

彈性系統動力穩定理論中的 一個變分原理*

胡海昌

(中國科學院力學研究所)

一. 引言

彈性系統在某些不變的載荷作用下會失去靜穩定性，而在某些隨時間而變的載荷作用下會失去動力穩定性。和普通的靜穩定性類似，在動力穩定理論中人們最感興趣的是穩定區域與不穩定區域的分界綫。對於一些簡單的問題，決定分界綫的問題可歸結於求解一個馬休·希爾方程。但是對於其他許多較複雜的問題，並沒有這個可能性。

目前通用的求解動力穩定問題的一般方法，大致有兩個，一個是小參數法^[1,2]。這個方法用起來比較方便，可惜只能求得分界綫的一小段。另一個方法是由 H. M. 克雷洛夫和 H. H. 保加留勃夫^[3] 在 1935 年提出的伽辽金方法。這個方法是先對系統失去動力穩定的形式作某種假定，使其中包含若干未知的時間的函數，然後用伽辽金方法導出這些未知函數所滿足的方程。通常這樣得到的是一組帶有周期系數的聯立常微分方程。最近 B. B. 鮑羅廷^[4] 通過微積分方程最後也得到了相同的常微分方程組。伽辽金方法雖然能把偏微分方程化為常微分方程組，可是這些常微分方程還是只能用近似方法來求解。

決定動力穩定與不穩定區域的分界綫問題，其實是一個本征值問題。因此用變分法來近似地決定分界綫應該是方便的。本文的目的便在於提出彈性系統動力穩定理論中的一個變分原理，以便作為近似解法的根據。為了清楚起見，我們特別對直梁的動力穩定問題作了詳細的說明。其實要把這個變分原理推廣到其他彈性系統中去，並無困難。利用根據本文變分原理的近似解法，可以避免求解帶有周期系數的聯立常微分方程。為了說明這個近似解法的適用性，我們計算了馬休方程的一個本征值。計算表明，第二、三級近似已能給出很好的結果。

二. 直梁的動力穩定性

考慮一個直梁，在周期性的軸向壓力作用下的動力穩定問題。設軸向力 $P(t)$ 可以分解為兩部分：

$$P(t) = P_0(t) + \alpha P_1(t), \quad (1)$$

其中 P_0, P_1 是已知的 t 的函數，並且它們具有相同的周期。 α 是一參數。問題是要決定

* 1957年3月4日收到。

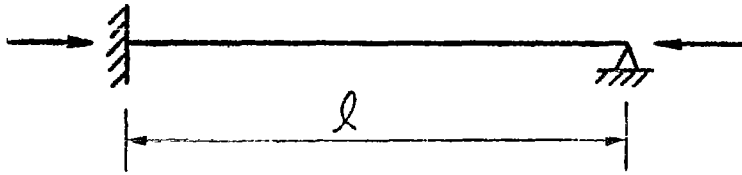


圖 1.

α 的临界值(本征值), 即决定动力稳定与不稳定的分界点.

梁的振动方程是

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (P_0 + \alpha P_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

式中 w 是挠度, EI 是梁的抗弯刚度, ρ 是单位长度的质量. 我们设梁的两端可以有简支、夹住和悬空等三种支承情况. 在动力稳定与不稳定的分界点上, 梁可以有周期运动. 因此我们的问题是要决定 α 的临界值, 使得方程(2)在适当的边界条件下有周期解. 显然, 如果有周期解, 这个解的周期必然是轴向力的周期的整数倍(通常主要为两倍).

现在我们要把决定 α 的问题化为一个变分问题. 设 T 是梁振动的周期. 用 w 乘方程(2), 然后对时间从 0 到 T 积分, 对坐标从 0 到 l 积分(设 l 是梁的全长), 得到

$$\int_0^l \int_0^T w \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dt + \int_0^l \int_0^T (P_0 + \alpha P_1) w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dt + \int_0^l \int_0^T \rho w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dt = 0. \quad (3)$$

用部份积分, 并且注意到

$$w(x, t) = w(x, t+T), \quad (4)$$

以及梁的边界条件

$$\left. \begin{aligned} w=0, \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (P_0 + \alpha P_1) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \text{ 或 } EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

我们可以从(3)式推导出

$$\int_0^l \int_0^T EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T (P_0 + \alpha P_1) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt = 0. \quad (6)$$

由此得到

$$\alpha = \frac{\int_0^l \int_0^T EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt}{\int_0^l \int_0^T P_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt}. \quad (7)$$

上式是在 w 是解的情况下得到的. 它启发我们去证明下列变分原理: 在所有满足连续条件、周期条件以及几何性质的边界条件的挠度中, 真正的挠度使下列泛函取极值:

$$\alpha = \text{ext} \frac{\int_0^l \int_0^T EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt}{\int_0^l \int_0^T P_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt}, \quad (8)$$

而 α 便是待求的臨界值。這裡所謂幾何性質的邊界條件是指撓度和傾度等於零的條件。

證明(8)式取極值的條件是

$$\int_0^l \int_0^T EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dt - \int_0^l \int_0^T (P_0 + \alpha P_1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dt - \int_0^l \int_0^T \rho \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dx dt = 0. \quad (9)$$

利用部份積分, 並且注意到 w 及 δw 的周期性, 便可以从(9)式得到

$$\int_0^l \int_0^T \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (P_0 + \alpha P_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \delta w dx dt + \int_0^T \left\{ - \left[\frac{\partial}{\partial x} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (P_0 + \alpha P_1) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right\} dt = 0. \quad (10)$$

要此式成立, 必須有方程(2)及邊界條件(5)。由此可知, (8)式取極值的條件與原有問題完全相同。

公式(8)提供了一個決定 α 的近似的臨界值的方法。這就是根據周期條件及幾何性質的邊界條件適當地選擇 w 的算式, 使其中包含若干不定因素。然後再選擇這些不定因素, 使得 α 取極值。這樣我們便得到 α 的近似值。值得注意的是, 可以證明這樣得到的近似值有下述性質: 如果被選擇的 w 的算式有一級小量的差誤, 那末按(8)式求得的 α 值只有二級小量的差誤。這就是說從比較粗糙的 w 的算式中可以求得比較精確的 α 的臨界值。

和求解彈性體力學的平衡問題相似^[3], 在選擇 w 時, 可以包含不定常數, 也可以包含不定函數, 而後者常常給出更精確的結果。

三. 伽辽金方法

在動力穩定理論中常用的伽辽金方法^[3], 是上節變分原理的一個特殊情況。並且通過這個一般的變分原理, 使我們比較容易弄清楚伽辽金方法的適用性。

設梁的兩端是簡支的或夾住的, 但是沒有懸空的。我們把 w 展開成下列級數:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) f_i(t), \quad (11)$$

其中 χ_i 是已選定的滿足全部邊界條件的坐標函數, 而 f_i 是待定的時間的函數。將此式代入公式(8), 並求 α 的極值, 得到條件:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ [A_{ik} - (P_0 + \alpha P_1) B_{ik}] f_i + C_{ik} \frac{d^2 f_i}{dt^2} \right\} = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ k=1, 2, \dots, n, \end{array} \right\} \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= \int_0^1 EI \frac{d^2 \chi_i}{dx^2} \frac{d^2 \chi_k}{dx^2} dx, \\ B_{ik} &= \int_0^1 \frac{d\chi_i}{dx} \frac{d\chi_k}{dx} dx, \\ C_{ik} &= \int_0^1 \rho \chi_i \chi_k dx. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

方程(12)所要求的做法,便是伽辽金方法。由此可知伽辽金方法是上节变分原理的一个特殊情况。由此还可知道,伽辽金方法也有下列优点:即先选定的坐标函数含有一级小量的差误,那末最后得到的 α 的临界值只含有二级小量的差误。

但是值得留意到伽辽金方法的两个缺点。第一、伽辽金方法引导到一组具有周期系数的常微分方程。为了找寻它们的解,通常不得不再用一次近似方法。第二、如果梁一端是悬空的,那末在边界条件中便包含了未知数 α ,因此我们不可能事前选择出一组坐标函数满足全部边界条件。这就是说在这一类问题中无法直接应用伽辽金方法。

四. 马休及希尔方程的变分法

两端简支的均匀梁的动力稳定问题,可以容易地归结于求解马休或希尔方程。由此可知从变分式(8)可以导出关于马休及希尔方程的变分法。

马休方程的标准形式是

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t)x = 0. \quad (14)$$

中心问题是在指定 q 的值后决定 a 值,使得这方程有周期解。关于马休方程(14),我们可以证明下列变分算式:在所有满足周期条件的函数中,真正的解使下列泛函取极值:

$$a = \text{ext} \frac{\int_0^T \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + 2q \int_0^T x^2 \cos 2t dt}{\int_0^T x^2 dt}. \quad (15)$$

而这泛函所取的极值,便是 a 的本征值。

为了说明这个变分法的实用意义,我们来近似地计算具有下述性质的 a 值:当 $q \rightarrow 0$ 时 $a \rightarrow \cos t$ 而 $a \rightarrow 1$ 。显然这个解的周期是 2π 。作为最粗糙的一个近似,我们设

$$x(t) = A_1 \cos t. \quad (16)$$

将此式代入公式(15),立即得到

$$a = 1 + q. \quad (17)$$

这与 a 对 q 的展开式的前两项相同。作为二级近似,我们设

$$x(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos 3t, \quad (18)$$

将此代入公式(15),得到

$$a = \text{ext} \frac{A_1^2 + 9A_2^2 + q(A_2^2 + 2A_1 A_2)}{A_1^2 + A_2^2}. \quad (19)$$

a 的两个极值满足方程

$$a^2 - (10 + q)a + 9(1 + q) - q^2 = 0. \quad (20)$$

這個方程有兩個根，我們所要的一個是

$$\alpha = \frac{1}{2} \{10 + q - \sqrt{64 - 16q + 5q^2}\}. \quad (21)$$

作為三級近似，我們取

$$\alpha(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos 3t + A_3 \cos 5t, \quad (22)$$

將此式代入公式(15)，得到

$$\alpha = \text{ext} \frac{A_1^2 + 9A_2^2 + 25A_3^2 + q(A_1^2 + 2A_1A_2 + 2A_2A_3)}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}. \quad (23)$$

此式的三個極值滿足方程

$$(1 + q - \alpha)(9 - \alpha)(25 - \alpha) - q^2(26 + q - 2\alpha) = 0. \quad (24)$$

根據公式(17)，(21)以及方程(24)，我們算得 α 的各級近似值如表 1 所示(表中所列的準確值系錄自文獻[71])。從這個表可以看到，即使在 $q=10$ 時， α 的三級近似值的差誤也只有 7%。當 $q=5$ 時 α 的三級近似值的差誤只有 0.6%。當 $q=2$ 時 α 的二級近似值的差誤也只有 0.6%，由此可知用本文的變分法來求馬休方程的本征值，通常採用三級或二級近似便可以了。

表 1.

q	α			
	一級近似	二級近似	三級近似	準確值
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.5	1.5000	1.4668	1.4667	
1.0	2.0000	1.8599	1.8591	1.8591
1.5		2.1705	2.1659	
2.0		2.3944	2.3793	2.3792
2.5		2.5335	2.4963	
3.0		2.5949	2.5197	2.5190
3.5		2.5892	2.4566	
4.0		2.5279	2.3213	2.3180
4.5			2.1214	
5.0			1.8683	1.8582
5.5			1.5712	
6.0			1.2736	1.2143
6.5			0.8730	
7.0			0.4829	0.4383
7.5			0.0705	
8.0			-0.3607	-0.4350
8.5			-0.8033	
9.0			-1.2703	-1.3367
9.5			-1.8624	
10.0			-2.2305	-2.3991

上面說明的方法容易推廣到希爾方程。考慮下列希爾方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [a\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]x = 0, \quad (25)$$

其中 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 為具有相同週期的週期函數。問題是欲決定 α 的本征值，使得方程

(25) 有周期解。設 T 是所求解的周期。关于希尔方程 (25), 我們可以得到类似的变分式: 在所有滿足周期条件的連續函数中, 真正的解使下列泛函取極值:

$$\alpha = \text{ext} \frac{\int_0^T \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \int_0^T \varphi_2(t) x^2 dt}{\int_0^T \varphi_1(t) x^2 dt} \quad (26)$$

而这个泛函所取的極值, 便是所求的 α 的本征值。

五. 兩端夾住的均匀直梁的稳定性

設有一兩端夾住的均匀直梁 AB , 承受下列軸向压力的作用:

$$P = P_0 + 2\alpha \cos 2\omega t, \quad (27)$$

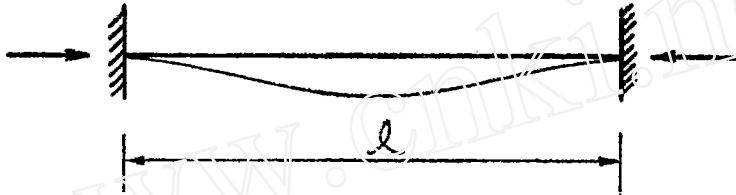


圖 2.

現在的問題是要在指定 P_0, ω 后找寻 α 的临界值。軸向力的周期是 $\frac{\pi}{\omega}$, 所以梁的最主要的一种失去穩定的形式, 它的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$ 。这样根据公式 (8) 我們有

$$\alpha = \text{ext} \frac{EI \int_0^l \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt - P_0 \int_0^l \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt - \rho \int_0^l \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt}{2 \int_0^l \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt} \quad (28)$$

在計算梁的靜临界力和固有頻率时, 通常取兩項便能得到足够准确的結果。上节的計算又表明对時間函数取三項也足够了。因此在本問題中我們把撓度写成六項的形式:

$$w = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) (A_1 \cos \omega t + B_1 \cos 3\omega t + C_1 \cos 5\omega t) + \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{l} \right) (A_2 \cos \omega t + B_2 \cos 3\omega t + C_2 \cos 5\omega t). \quad (29)$$

式中 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 是未定常数。这个算式滿足了必要的边界条件与周期条件。將算式 (29) 代入公式 (28), 得到

$$\begin{aligned} \frac{l^2 \alpha}{EI \pi^2} = & \text{ext} \{ 16 (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) + 256 (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) - \\ & - \frac{l^2 P_0}{EI \pi^2} [4 (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) + 16 (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)] - \\ & - \frac{\rho l^4 \omega^2}{EI \pi^4} [3 (A_1^2 + 9B_1^2 + 25C_1^2 + A_2^2 + 9B_2^2 + 25C_2^2) + \\ & + 4 (A_1 A_2 + 9B_1 B_2 + 25C_1 C_2)] \} \div \\ & \div \{ 4 (A_1^2 + 2A_1 B_1 + 2B_1 C_1) + 16 (A_2^2 + 2A_2 B_2 + 2B_2 C_2) \}. \quad (30) \end{aligned}$$

求 α 的极值, 我们得到下列联立方程:

$$\left. \begin{aligned} (16-4P_0-3\Omega^2-\lambda)A_1-2\Omega^2A_2-\lambda B_1 &= 0, \\ -2\Omega^2A_1+(256-16P_0-3\Omega^2-4\lambda)A_2-4\lambda B_2 &= 0, \\ -\lambda A_1+(16-4P_0-27\Omega^2)B_1-18\Omega^2B_2-\lambda C_1 &= 0, \\ -4\lambda A_2-18\Omega^2B_1+(256-16P_0-27\Omega^2)B_2-4\lambda C_2 &= 0, \\ -\lambda B_1+(16-4P_0-75\Omega^2)C_1-50\Omega^2C_2 &= 0, \\ -4\lambda B_2-50\Omega^2C_1+(256-16P_0-75\Omega^2)C_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{l^2 P_0}{EI \sigma^2}, \\ \Omega^2 &= \frac{\rho l^4 \omega^2}{EI \sigma^4}, \\ \lambda &= \frac{A l^2 \alpha}{EI \sigma^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

从方程组(32)消去六个未定常数 A_1, A_2, \dots, C_2 , 我们便得到 λ 的特征方程。

作为一个数字例子, 我们来讨论下述情况: 不变的压力等于静压力的一半, 而可变压力的频率等于固有频率的两倍。在这种场合

$$p_0 = 2, \Omega^2 = \frac{4 \cdot 73^4}{16 \sigma^4} = 0.321, \quad (33)$$

λ 的特征方程最后算得如下:

$$\begin{aligned} 20870000 - 12700000\lambda + 322300\lambda^2 + 20520\lambda^3 + \\ + 3346\lambda^4 + 459.1\lambda^5 + 4.0000\lambda^6 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

这个方程有两个正根, 它们分别是

$$\lambda_1 = 1.73, \lambda_2 = 10.8. \quad (35)$$

六. 变分原理的推广, 板的动力稳定性

在第二节里我们证明了关于直梁动力稳定理论中的一个变分原理。要把这个变分原理推广到其他动力稳定问题中去, 并不困难。我们注意到, 直梁的基本公式(8)是从方程(6)推导出来的(严格说是在它的启发下推导出来的), 而后者具有明显的物理意义。它表示梁的动能与势能在一个周期内的平均值相等, 即

$$\text{平均势能} - \text{平均动能} = 0. \quad (37)$$

例如在薄板的动力稳定理论中, 设在板平面内的内力为

$$\left. \begin{aligned} N_x(x, y, t) &= N_{x0}(x, y, t) + \alpha N_{x1}(x, y, t), \\ N_y(x, y, t) &= N_{y0}(x, y, t) + \alpha N_{y1}(x, y, t), \\ N_{xy}(x, y, t) &= N_{xy0}(x, y, t) + \alpha N_{xy1}(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

其中 $N_{x0}, N_{y0}, \dots, N_{xy1}$ 是已知的函数, 并且它们具有相同的周期, α 是待定的参数。板的平均势能是

$$U = U_p + U_0 + \alpha U_1, \quad (39)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} U_B &= \frac{D}{2T} \int_0^T \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dt, \\ U_0 &= \frac{1}{2T} \int_0^T \int \left\{ N_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{y0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy dt, \\ U_1 &= \frac{1}{2T} \int_0^T \int \left\{ N_{x1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{y1} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy1} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy dt. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

板的平均动能是

$$K = \frac{\rho}{2T} \int_0^T \int \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dt, \quad (41)$$

其中 ρ 是單位面积的質量。因此根据(37)我們有

$$U_B + U_0 + \alpha U_1 - K = 0, \quad (42)$$

由此我們得到变分原理

$$\alpha = \text{const} \frac{U_B + U_0 - K}{-U_1}. \quad (43)$$

当然,公式(43)到现在还缺乏严格的証明,但是对于每个具体情况,都不难补上必要的証明。

参 考 文 献

- [1] Гольденблат, П. И., *Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений*. Стройиздат, 1947.
- [2] 解伯民, 彈性薄壁桿件的动力稳定, 物理学报, 第12卷, 第246—260頁, 1956年.
- [3] Крылов, Н. М. и Боголюбов, Н. Н., *Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных в одном из концов стержня. Сб. статей "Последование колебаний конструкций"*. ОНТИ, 1935.
- [4] Болотин, В. В., О параметрическом возбуждении поперечных колебаний. "Поперечные колебания и критические скорости". Сб. 2, стр. 1—44, 1953. Изд. АН СССР.
- [5] Болотин, В. В., *Динамическая устойчивость упругих систем*. Гостехиздат, 1956.
- [6] 錢偉長等著, 彈性柱体的扭轉理論, 第七章, 科学出版社出版, 1956年.
- [7] McLachlan, N. W., *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford Press, 1947.

ON A VARIATIONAL PRINCIPLE IN THE THEORY OF DYNAMICAL STABILITY OF ELASTIC SYSTEMS

HU, HAI-CHANG

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Consider the dynamical stability of a beam with fixed, simply supported or free ends under the following axial compressive forces:

$$P(t) = P_0(t) + \alpha P_1(t), \quad (1)$$

where P_0, P_1 are given periodic functions with the same period, and α is the critical value to be determined. The following variational principle is proved: Among all possible deflections satisfying the periodic condition and the geometrical boundary conditions, the critical values of α are the extremes of the following functional:

$$\alpha = \text{ext} \frac{\int_0^1 \int_0^T EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^T P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^T \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt}{\int_0^1 \int_0^T P_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt}, \quad (8)$$

where T is the period of oscillation of the beam. For other elastic systems, it is indicated that a similar variational principle may be obtained from the simple relation that the mean value of the potential energy of the system in a period equals to the mean value of the kinetic energy.