汇点”等价的代替水平排水管的作用．这是由于排水管的半徑比其他綫性尺寸如排水管的埋藏深度小得很多．因此能够用汇点鏡象法来解决所提出的問題．其計算图如图1所示：

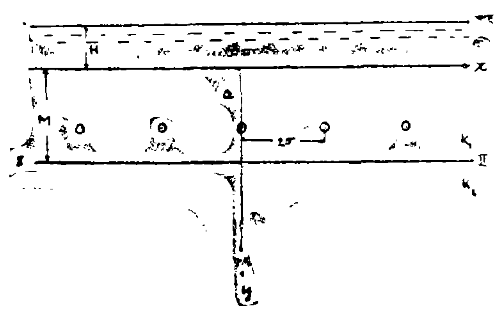

图1 在半无限双层土中水平排水管列縱剖面图

i 在半无限均質含水层中（分界面为等水头面 I-I）的汇点列（成鏈狀分布）在滲流场内所引起的水头分布[2]等于

$$h=\frac{q}{4\pi K_1}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-a)-\cos\frac{\pi x}{\sigma}\right]-\frac{q}{4\pi K_1}\times$$
$$\times\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+a)-\cos\frac{\pi x}{\sigma}\right]+C \qquad (1)$$

式中 q ——單个排水管單位長度上的流量或汇点的强度；

* 1959年1月16日收到．

ln——自然对数；

2σ——排水管間距；

ch——双曲綫余弦；

a——排水管列与分界面的垂直距离；

C——积分常数。

分析(1)式可知：在半无限均質土中，水头分布是由汇点列在无限均質土中所引起的水头分布：

$$h_1=\frac{q}{4\pi K_1}\ln\left[\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-a)-\cos\frac{\pi x}{\sigma}\right]+C_1 \tag{2}$$

及其鏡象(以等水头分界面为鏡面)在无限均質土中所引起的水头分布：

$$h_2=-\frac{q}{4\pi K_1}\cdot\ln\cdot\left[\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+a)-\cos\frac{\pi x}{\sigma}\right]+C_2 \tag{3}$$

之和。若分界面为不滲透面，則(3)式前取正号。因此在解决成鏈狀分布汇点列的問題时，也可以象解决汇点問題时一样，用鏡象迭加法。

ii 因此在无限双层含水层中，位置在上层(第一层)的汇点列在該层所引起的水头分布，等于强度为 q 的汇点列及其鏡象(以滲透系数 K_1 和 K_2 的分界面 II-II 为鏡面)——强度为 λq 的虛汇点列，在滲透系数为 K_1 的无限均質含水层中所引起的水头分布[3][2]。

$$h_1=\frac{q}{4\pi K_1}\ln\left[\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-a)-\cos\frac{\pi x}{\sigma}\right]+\frac{\lambda q}{4\pi K_1}\times$$
$$\times\ln\left[\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-\overline{2M-a})-\cos\frac{\pi x}{\sigma}\right]+C \tag{4}$$

式中 $\lambda=\dfrac{K_1-K_2}{K_1+K_2}$ 且 $\lambda<1$。

iii 在半无限双层含水层中位置在上层中的鏈狀汇点列在該层中所引起的水头分布，根据鏡象迭加法等于，强度为 q 的汇点列及其在兩面平行鏡間(以 I-I, II-II 为鏡面)所映射的无穷鏡象列——强度为 $-q$ 及 $\pm\lambda^n q$，位置为 $-a$ 及 $\pm(2nM\pm a)$ 的虛汇点列，在滲透系数为 K_1 的无限均質含水层中所引起的水头分布：

$$h_1=\frac{q}{4\pi K_1}\left[\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\lambda^n\times\right.$$
$$\times\left[\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-\overline{2nM-a})-\cos\frac{\pi x}{\sigma}}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-\overline{2nM+a})-\cos\frac{\pi x}{\sigma}}+\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+\overline{2nM+a})-\cos\frac{\pi x}{\sigma}}{\mathrm{ch}\frac{\sigma}{\pi}(y+\overline{2nM-a})-\cos\frac{\pi x}{\sigma}}\right]+C \tag{5}$$

式中 C——与边界条件有关的积分常数。

当 $y=0$ 时，$h=H$；將上述边界条件代入(5)式得 $C=H$。

当 $x=0$(或 $2n\sigma$)，$y=a-r_c$ 时(r_c 排水管半徑)，$h=h_c$(排水管中水头)；將上述边界

值代入(5)式得：

$$h_c=\frac{q}{4\pi K_1}\left[\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}r_c-1}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}2a-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\lambda^n\cdot\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(2nM-2a)-1}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}2nM-1}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(2nM+2a)-1}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}2nM-1}\right]+H \tag{6}$$

从而可得在半无限双层含水层中成鏈狀分布的排水管列的每个排水管流量計算公式：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi a}{\sigma}}{\mathrm{sh}\frac{\pi r_c}{2\sigma}}+B} \tag{7}$$

式中 sh——双曲綫正弦

$$B\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lambda^n\cdot\ln\left[1-\frac{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}a}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}n\cdot M}\right]$$

級数 B 是交錯冪級数，且当 n 增加时，級数項的絕对值急剧下降而趋于零，因此級数 B 是收歛很快的級数[4]。

如果取級数 B 的第一項作为其近似值（这对于許多情况是允許的），根据交錯級数的理論，其最大誤差用第二項来估計（对于实际应用来說是足够精确的）。于是 (7) 式簡化为：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi a}{\sigma}}{\mathrm{sh}\frac{\pi r_c}{2\sigma}}-\lambda\ln\left[1-\frac{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}a}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}M}\right]} \tag{8}$$

根据(8)式所算出的流量比实际流量稍微大些。

微分(5)式，可以求得地表水下滲入土中的速度分布公式：

$$v_{y=0}=-K_1\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{q}{2\sigma}\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sigma}a}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}a-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\lambda^n\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sigma}(2nM-a)}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(2nM-a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}-\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sigma}(2nM+a)}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{\sigma}(2nM+a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}\right]\right\},$$

当 $x=0$ 或 $2n\sigma$ 时，得最大下滲速度

$$v_{\max}=\frac{q}{2\sigma}\left\{\operatorname{cth}\cdot\frac{\pi a}{2\sigma}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\lambda^{n}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(2nM-a)}{2\sigma}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{cth}\frac{\pi(2nM+a)}{2\sigma}\right]\right\}.$$

式中 cth——双曲綫余切函数。

(三)推論

1. 上述結論和討論,对于$\lambda=1(K_2=0)$的情况,卽对厚度为有限的含水层情况,也是对的。于是(7)式变为

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2\sigma}r_c}+B'} \tag{7'}$$

式中 $B'=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\ln\left(1-\dfrac{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{\sigma}nM}\right)$.

若只取一項,級数B'的誤差用第二項 $\ln\left(1-\dfrac{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{\sigma}2M}\right)$來估計,于是(7′)式可簡化为:

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2\sigma}r_c}-\ln\left(1-\dfrac{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{\sigma}M}\right)} \tag{8'}$$

維捷尔尼科夫用保角映射法,得出在上述情况下,排水管列的用橢圓函数表的單个排水管的流量計算公式。由于級数B'是一个收斂較快的級数,因此可以用較簡單的公式(7′)或(8′)來代替維氏流量公式。

2. 当$a=M$时,卽假定排水管埋藏在双层含水层的分界綫上时,則公式(6)应改写为:

$$h_c=\frac{q}{4\pi K_1}\left[\ln\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}r_c-1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}2M-1}+\lambda\ \ln\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}r_c-1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}2M-1}\times\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}4M-1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}2M-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\lambda^{n}\cdot\ln\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}(2nM-2M)-1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}2nM-1}\times\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}(2nM+2M)-1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\sigma}2nM-1}\right]+H \tag{6'}$$

从而可得在上述情况下，單个排水管流量公式：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sigma}M}{\mathrm{sh}\frac{\pi}{2\sigma}r_c}+B''} \tag{9}$$

$$B''=\lambda\cdot\ln\frac{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}M}{\mathrm{sh}\frac{\pi r_c}{2\sigma}\cdot\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sigma}2M}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\lambda^n\ln\left[1-\frac{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}M}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}nM}\right]$$

当 $\lambda=1$ 时，即当排水管埋藏在隔水层上时，并且只取級数的第一項于是公式(9)可写成：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{\mathrm{sh}^3\frac{\pi}{\sigma}M}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2\sigma}r_c\cdot\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sigma}2M}+\ln\left(1-\frac{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}M}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}2M}\right)} \tag{9'}$$

公式(9')也可以用来代替維氏所得的用橢圓函数表的流量公式。

3. 当 $\sigma\to\infty$ 时，这相当于一个排水管的情况；因此

$$\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi a}{\sigma}}{\mathrm{sh}\frac{\pi r_c}{2\sigma}}\to\frac{2a}{r_c};\qquad B=B_0=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lambda^n\cdot\ln\left[1-\frac{a^2}{n^2M^2}\right]$$

(B_0 亦是交錯收斂級数)，于是(7)式簡化为在双层含水层中，單个排水管流量計算公式：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{2a}{r_c}+B_0} \tag{10}$$

取一次近似，(10)式可簡化为：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{2a}{r_c}-\lambda\ln\left(1-\frac{a^2}{M^2}\right)} \tag{10'}$$

4. 当 $\sigma\to\infty$ 且 $\lambda\to1$ 时，这相当于一个排水管在有限深含水层中的情况，于是[4]

$$B_0=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(1-\frac{a^2}{n^2M^2}\right)\equiv\ln\frac{2M}{\pi a}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{M}$$

因而(7)式或(10)式簡化为在有限深含水层中，單个排水管維氏流量計算公式

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln\frac{4M}{\pi r_c}+\ln\cdot\mathrm{tg}\frac{a\pi}{2M}} \tag{11}$$

式中　tg——正切函数。

5. 当 $\lambda\to0(K_1\to K_2)$ 或 $M\to\infty$ 时，这相当于均質地层的情况，于是(7)式簡化为在

无限均質含水层中，成鏈狀排列的單个排水管維氏流量計算公式：

$$q=\frac{2\pi K_1(H-h_c)}{\ln \operatorname{sh}\frac{\pi a}{\sigma}-\ln \operatorname{sh}\frac{\pi r_c}{2\sigma}} \tag{12}$$

6. 公式(7)也可以用在：当帶狀油藏，由两个不同的地質部分組成且一边无限延伸时的情况[5]，这时可把图 1 看作是平面图，*I-I* 是补給边綫，*II-II* 是不同地質部分平面分界綫，于是(7)式改写成通用的形式

$$Q=\frac{2\pi k_1\cdot m\cdot(p_k-p_c)}{\mu\left(\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sigma}r_c}+B\right)} \tag{13}$$

式中　m ——油层厚度；

k_1 ——油层滲透率且 $K_1=\frac{\gamma k_1}{\mu}$，$K_2=\frac{\gamma k_2}{\mu}$；

μ ——石油粘滯系数；

p_k ——补給边綫上的压力($p_k=\gamma\cdot H$)；

p_c ——井中压力($p_c=\gamma h_c$)；

γ ——石油的重率 $\lambda=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$；

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\lambda^n\cdot\ln\left(1-\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}nM}\right);$$

a ——井列至补給边綫的距离；

M ——补給边綫至不同滲透率 k_1 和 k_2 的分界綫的距离；

当帶狀油藏的一边，由于断层或尖灭，是不滲透边界时，若只取級数一項，則公式(13)簡化为：

$$Q=\frac{2\pi k_1\cdot m\cdot(p_k-p_c)}{\mu\left(\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sigma}r_c}\right)-\ln\left(1-\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{\sigma}M}\right)} \tag{14}$$

7. 若排水管埋藏在下层中，它所引起的水头分布等于以分界面为鏡面所映射的无穷鏡象列所引起的水头之和，即求出一定分布的奇点列使其滿足給定的边界条件．于是得：

在下层(排水管列所在层)中水头分布函数为：

$$h_2=\frac{q}{4\pi K_2}\left\{\ln \operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x+\lambda'\ln \operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-\overline{2M-a})-\cos\frac{\pi}{\sigma}x\right.$$
$$\left.-(1-\lambda'^2)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda'^n\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+2nM+a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x\right]\right]\right\}+H \tag{15}$$

在上层(第一层)中水头分布函数为:

$$h_1=\frac{q(1-\lambda')}{4\pi K_1}\left\{\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'^n\cdot\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y-\overline{2nM+a})-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(y+\overline{2nM+a})-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}\right\}+H \tag{16}$$

式中　$\lambda'=\frac{K_2-K_1}{K_2+K_1}$.

因为根据(15),(16)式当 $y=0$ 时, $h_1=H$, 当 $y=M$ 时, $h_1=h_2$, $v_{1y}=v_{2y}\left(K_1\frac{\partial h_1}{\partial y}=K_2\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)$.

現在求排水管的流量,以 $y=a+r_c$, $x=0(2n\sigma)$, $h=h_c$ 代入(15)式得

$$q=\frac{2\pi K_2(H-h_c)}{\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sigma}r_c}+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'^n\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}(nM+a)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}[(n-2)M+a]}} \tag{17}$$

因 $\lambda'<1$, 所以上式分母中級数是收斂級数。

当不考虑排水管間的相互影响, 即假定 $\sigma\to\infty$, 这时公式(17)就簡化为一个排水管在双层土中的流量公式:

$$q=\frac{2\pi K_2(H-h_c)}{\ln\frac{2a}{r_c}+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'^n\ln\frac{nM+a}{(n-2)M+a}} \tag{18}$$

当 $K_1=K_2$ 时,(17)式(18)式就簡化为均質土中公式

$$q=\frac{2\pi K_2(H-h_c)}{\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sigma}r_c}} \tag{19}$$

$$q=\frac{2\pi K_2(H-h_c)}{\ln\frac{2a}{r_c}} \tag{20}$$

微分(16)式,可以求得地表水下滲入土中速度分布公式:

$$v_{y=0}=-K_1\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)_{y=0}=(1-\lambda')\frac{q}{2\sigma}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}a}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}a-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'^n\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sigma}(2nM+a)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\sigma}(2nM+a)-\cos\frac{\pi}{\sigma}x}\right],$$

当 $x=0$ 或 $2n\sigma$ 时，得最大下渗速度

$$v_{\max}=(1-\lambda')\frac{q}{2\sigma}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi a}{2\sigma}+\sum_{n=1}\lambda^{n}\operatorname{cth}\frac{\pi(2nM+a)}{2\sigma}\right].$$

参 考 文 献

[1] Ведерников В. В., *Теория рилтрации, ее приложения в области ирригачич и дренажа.* Г. С. И. 1939.

[2] Чарный И. А., *Подземная Гидромеханика*, ГТТИ. 1948.

[3] 刘慈群，力学学报，2:4, 1958.

[4] Смирнов. В. И., *Курс высшей математики* ГИТТЛ. 1957.

[5] 河・波・克磊洛夫等著：油田开发科学原理，石油工業出版社，1953.

ФИЛЬТРАЦИИ С ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ К ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДРЕНАЖНЫМ ТРУБАМИ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Лю Цы-цюнь

(Институт механики А. Н. КНР)

Резюме

Рассмотрим тот случай, когда водоносный пласт сложен двумя водопроницаемыми слоями, причем мощность нижнего слоя в много раз больше, чем верхнего. На верхных (нижных) слоями заложена бесчисленный множество параллельный дренажный труб, находящыйся на расстоянии 2σ друг от друга.

Будем считать, что мощность нижнего слоя в расчетах бесконечна и примерно в центре трубы находится сток, расход которого на единицу длины труб равен q

Задача решается в настоящей работе методом стоков и отображения.

Откуда найдем выражение расхода.