水 利 学 报
1959年6月　SHUILI XUEBAO　第3期

对“在均質承压含水岩层中带淹沒式过滤器的不完整鑽孔抽水試驗計算岩层滲透系数的新公式”一文的意見*

刘 慈 羣

(中国科学院力学研究所)

讀了梁仲章同志的論文“在均質承压含水岩层中带淹沒式过滤器的不完整鉆孔抽水試驗計算岩层滲透系数的新公式”(見水利学报1958年第4期)，提出一些意見，供同志們参考和指正。

梁同志的論文最主要之点，就是迭加汇綫(相当于过滤器)及其在平行鏡面(把厚度为 m 的承压含水层的隔水頂板和底板看作是相距为 m 的平行鏡面)所映射的无窮鏡象，在无限均質含水层中所引起的滲流势(水头压力降)，于是得水头压力降公式(見該文73～75頁)：

$$
\begin{aligned}
S=\frac{Q}{4\pi kl}\Bigg\{&\left(\operatorname{arsh}\frac{c+l+z}{r}+\cdots\right)+\left(\operatorname{arsh}\frac{2m-c+z}{r}+\cdots\right)\\
&+\left(\operatorname{arsh}\frac{2m+c+l+z}{r}+\cdots\right)+\left(\operatorname{arsh}\frac{4m-c+z}{r}+\cdots\right)\\
&+\left(\ln\prod_{n=2}^{\infty}\frac{[c+4(n-1)m+l+z][c+4(n-1)m+l-z]}{[c+4(n-1)m-z][c+4(n-1)m+z]}+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\ln\prod_{n=2}^{\infty}\frac{[c_2+n\cdot N+(n-1)M+m+l+z][c_2+nN+(n-1)M+m+l-z]}{[c_2+n\cdot N+(n-1)M+m-z][c_2+n\cdot N+(n-1)M+m+z]}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{A}
$$

上式(A)显然是一个无窮級数，然而梁同志沒有仔細深入分析无窮級数的性質，就断然說“因为 $4m$ 之值很大，$4m-c-l-z\gg r$，則上式末四項得零”問題就在这里，全篇文章的关鍵也在这里。实际这个无窮級数是一个发散級数，因为 A 式中末四項任一項都可写成这样发散級数的型式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}\cdot\dfrac{1+\frac{a'}{n}}{1-\frac{a'}{n}}$；且 a、a' 与 n 无关的参数；$\frac{a'}{n}$，$\frac{a}{n}$ 总小于1(附录中将作数学証明)。表面上，看起来随着 n 的增加，級数中每一項都減小而趋于零(由于对数的性質，減小是較慢的)，但項数也随着增加了，因此級数的和也不一定小。正如級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，虽然項 $\frac{1}{n}$ 随着 n 增大趋于零，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的和是无限的亦是发

散的。对于发散級数我們不能取其前几項而忽略后面的无穷項。因为发散級数的値是不确定的。这也就是很多人虽然知道汇点及其无穷鏡象滲流势的迭加原則，而沒有写成級数A形式的根本原因。

若不略去无穷級数A后面四項級数，代入相应的边界条件：如使$c=0$，$z_0=0.75l$，$s=s_0$；則得出的不是梁同志所推导的公式(B)

$$K=\frac{Q}{2\pi l s_0}\left\{\ln\frac{1.32l}{r_0}+\frac{1}{2}\ln\frac{(2m+1.75l)(2m+0.25l)}{(2m-1.75l)(2m-0.25l)}\right\} \qquad (B)$$

而是公式(1)

$$K=\frac{Q}{2\pi l s_0}\left\{\ln\frac{1.32l}{r_0}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(2n\cdot m+1.75l)(2n\cdot m+0.25l)}{(2n\cdot m-1.75l)(2n\cdot m-0.25l)}\right\} \qquad (1)$$

假如把$n=2$以后的級数項略去，只取一項，就成为公式(B)了。

現在具体的来算一算，由于略去$n=2$以后的項，所造成的誤差是多少？今以A'表示无穷級数：

$\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n\cdot m+1.75l)(2n\cdot m+0.25l)}{(2n\cdot m-1.75l)(2n\cdot m-0.25l)}$；$A'_n$表示該級数的$n$項和。若設$\frac{l}{m}=0.4$(过濾器与含水层厚度之比等于0.4)，这时含水层的厚度还不算小，对于略去級数各項还是有利的。将上述值$\frac{l}{m}=0.4$，代入級数A'求部分和数得

A'_1	A'_2	A'_4	A'_8	A'_{12}	A'_{14}
0.415	0.615	0.848	1.11	1.26	1.31

假若只計算14項而把其余項略去，而認为計算14項是正确的話。那么只計算一項象梁同志所作的那样，所造成的誤差将等于$\frac{1.31-0.415}{1.31}\times100\%=68\%$；由此看来只取第一項而略去以后所有項将造成更大的誤差。

若取小数点后三位作为有效数値，則級数A'的第27項到第30項每一項的値都約为0.014；而第31項到第34項每一項的値都約为0.012；由此看来，虽然当n增加时，第n項的値将減小，但減小的趋势是不快的，而且随着n增加，項数也增加了，因此其和数就不是一个小数了。

总之，无論从理論分析和实际計算都証明取发散級数A'的第一項作为近似値都是不正确的。因为級数A'与A在性質上是一样的，只是前者簡单些，因此同样可得梁同志所說“A式末四項得零”的結論是有問題的。

或許有人要問：实际的量如流量，水头压力降，滲透系数等都是有限的和确定的。怎么会在表示它們的公式中出現发散的无穷級数呢？这是由于汇点經过隔水頂，底板所映射的无限鏡象，其符号是相同的，即汇点映射为汇点。因此无限同号汇点所迭加的滲流势(水头压力降)是无限的，即表示它的級数是发散的。为了使滲流势保持有限量，必須选擇积分常数，使等式右边級数为有限(例如在井附近区，馬斯克特經过計算，选积分常数$C=-\lim_{n\to\infty}\ln\cdot n$)，馬斯克特就是这样做的，于是得出熟知的，在有限含水层中，不完整井流量公式。相反汇点經过等压面一流面所映射的无限鏡象，其符号是正負相間，

即汇点映射为源点，因此无限异号汇点一源点所迭加的渗流势(水头压力降)是有限的，因此表示它的級数是收歛的，因而能够忽略該級数后面的較小項而得出，在該情况下的流量計算公式。

总之梁同志所推导的計算滲透系数的新公式(B)，在推导上是有問題的，而在計算上誤差也是不小的。

以上討論对于梁同志所推导的“靠近水池的单孔抽水”計算公式(从80頁«因为 $4m$ 之值很大，$4m-c-lz \gg r$起到83頁)，也是适用的，因为有問題的地方和性質与前相同，因此就不再重复了。

再者“所討論文章”主要篇幅包括公式和插图，基本上都是引自 С.К.Абрамов，В.Д.Бабушкин所著“Методы расчета притока воды к буровым скважинам”一書或者說与該書上內容大体上是相似的，例如該文章中的图一，二，三，九，十五，十七，二十等以及从61～73頁，和76～78頁中的公式。但也应該指出，由于上述参考書中，沒有詳細的計算就把結果写出来(計算原则和方法都談到了)。梁同志在引用这些公式时，是做了一些詳細的推导和計算的。

附　　录

当 $|x|<1$ 时，$\ln\frac{1+x}{1-x}$可展成級数

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)$$

当 $1>x>0$ 时，

$$\ln\frac{1+x}{1-x}>2x,$$

$\frac{0.25l}{2n\cdot m}$总是小于 1 大于 0，因此

$$\ln\frac{2n\cdot m+0.25l}{2n\cdot m-0.25l}=\ln\frac{1+\frac{0.25l}{2n\cdot m}}{1-\frac{0.25l}{2n\cdot m}}>2\cdot\frac{0.25l}{2n\cdot m}=\frac{0.25l}{n\cdot m},$$

因此

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n\cdot m+0.25l}{2n\cdot m-0.25l}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0.25l}{n\cdot m}=\frac{0.25l}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为发散級数，因此級数 J 为发散級数，同理，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n\cdot m+1.75l}{2n\cdot m-1.75l}$ 亦为发散級数，于是級数 A 为发散級数。