

隔水层的傾斜度对滲流流量影响的計算

中國科学院力学研究所

刘 慈 羣

生产实践中經常会遇见排水暗管，混凝土壩等工程建筑物修建在有傾斜隔水层的透水岩层(土)上，据作者所知，已有的文献^[1,2]只討論了水平隔水层的情况，因此討論傾斜隔水层情况下，排水暗管，混凝土壩的滲流計算，并估計隔水层坡度 α 对滲流量的影响是有理論和实际意义的。

討論問題的方法是：应用保角变换将有傾斜隔水层的滲流区(題給的)变换为水平隔水层的滲流区(已知的)，然后应用已有的水平隔水层情况下的公式，求得相应的傾斜隔水层情况下的計算公式。

一、排水管的滲流計算

排水管垂直剖面計算图如图 1 所示：

复变数函数

$$\zeta = \frac{T}{\alpha} \ln Z \quad (1)$$

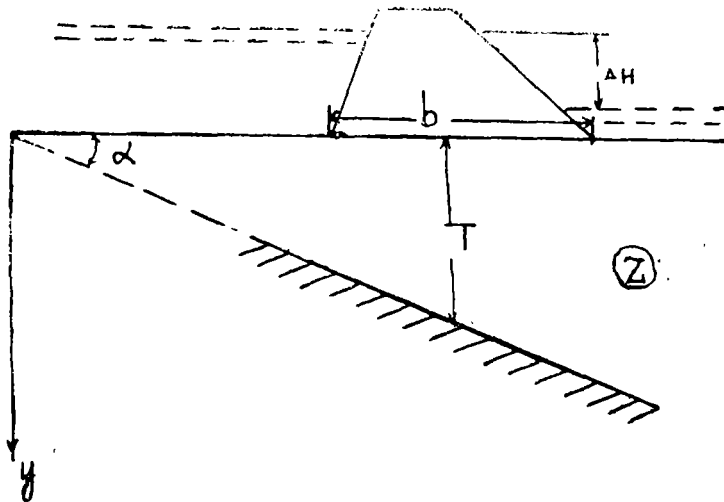


圖 1

把 Z 扇形平面保角变换为 ζ 条形平面，其对应关系如图 1，图 2 所示。

排水管在 Z 平面和 ζ 平面的对应位置用 $Z_0(r_0 \cos \alpha_0, r_0 \sin \alpha_0)$ 和 ζ_0 表示，其对应关系为

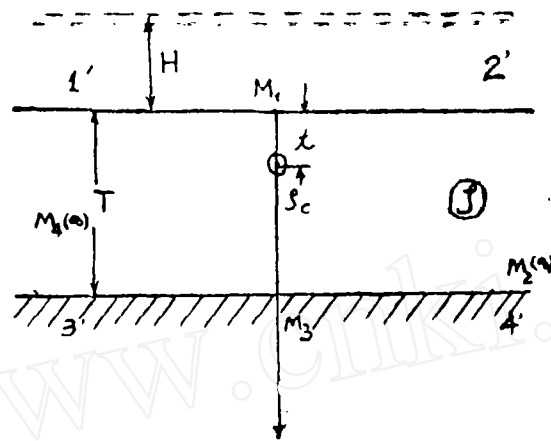


图 2

$$\zeta_0 = \frac{T}{\alpha} \ln Z_0 \quad (2)$$

于是在 ζ 平面排水管埋藏深度为

$$t = \frac{T}{\alpha} \alpha_0 \quad (2')$$

当排水管管径与特征尺寸如排水管埋藏深度之比值小于十分之一，则可以把管径看作小量。于是变换前后的半径 r_c 和 ρ_c 的关系为〔根据(2')式，变换前后的埋藏深度在数量级上是一样的〕

$$\rho_c = \left| \frac{d\zeta}{dZ} \right|_{z=z_0} = \frac{T}{\alpha} \frac{1}{r_0} r_c \quad (3)$$

式中 r_0 及 α_0 ——排水管 Z 平面的径距和倾角。

已知水平隔水层情况下(参阅图2)的排水管单宽流量公式为〔1〕

$$q = \frac{2\pi k(H-h_c)}{\phi} \quad (4)$$

式中
$$\phi = \ln \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \frac{4t - 2\rho_c}{T} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \frac{\rho_c}{T} \right]$$

当
$$\frac{\rho_c}{t} < \frac{1}{10}$$
 时, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \frac{2t - \rho_c}{T} \doteq \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \frac{\rho_c}{T} \doteq \frac{4T}{\pi\rho_c}$.

于是(4)式可以简化为:

$$q = \frac{2\pi k(H-h_c)}{\ln \left[\frac{4T}{\pi\rho_c} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2T} \right]} \quad (4')$$

式中: k ——透水层(土)的渗透系数
 H ——水池边界线(1—2)上的水头
 h_c ——排水管中的水头。

因为经过保角变换后, 排水管流量不变, 因此只要把相应的变换值(2)和(3)代入公式(4')中, 即可得倾斜隔水层情况下(参阅图1)排水管流量公式

$$q = \frac{2\pi k(H-h_c)}{\ln\left[\frac{4\alpha r_0}{\pi r_c} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}\right]} \quad (5)$$

通常排水管半径从0.1米变化到0.25米, 只要埋藏深度相应的在1米到2.5米范围内, 则公式(3)和(5), 都是可以应用的。公式(5)可以应用在给水, 盐田冲洗等工程项目中, 当下垫隔水层是倾斜时。

当隔水层的倾角 α (用弧度表) 较小时, 则可以认为 $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha_0 \approx \operatorname{tg} \alpha_0$, $\frac{\alpha_0}{\alpha} \approx \frac{t}{T}$, $\alpha r_0 \approx T$ [只有当 $\alpha = 0$ 时, 上述近似等式才绝对正确]。如是(5)式就转变为水平隔水层情况下的(4)式。从上可以得出下述结论:

i 当隔水层的倾角 α 不大于 10° 时, 可以用水平情况下的公式(4)计算排水管流量, 其误差可以忽略的小。这是因为当 $\alpha = 10^\circ = \frac{\pi}{18}$ 时, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{18} = 0.176$, 而 $\frac{\pi}{18} = 0.174$, 当用 $\operatorname{tg} \frac{\pi}{18}$ 所造成的误差为 1%, 再经过正切对数运算, 其误差将不会变大。

ii 当隔水层的倾角 α 大于 10° 时, 就应该用倾斜情况下的公式(5)来计算排水管流量。

二、平底壩的渗流计算

平底壩的垂直剖面计算图如图3所示:

同样, 复变函数(1)也把有倾斜隔水层的渗流区变换为水平隔水层的渗流区, 其相应关系如图3, 图4所示。

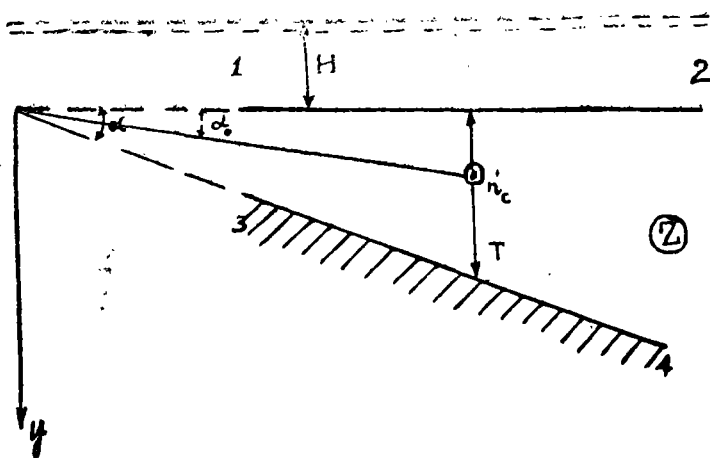


图 3

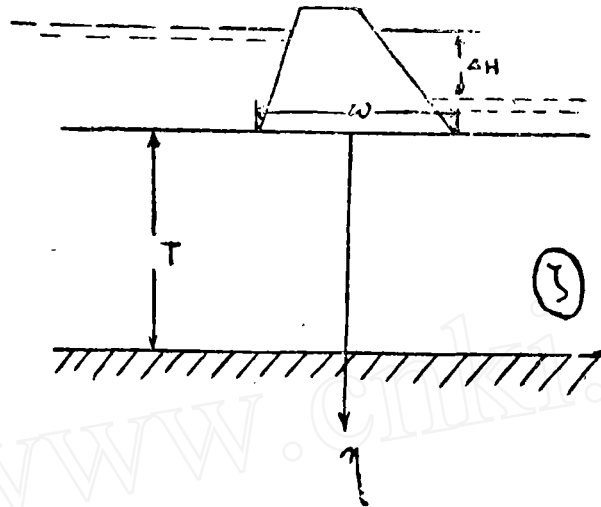


图 4

平底壩壩寬对应關係式為：

$$\omega = \frac{T}{\alpha} \ln \frac{T \operatorname{ctg} \alpha + \frac{b}{2}}{T \operatorname{ctg} \alpha - \frac{b}{2}} - \frac{T}{\alpha} \ln \frac{2T + b \operatorname{tg} \alpha}{2T - b \operatorname{tg} \alpha} \quad (6)$$

已知水平隔水層情況下，經壩下滲流流量計算公式^[1]為：

$$\frac{2Q}{k\Delta H} = \frac{K'}{K} \quad (7)$$

$$\lambda = \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{4T} \quad (8)$$

式中： Q ——單位長度滲流流量。

ΔH ——上、下游水位差。

K ——模數為 λ 的第一類橢圓全積分。

K' ——模數為 $\sqrt{1-\lambda^2}$ 的第一類橢圓全積分。

將(6)式代入(8)式，即可根據(7)式求出隔水層為傾斜的條件下，壩下滲流流量，這時模數 λ 為：

$$\lambda = \operatorname{th} \frac{\pi\omega}{4T} = \operatorname{th} \frac{\pi}{4\alpha} \ln \frac{2T + b \operatorname{tg} \alpha}{2T - b \operatorname{tg} \alpha} \quad (8')$$

當傾斜角 $\alpha=0$ 時， $\lambda = \operatorname{th} \frac{\pi b}{4T}$ ，因為

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \alpha}} \left\{ \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{4} \ln \frac{\left(1 + \frac{b \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2T}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(1 - \frac{b \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2T}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right] \right\} = \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{4} \ln \frac{e^{\frac{b}{2T}}}{e^{-\frac{b}{2T}}} \right] = \\ &= \operatorname{th} \frac{\pi b}{4T} . \end{aligned}$$

$\mu = \frac{b \cdot \text{tg } \alpha}{2T}$ 永远小于 1, 因为 $\frac{b}{2} < T \text{ ctg } \alpha$ 才有实际意义**, 于是 λ 中的对数部分可展成级数:

$$\lambda = \text{th} \left[\frac{\pi}{4\alpha} \ln \frac{1 + \frac{b \cdot \text{tg } \alpha}{2T}}{1 - \frac{b \cdot \text{tg } \alpha}{2T}} \right] = \text{th} \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \left[\mu + \frac{1}{3} \mu^3 + \frac{1}{5} \mu^5 + \dots \right] \right\}$$

当 $\mu \ll 1$, 则 $\lambda = \text{th} \frac{\pi}{2\alpha} \mu = \text{th} \frac{\pi}{4} \frac{b}{T} \frac{\text{tg } \alpha}{\alpha}$.

比如, 当 α 不大于 10° , 且 $T \geq b$ 时则 $\mu = \frac{b \cdot \text{tg } \alpha}{2T} < 0.1$, 又 $\text{tg } \alpha \approx \alpha$. 这时即可以水平情况下的公式, 计算倾斜隔水层中的渗流流量.

对于带有板桩的各种型式的端, 亦可按上述原则计算之.

附 录

公式(4')可以根据下述较简易的保角变换的方法从新直接推导出来, 函数 $\zeta' = \text{th} \frac{\pi \zeta}{2T}$ 把 ζ 平面的条形区(参阅图 2)变换为半无限 ζ' 平面, 其中 $M_4 M_1 M_2$ 对应于水头为 H 的等水头线, $M_4 M_3, M_2 M_3$ 对应隔水底板(流线), 排水管和 ζ' 平面的位置为

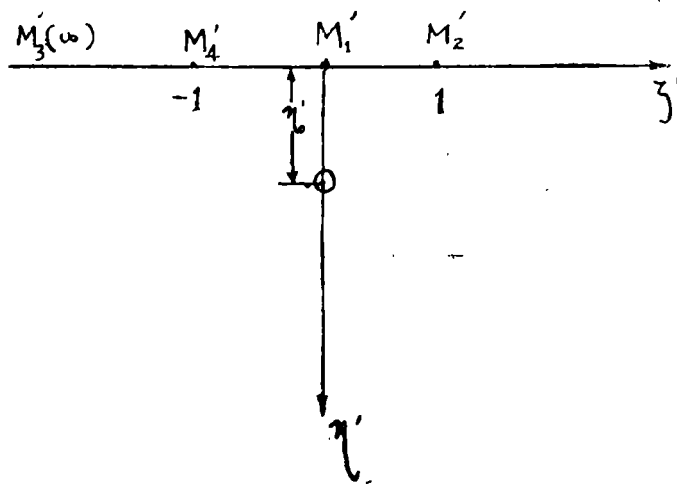


图 5

$$\zeta_0 = \text{th} \frac{\pi \zeta_0}{2T} = \text{th} \frac{\pi i t}{2T} = i \cdot \text{th} \frac{\pi t}{2T}$$

即管的埋藏深度 $\eta_0 = \text{tg} \frac{\pi t}{2T}$.

假如管径比埋藏深度来讲是小量, 则变换前后的管径关系为:

$$\rho'_c = \left. \frac{d\zeta'}{d\zeta} \right|_{\zeta=-it} \cdot \rho_c = \left. \frac{\pi}{2T} \cdot \text{sech}^2 \frac{\pi \zeta}{2T} \right|_{\zeta=it} \cdot \rho_c = \frac{\pi}{2T} \cdot \frac{\rho'}{\cos^2 \frac{\pi t}{2T}}$$

已知在图5所示条件下(相应于有限长补给长度)排水管的流量公式,根据马斯克特^[3]为

$$q = \frac{2\pi k(H-h_c)}{\ln \frac{2\eta_0}{\rho_c'} (1+\eta_0^2)} \quad (A)$$

已知经过保角变换后流量不变,将上述相应值代入(A)式,得在水平有限含水层中排水管流量公式为

$$q = \frac{2\pi k(H-h_c)}{\ln \frac{4T}{\pi\rho_c'} \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2T}} \quad (4')$$

因为 $-\ln \frac{2\eta_0}{\rho_c'} (1+\eta_0^2) = \ln \left[\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2T}}{\rho_c' \frac{\pi}{2T} \cdot \operatorname{sec}^2 \frac{\pi t}{2T}} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi t}{2T} \right) \right] = \ln \left[\frac{4T}{\pi\rho_c'} \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2T} \right]$

以前,在 $\frac{\rho_c}{t} < \frac{1}{10}$ 的假设下,将其视为微量而予以忽略。则从维捷尼科夫流量公式(4)

可以导出公式(4')。现在,引用极限式: $\rho_c = \left| \frac{d\zeta}{d\zeta'} \right| \rho_c'$ 即可直接导出流量公式(4')。

现举一例(取自阿拉文所著水工建筑物渗流计算例21: $T=40$, $t=5$, $\rho_c=0.25$ 公尺; $H-h_c=4$ 公尺, $k=10$ 公尺/日)分别代入(4)式和(4')式,看由此所造成的误差为多少?按精确的(4)式计算:

$$q = \ln \left[\frac{\pi}{8} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 0.5}{40} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \cdot \frac{0.5}{40} \right] = 68.2 \text{ 公尺}^3/\text{日,公尺}$$

按简化的(4')式计算:

$$q = \ln \frac{4 \cdot 40}{\pi \cdot 0.25} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T} = 69.8 \text{ 公尺}^3/\text{日,公尺}$$

由此所造成的误差 $\left| \frac{69.8-68.2}{68.2} \right| \times 100\% \approx 2.4\%$ 。从上述理论和计算分析可知用(4')式来代替(4)式在工程上是允许的。

**当 $\frac{b}{2} = T \operatorname{ctg} \alpha$, $\lambda = \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{4\alpha} \cdot \ln \infty \right] = \operatorname{th} \infty = 1$, 因此 $\frac{K'}{K} = 0, Q = 0$, 即当 $\frac{b}{2} \geq T \operatorname{ctg} \alpha$

时,坝基完全截断河水,因而没有渗流量。上述计算也说明了这一点。

参 考 文 献

- [1] В.И.Аравин и С.Н.Нчмеров: Теория движения жидкостей и Газов в недерормируемой пористой среде. Гиттл, Москва 1953.
- [2] Полуварникова-кочина П.Я. и Фалькович С.В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах. П.М.М Т.ХI, В.6, 1947.
- [3] Маскет М Течение однородных жидкостей в пористой ереде. Гостоптехиздат, 1949.

Резюме

К расчету влияния наклона(водоупора)водонепроницаемого слоя на расход фильтрации.

Лю Цы-цзюнь

На практике часто встречаются закрытый и бетонные плотины на водопроницаемом скальном основании при наличии наклонного водоупора. При таких условиях изучение фильтрации имеет практическое значение, однако метода расчета фильтрационного расхода в рассмотренной автором литературе не рекомендовали.

Заменив наклонный водоупор горизонтальным водоупором методом угловой деформации и используя формулы для расчета фильтрационного расхода при горизонтальном водоупоре, автор данной статьи получил формулы для расчета фильтрационного расхода при наличии наклонного водоупора.