

三七黃銅的塑性应力应变关系*

楊 南 生

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文分析了扭距和內压复合加载下的黃銅薄管試驗結果。試驗变形范围屬小彈塑性。加载方式包括簡單加载, 应力分量無一减少的复杂加载, 以及“中性变載”。分析对象包括应力与应变主軸方向間的关系, 应力与应变 Lode 参数間的关系以及硬化特性曲綫的建立。試驗結果示出: 在各种加载方式中, 应力应变关系都大致符合流动理論。而在应力分量無一减少的复杂加载中, 形变理論也能大約适用。但在“中性变載”中, 形变理論的各项基本假定与实验数据有显著差异, 因而不能适用。对于“中性变載”, 滑移理論所預測的应变数值也与实验数据有較显著的不符。試驗結果并示出: 应力应变关系对复杂加载的敏感性似与变形的塑性程度有关: 塑性程度愈大时, 复杂加载下的实际应力应变关系对形变理論中各项基本假定的偏差似也愈大。

符 号

$\sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_r$	圓管中的周向, 軸向及徑向应力
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力
$\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_r$	圓管中的周向, 軸向及徑向应变
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	主应变
τ, γ	圓管中由迴繞管軸的扭距所引起的剪应力及剪应变
$\varepsilon'_\theta, \varepsilon'_z, \varepsilon'_r, \gamma'$	彈性应变
$\varepsilon''_\theta, \varepsilon''_z, \varepsilon''_r, \gamma''$	塑性应变
τ_8	八面体剪应力
σ_i	应力强度
e_i, e'_i, e''_i	应变强度及其彈性, 塑性部分
$\vartheta_i, \vartheta'_i, \vartheta''_i$	广义应变强度及其彈性, 塑性部分
$\mu_\sigma, \mu_\varepsilon, \mu_\varepsilon$	应力, 应变及塑性应变增量的 Lode 参数
E	法向彈性系数

* 本文实验数据及部分分析系取自作者 1950 年 5 月交英国曼彻斯特大学的学位论文。该实验与近年来发表的薄管实验工作相比, 试验样品較嫩粗糙(管徑对壁厚比例較小); 試驗中的加载途徑亦較陈旧; 仅在加载系統上是采用了不常用的內压加扭距的复合应力。所以本文对塑性应力应变关系問題只拟提供一些补充参考用的实验結果, 并無任何新的进展。

G	剪切弹性系数
ν	柏桑比
p	圆管内的液压
M	圆管上的扭矩
p_s, M_s	引起初始屈伏的纯内压值及纯扭矩值
$\sigma_{0.2}, \sigma_{0.05}$	塑性应变为 0.2% 及 0.05% 处的法定拉伸屈伏应力
w	扭臂上的有效重量
$\alpha_\sigma, \alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon$	最大主应力方向, 最大主应变方向及最大塑性主应变增量方向与圆管横断面间的夹角
Φ, φ	应力强度 σ_i 的函数

其他符号在文中说明。

一. 緒論

各向同性的金属在复合应力系统下的塑性应力应变关系包含着下列几个基本要素^[1, 4]:

(1) 屈伏准则 在忽略塑性变形所引起的各向异性时, 屈伏准则可以应力分量的函数表示, 该函数的数值变化决定着塑性应变的是否产生, 只当屈伏准则的数值达到或超过初始屈伏极限并继续增加时, 塑性应变才有发生, 当屈伏准则减小或小于初始屈伏极限时, 应变的变化完全是弹性的, 所以屈伏准则是在复合应力下判别塑性应变是否发生的根据, 即: 它是联系应力变化与应变变化性质(弹性或塑性)的基本要素。

(2) 塑性应变与应力间的定性关系 当塑性应变确实发生时, 它与应力间的定性关系又可分为方向关系和分配关系两方面:

(甲) 方向关系 这一要素说明在加载的任一阶段, 塑性应变(或其增量)的主轴方向与当时应力主轴间的关系。

(乙) 分配关系 这一要素说明在加载的任一阶段, 塑性应变(或其增量)的主值比例与当时应力主值比例间的关系, 由于许多研究者曾证明: 静水压力仅产生弹性容变, 对塑性变形几无影响^[2], 所以塑性应变与应力间的分配关系通常不直接以应变(或其增量)与应力的主值表示, 而是用对应的偏量主值来表示, 于是, 分配关系通常说明: 对应于不同的应力偏量主值比例, 塑性应变(或其增量)的偏量在它自己各主值间的分配规律, 这一分配规律一般用 Lode 参数表示, 各 Lode 参数定义如下:

$$\text{应力 Lode 参数: } \mu_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3) \quad (1)$$

$$\text{应变 Lode 参数: } \mu_\epsilon = 2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} - 1, \quad (\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3) \quad (2)$$

$$\text{塑性应变增量 Lode 参数: } \mu_\epsilon = 2 \frac{d\epsilon_2'' - d\epsilon_3''}{d\epsilon_1'' - d\epsilon_3''} - 1, \quad (d\epsilon_1'' > d\epsilon_2'' > d\epsilon_3'') \quad (3)$$

对应 Lode 参数相等的分配关系表示: 在变形过程中, 对应偏量的主值保持互成比

1) 方括弧内号码指列于文后的参考文献。

例¹⁾(但偏量的主軸方向未必重合; 因為方向關係並未包括在 Lode 參數相等的分配關係中)。

(3) 硬化特性 這一要素說明塑性變形程度與瞬時強度間的定量關係。在加載的任一階段上, 根據前述的定性關係, 塑性應變(或其增量)的主軸方向以及主值分配比例均為已知時, 塑性應變(或其增量)主值及各分量的絕對數值還須由材料的硬化特性確定。例如, 當採用“應變與應力間主軸重合而且 Lode 參數相等”的假定作為定性關係時, 則應變偏量 D_e 與應力偏量 D_σ 間有比例關係 $D_e = \lambda D_\sigma$ 。該比例常數 λ 的大小與塑性變形程度間的關係就還必須依靠硬化特性來作出定量的確定。硬化特性通常以應力與應變的一對不變量函數的關係來描述。對一定材料, 該項函數關係在各種應力系統和加載途徑下應該唯一存在。這樣它就可視為該材料在複合應力下的廣義應力應變曲綫。它綜合的描述了變形過程中各應力分量與各應變分量的數量關係。當應力系統簡化為單向拉伸時, 對應的硬化特性曲綫也就應與該材料的拉伸曲綫相一致(最多只有坐標比例尺上的差異)。因此, 如果表示硬化特性的應力與應變的不變量函數分別已知, 硬化特性曲綫就可由單向拉伸曲綫導出。

上述各要素在金屬材料中可能是有相互聯繫的。例如, Mises^[3] 與 Hill^[4] 都曾指出: 對於非硬化性材料(變形時屈伏準則為恆值者), 若假定塑性變形能量在變形每一階段上為一極大值, 而且假定塑性應變增量與應力主軸同向, 則採用 Mises 屈伏準則必導致 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ 的分配關係。又如 Hodge, Prager^[5] 亦曾指出: 對硬化材料, 如採用 Handelman-Lin-Prager^[6] 型式的應力應變關係(其中包含了塑性應變增量與當時應力主軸同向的方向關係), 並假定外載荷的微量變化所引起內部應力的變化是唯一的, 則採用 Mises 屈伏準則也必導致 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ 的分配關係。Taylor^[7] 曾利用初始屈伏時的 $\mu_\epsilon - \mu_\sigma$ 的實驗數據, 根據前述的最大塑性變形能假說, 計算出初始屈伏時的應力分量關係, 發現與實驗觀測的屈伏應力數據極為相近。上述各論點都表示: 在屈伏準則和應力應變的定性關係間似乎存在某種物理性質上的聯繫。至於屈伏準則和硬化特性間的聯繫, 首先應指明的是: 表示屈伏準則的應力函數既然可以在變形的任一階段上代表材料的瞬時彈性極限, 它就顯然也可以作為硬化特性中代表瞬時強度的應力不變量。Swift^[8] 曾指出: 若以 Mises 屈伏準則代表瞬時強度; 並假定對各種加載途徑, 在達到相同的瞬時強度時, 塑性變形能量具有唯一值; 則採用“塑性應變增量與應力間主軸同向而且 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ ”的定性關係必導致以 σ_i 與 ϵ_i^p 所建立的硬化特性曲綫的唯一存在(σ_i 為以 Mises 屈伏準則表示的應力強度; ϵ_i^p 為塑性應變增量的第二不變量沿加載途徑的積分, 其定義公式見本文第(11)式)。由此說明硬化特性和屈伏準則以及應力應變的定性關係間似也存在某種物理性質上的聯繫。

但在上述這些論證中所顯示的各要素間的聯繫既都建立在一些假說性的前提條件上(如塑性變形能的極大值, 或它和瞬時強度間的唯一關係等), 或在應力應變定性關係的部分前提假定上(如應力和應變的主軸同向性), 而這些假說或部分假定, 它們本身目前也還

1) 例如, 設分配關係為 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$, 則容易證明:

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon_1 - \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] : \left[\epsilon_2 - \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] : \left[\epsilon_3 - \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right] = \\ & = \left[\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] : \left[\sigma_2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] : \left[\sigma_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]. \end{aligned}$$

有待証实,所以本文以下对塑性应力应变关系的分析中,除对硬化特性的瞬时强度采用和屈伏准则相同的应力变量外,没有顾及上述各要素間的其他可能联系,而是对各要素分别进行独立的考察。

除对各项要素分别进行考察之外,本文还采用了几种现有的塑性应力应变理论(形变理论,流动理论及滑移理论),进行应变预测,和实验数据相比,以对各理论在各种加载方式下的适用程度进行比较。

本文所考察的范围系在室温下中等速度的小弹性变形。因此变形中的时间效应以及鲍氏效应等都未予考虑。

二. 实验方法

(1) 試驗样品 試样材料采用三七黄铜。所用兩批材料成分如表 1 所示。試样由 31.8×31.8 公厘方形断面的棒料上割下,加工前經 400°C 焯火 $1\frac{1}{2}$ 小时,然后爐冷,热处理后曾經金相檢驗(其平均晶粒尺寸約为 0.03 公厘,个别晶粒达 0.08 公厘),并自棒料上沿纵向及横向割取小試样,进行拉力試驗,結果說明材料的各向同性程度大致符合要求。又通过簡單拉伸試驗,測定纵向及横向应变(用 Huggenberger 杠杆式引伸仪),以确定纵向弹性系数 E 及柏桑比 ν 。数值亦見表 1。

表 1.

材料批号	化 学 成 分 (%)				$E(10^4 \text{ 公斤/公厘}^2)$	ν
	Zn	Sn	Fe	Cu		
I	29.11	0.14	0.05	余量	1.10	0.32
II	28.07	0.08	0.07	余量	1.05	0.33

复合应力試驗所用的管形試样兩端各成方形,以施加扭矩。油压从一端引入,另一端用螺栓封閉。試样最后加工时采用小吃刀并在工作部分施行抛光,加工后未再經热处理。試样工作部分内徑为 15.88 ± 0.025 公厘;壁厚为 1.588 ± 0.013 公厘;平行长度为 127 公厘。加工后的精确度(包括壁厚均匀度,内孔直度和外圆圆度)曾經精密檢驗通过。

(2) 試驗仪器 試驗中采用了特制的扭轉及内压复合試驗台。最大内压仅能达約 270 公斤/公分²。扭矩用法碼加在固定长度的扭臂上得到。扭臂长度为 610 公分。应变测量采用下列方法:

長度测量:在試样平行长度上相隔 76.2 公厘的兩断面处各作一条周綫刻痕,作为标距。用两个带有千分尺目鏡的顯微鏡观察兩刻痕的相对位移,以測出長度变化。如此測得的軸向应变精确度約为 $\pm 1 \times 10^{-5}$ 。

直徑测量:在試件中部安置一个特制的电容式横向应变仪。当試样直徑發生变化时,它直接改动电容器平板間的空气隙距离。通过交流电桥测量电容变化,可得出試样直徑变化,如此測得的周向应变精确度約为 $\pm 1.6 \times 10^{-5}$ 。

扭角测量:用普通鏡式扭角仪安置在前述的 76.2 公厘标距兩端,用望遠鏡在圆弧形标尺上讀数。如此測得的剪应变精确度約为 $\pm 1.7 \times 10^{-5}$ 。

上述試驗台和测量仪器的構造、安置曾由 Gill^[1] 在引用本試驗中一部分結果时作

了詳細敘述，所以本文從略。

對試樣壁厚變化未曾直接測量，僅根據“材料容變全系彈性”的假定計算得出。

(3) 試驗加載途徑 複合應力試驗中採用的加載途徑共分四類：甲類是恆內壓試驗；乙類是恆扭矩試驗；丙類是恆比值試驗（屬簡單加載）；丁類是“中性變載”試驗。其中丁-1及丁-2 試驗中先以扭矩引入塑性區，再逐漸減少扭矩，增加內壓，保持八面體剪應力 τ_0 為恆值；丁-3 試驗中保持最大剪應力 τ_G 為恆值¹⁾。各加載途徑示於圖 1。由於試驗台所能供給的最大內壓的限制，本文多數試驗所達塑性程度不大。因此圖中根據 Mises 准則，除以通用的法定拉伸屈伏點 $\sigma_{0.2}$ 示出複合應力下的屈伏界限外，並以 $\sigma_{0.05}$ （即對應於塑性應變為 0.05% 的法定拉伸屈伏應力）示出屈伏界限，以求更清楚的看出各試驗中所達變形的塑性程度（圖中 p_0 和 M_0 分別代表根據 Mises 准則及 $\sigma_{0.2}$ 計算出的純內壓和純扭矩的屈伏數值）。

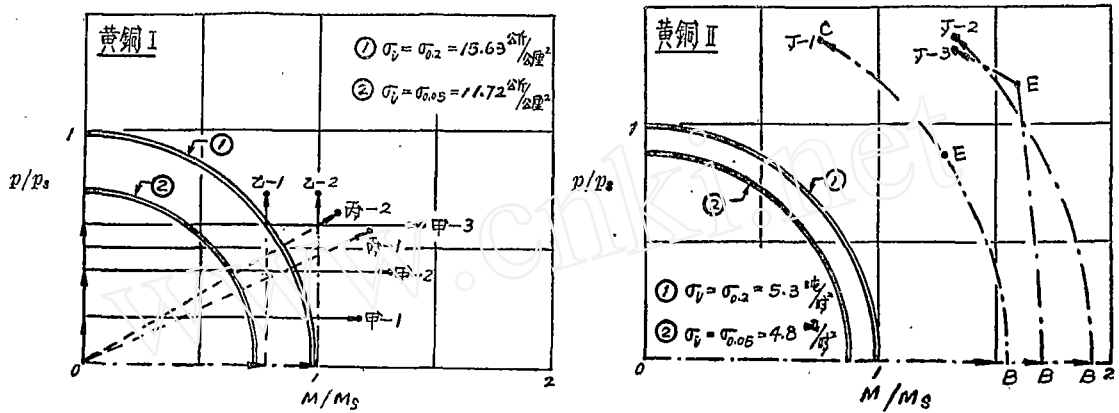


圖 1. 複合應力試驗加載途徑（→表示試驗終點）

三. 實驗結果及其分析

(1) 屈伏准則 根據初始塑性應變強度 $e_p^0 = 0.044\%$ ²⁾（相當於初始拉伸塑性應變 0.05%）所測定的初始屈伏點示於圖 2。試驗結果很分散，估計是由于試樣加工時，切削過程控制不夠嚴格，以致各試件面層材料被硬化所達程度不一致的緣故（甲類試驗的三個試樣似曾被過份硬化，在下文硬化特性的結果中也有表現）。和根據拉伸屈伏點 $\sigma_{0.05}$ 計算出的 Tresca 和 Mises 兩種理論曲線相比（應力分量的計算採用薄管公式，並忽略 σ_r 。以下各節中的應力計算同此。），本項材料的屈伏准則似乎比較

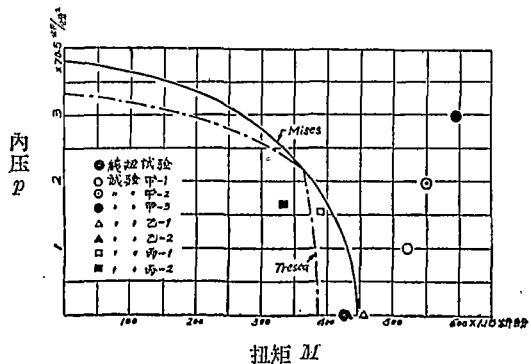


圖 2. 初始屈伏准則

$$1) \tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0, \quad \tau_G = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3),$$

2) e_p^0 的定義公式見本文第(8)式。

符合后一理论。

(2) 应力应变的方向关系 塑性应变增量与应力间的主轴方向关系示于图 3。

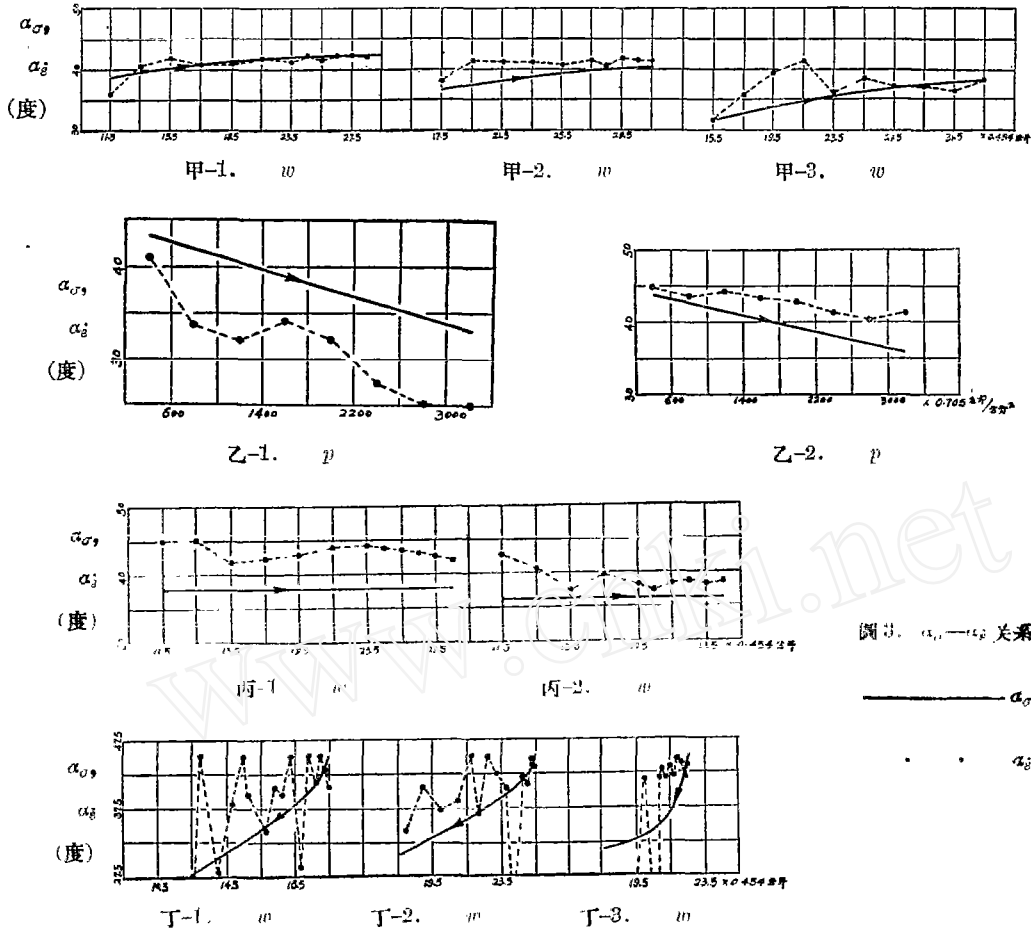


图 3. α_{σ} — α_{ϵ} 关系

对于甲乙丙类试验，塑性应变增量方向角 α_{ϵ} 是利用观测所得各应变变化曲线上对应点上的斜率计算得出。例如，对于甲类试验，根据观测所得 ϵ_{θ} , ϵ_z , γ 的系列数值可以得出以扭矩 M 作为共同参变数的 ϵ_{θ}'' , ϵ_z'' , γ'' 变化曲线。利用数值微分方法(本文采用 Reultledge 公式⁽¹¹⁾)算出斜率 $\frac{d\epsilon_{\theta}''}{dM}$, $\frac{d\epsilon_z''}{dM}$, $\frac{d\gamma''}{dM}$ 。再代入(5)式求出 α_{ϵ} ：

$$\tan 2\alpha_{\epsilon} = \frac{d\gamma''}{d\epsilon_{\theta}'' - d\epsilon_z''} \quad (4)$$

$$= \frac{d\gamma''}{dM} \cdot \frac{dM}{d\epsilon_{\theta}'' - d\epsilon_z''} \quad (5)$$

对于丁类试验，由于加载间隔较小，所以是直接利用两加载点间的应变增量数值代入(4)式去计算 α_{ϵ} 的。

由图 3 首先可见：在甲乙丙类各试验中， α_{ϵ} 与 α_{σ} 的定性关系是大约一致的：当 α_{σ} 增

加(甲类試驗),或减少(乙类試驗),或保持恆值(丙类試驗)时, α_s 数值大約追随着 α_σ 作类似变化。

在圖中甲乙丙类各試驗的初始数点上,試驗数据較分散。这是因为在这些試驗的初始各点上,塑性应变数值較小,因而計算出的斜率誤差比例較大的緣故。若略去初始各点的数据分散量、在甲乙丙类試驗中 α_s 和 α_σ 是可以認为大約相等的。它們的差值約为 2~3 度;而且仅除乙-1 外,所有試驗中 α_σ 都是小于 α_s 。 $\alpha_\sigma < \alpha_s$ 的一个可能原因是由于应力分布的不勻。根据文献[10]所給对于理想塑性材料的解析,可以算出:在本文所用試件中,如果也將材料認為理想塑性的,則試件管壁中 τ 的分布大約是均匀的,而 $(\sigma_\theta - \sigma_z)$ 在外壁上的数值約比以平均应力算出的数值小 27%。本試驗所用材料实际上是具有硬化性的,所以应力分布和理想塑性材料应不相同。但若为作極粗略的估計,对本試驗的 $(\sigma_\theta - \sigma_z)$ 数据也即根据 27% 的估計誤差作修正,則在 $32^\circ \leq \alpha_\sigma \leq 45^\circ$ 範圍內, α_σ 应增加 $0^\circ \sim 2.5^\circ$ 。由此可見,在这些試驗的大多数結果中, $\alpha_s \cong \alpha_\sigma$ 的方向关系是可以大略認為可用的。

对于丁类試驗,由于塑性应变变化自始至終都是很小的,所以根据塑性应变增量計算出的 α_s 数值分散很大,不能得出肯定結論。

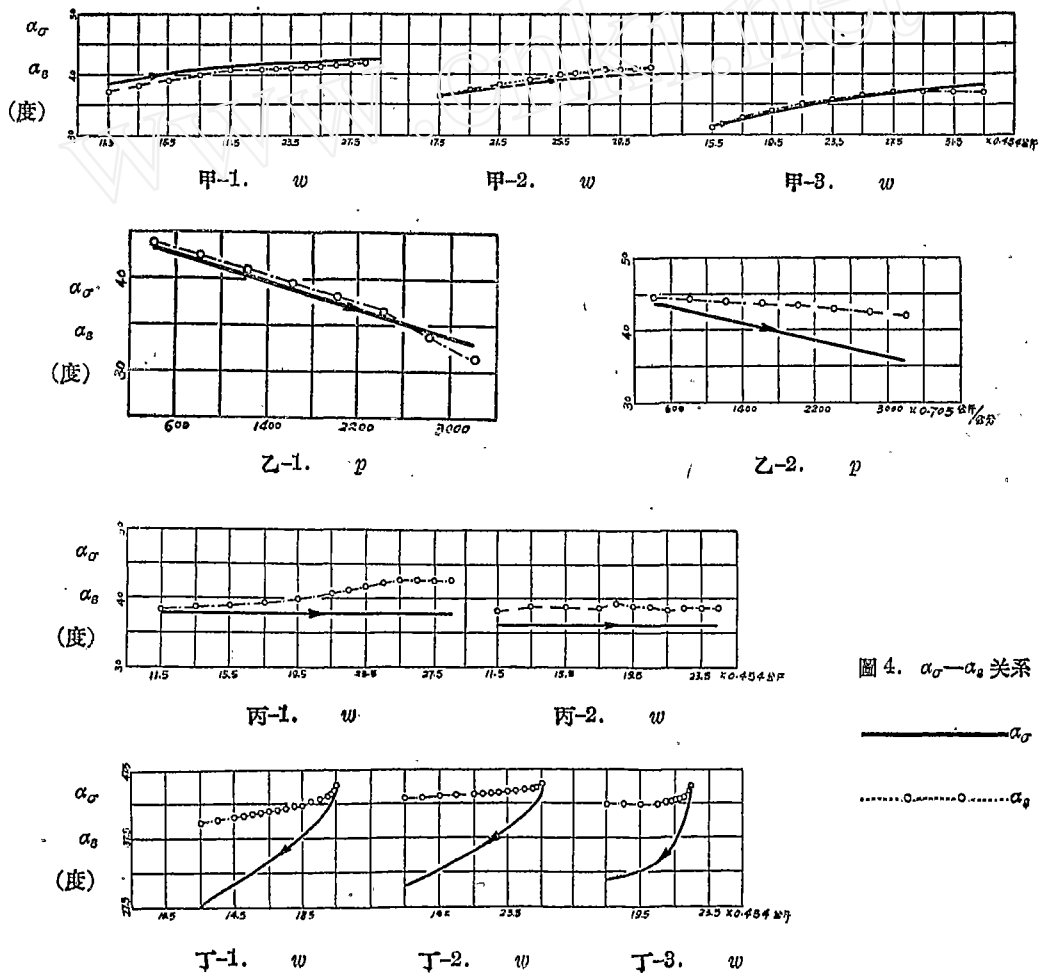


圖 4. $\alpha_\sigma - \alpha_s$ 关系

———— α_σ
 α_s

为了作比較,在圖4中又示出了总应变的主軸和应力主軸間的方向关系 α_e 和 α_σ . 在甲乙丙类試驗中,或由于加载情况符合簡單加载(丙类),或由于变形的塑性程度不大(甲类及乙类),所以 α_e 和 α_σ 間也是相差不大的. 而且由于 α_e 的計算中是包括了应变的彈性部分的,所以在这些塑性程度不大的試驗中, α_e 和 α_σ 的差別比 α_ϵ 和 α_σ 的差別一般还要小些.(仅在乙-2 試驗中,因初始塑性程度稍大,所以当試驗中塑性程度再繼續增加时, α_e 似有离开 α_σ 的趋向.) 而在丁类試驗中,由于塑性程度較大,而且加载情况又对簡單加载偏离較远,所以可以較明显看出 α_e 是和 α_σ 不相等的. 在丁类各試驗的終点, α_e 和 α_σ 的差值都在 10° 以上. 这是显然超出了試驗誤差范围的差別. (α_e 是根据应变总量計算的,所以它的可能誤差要比 α_ϵ 小得多. 由各 α_e 曲綫的光滑程度也可看出这一点.)

比較圖4中各試驗的 α_e 与 α_σ 的差別,似还可看出:在同样的复杂加载方式中,塑性程度愈大时, α_e 与 α_σ 的差別似也愈大.(比較乙-1 与 乙-2, 丁-1 与 丁-2.)

由以上分析可以归納說:在本試驗的誤差范围内,在加载情况偏离簡單加载不甚远时(指甲乙丙类試驗,其加载过程中应力分量無一减少者), $\alpha_e = \alpha_\sigma$ 的方向关系可以認為近似正确. 而对这类加载,在塑性程度不大时,試驗結果示出 α_e 与 α_σ 間也可認為大約相等. 在塑性程度較大而加载情况又偏离簡單加载較远时,(指接近所謂“中性变載”的加载方式), α_e 和 α_σ 間的关系由本試驗未能得出肯定結果,而 α_e 和 α_σ 是明显不相等的.

(3) 应力应变的分配关系 应力和塑性应变增量的 Lode 参数关系示于圖5及圖6. μ_ϵ 的計算是根据本文第(2)式. 和 α_e 一样,在甲乙丙类試驗,是以塑性应变曲綫各点

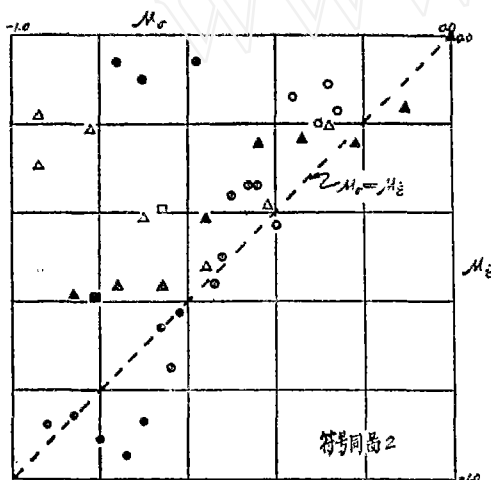


圖5. $\mu_\sigma - \mu_\epsilon$ 关系(甲、乙、丙类試驗)

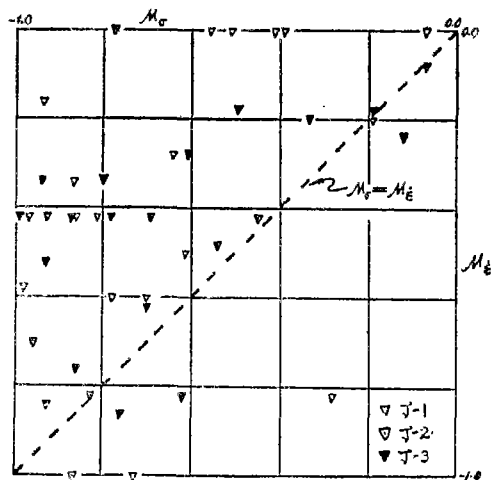


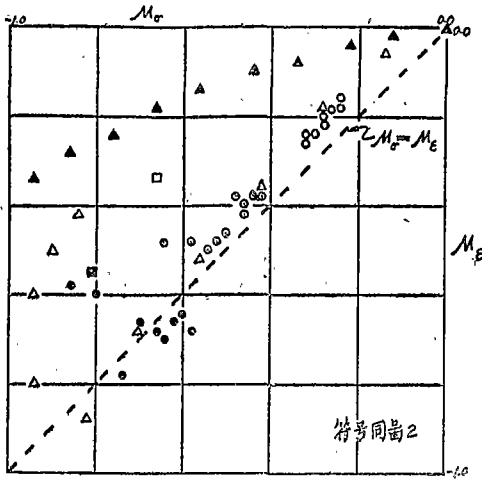
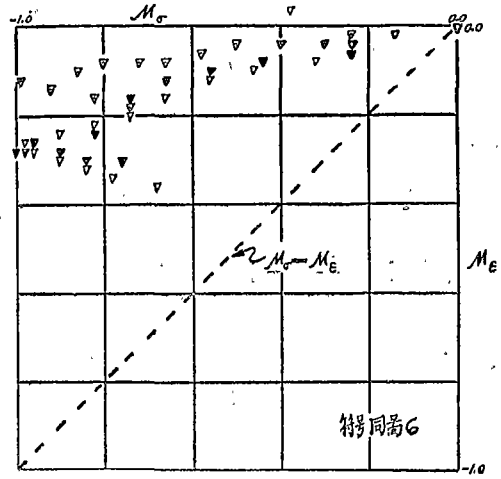
圖6. $\mu_\sigma - \mu_\epsilon$ 关系(丁类試驗)

的斜率代入求得;在丁类試驗是以測得的塑性应变增量代入求得.

应力和总应变的 Lode 参数关系示于圖7及圖8.

对丙类試驗,因 μ_σ 为恆值,所以 μ_ϵ 和 μ_ϵ 仅以其全試驗中的平均值和对应的 μ_σ 繪于圖中.

由于(3)式对于数据分散度的敏感性,所以計算出的 μ_ϵ 是很分散的. 但仍可以看出,在圖5的全部試驗点中,有 67% 是落在 $\frac{|\mu_\sigma - \mu_\epsilon|}{\mu_\sigma} < \pm 30\%$ 的范围内,故如考虑到 μ_ϵ

圖 7. $\mu_\sigma - \mu_\epsilon$ 关系(甲、乙、丙类試驗)圖 8. $\mu_\sigma - \mu_\epsilon$ 关系(丁类試驗)

的試驗誤差，則可以認為 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ 是最初步的近似。在圖 7 中，對於塑性程度不大的複雜加載，試驗點也多數靠近 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ 直線。（因除乙-2 試驗外，其他試驗點中 69% 落在 $\frac{|\mu_\sigma - \mu_\epsilon|}{\mu_\sigma} \leq \pm 25\%$ 的範圍內。）而在塑性程度稍大的複雜加載中，即使無一分量減少（見圖 7 乙-2 試驗點）， μ_ϵ 與 μ_σ 也會有明顯分離的趨向。其分離情況為 $|\mu_\epsilon| < |\mu_\sigma|$ 。

再比較圖 6 及圖 8，可以看出：雖然圖 6 中的數據很分散，不足以證實丁類試驗點是否仍靠近 $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ 直線；但在圖 8 中則顯然可見：在這類偏離簡單加載較遠的加載方式中， $|\mu_\epsilon|$ 是顯著的小於 $|\mu_\sigma|$ 的。這一現象最近 Жуков 在對 30XН3A 合金鋼的試驗中也曾發現^[12]（該試驗應用拉力加內壓的複合系統，所以應力主軸是固定的；本文試驗中的應力主軸則是在材料中迴轉的）。

由圖 7 和圖 8 也可看出：在同樣的複雜加載方式中，塑性程度愈大時， μ_ϵ 和 μ_σ 的差別似也愈大（比較乙-1 和乙-2，丁-1 和丁-2）。

(4) 硬化特性 由屈伏準則的試驗結果得知本試驗所用材料的屈伏較符合 Mises 理論。因此對於硬化特性曲線的建立，在瞬時強度上採用了根據 Mises 準則定義的應力強度 σ_i ：

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6)$$

對於應變強度，除採用通常的 e_i 外：

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} \quad (7)$$

$$e'_i = \frac{\sigma_i}{3G}, \quad e''_i = e_i - e'_i \quad (8)$$

本文還試用了 Odqvist^[13] 提出的應變增量二次不變量沿變形途徑的積分，並稱之為“廣義應變強度”，記為 ϑ_i 。為了和通常採用的 $\sigma_i - e_i$ 曲線作比較， ϑ_i 中也包括了彈性部分，即令：

$$\vartheta_i = \vartheta'_i + \vartheta''_i \quad (9)$$

$$\vartheta'_i = \frac{\sigma_i}{3G}, \quad (10)$$

$$\vartheta'_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \int \sqrt{(d\varepsilon''_1 - d\varepsilon''_2)^2 + (d\varepsilon''_2 - d\varepsilon''_3)^2 + (d\varepsilon''_3 - d\varepsilon''_1)^2}. \quad (11)$$

计算 ϑ'_i 时, (11) 式中各应变增量的数值在丁类试验系用直接测得各加载点间应变差; 对甲乙丙类试验仍由应变变化曲线上的斜率求得. 例如, 对乙类试验, 有:

$$\vartheta'_i = \vartheta'_i^{(0)} + \frac{\sigma_i - \sigma_i^{(0)}}{3G} + \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^p \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon''_1}{dp} - \frac{d\varepsilon''_2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon''_2}{dp} - \frac{d\varepsilon''_3}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon''_3}{dp} - \frac{d\varepsilon''_1}{dp}\right)^2}, \quad (12)$$

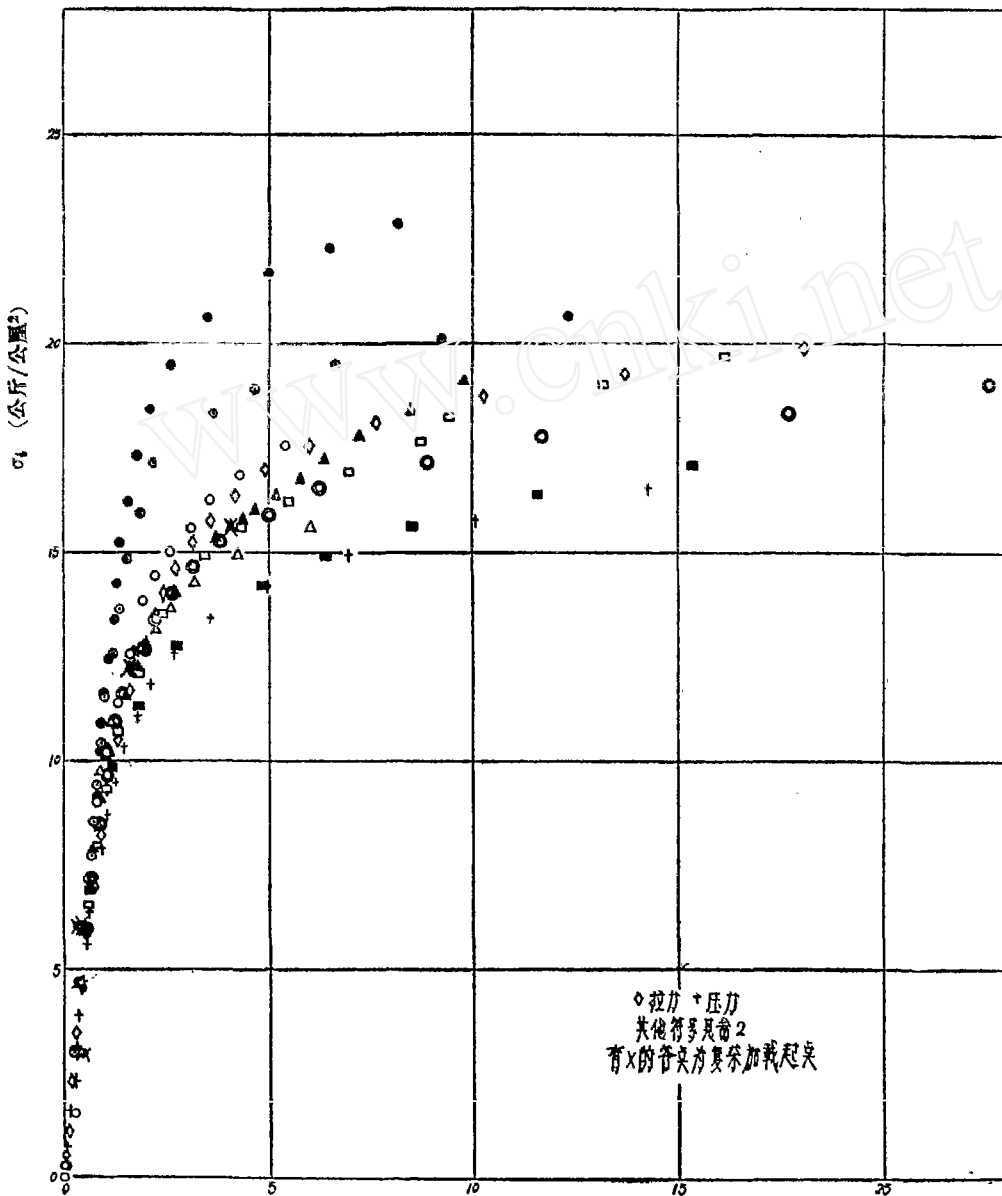


图9. $\sigma_1 - \gamma_i$ 曲线(黄铜 I) $\gamma_i (10^{-3})$

其中 $\sigma_i^{(0)}$, $\sigma_i^{(0)}$ 为予加载终点的 σ_i , σ_i 值。由于予加载是纯扭, 所以有 $\sigma_i^{(0)} = e_i^{(0)}$, 可由所测得的 (0) 点处总应变值算出。对于甲类试验, 由于 (0) 点都还在弹性区域, 所以也有 $\sigma_i^{(0)} = e_i^{(0)}$ 。对于丙类试验, $\sigma_i^{(0)} = 0$ 。

对甲乙丙类试验, 以 $\sigma_i - \sigma_i$ 及 $\sigma_i - e_i$ 建立的硬化特性曲线示于图 9 及图 10。可以看出: 它们在平均 σ_i 的上下分散都约为 $\pm 21\%$ 。如将甲类试验的数据除外, (它们在屈服点及瞬时强度方面的表现都似乎特高, 其可能原因见 (三) (1) 节), 则 σ_i 的分散在平均曲线上下约 $\pm 10\%$; 而其中拉、压、扭等试验和丙类简单加载的诸曲线所占分散度约为 8% 。因此, 若甲类试验结果在硬化特性上确实应予除外的话, 则本项分析似说明: 在本文研究的小弹塑性范围内, 以 $\sigma_i - e_i$ 或 $\sigma_i - \sigma_i$ 建立的硬化特性曲线在唯一性上的精确度, 对这种

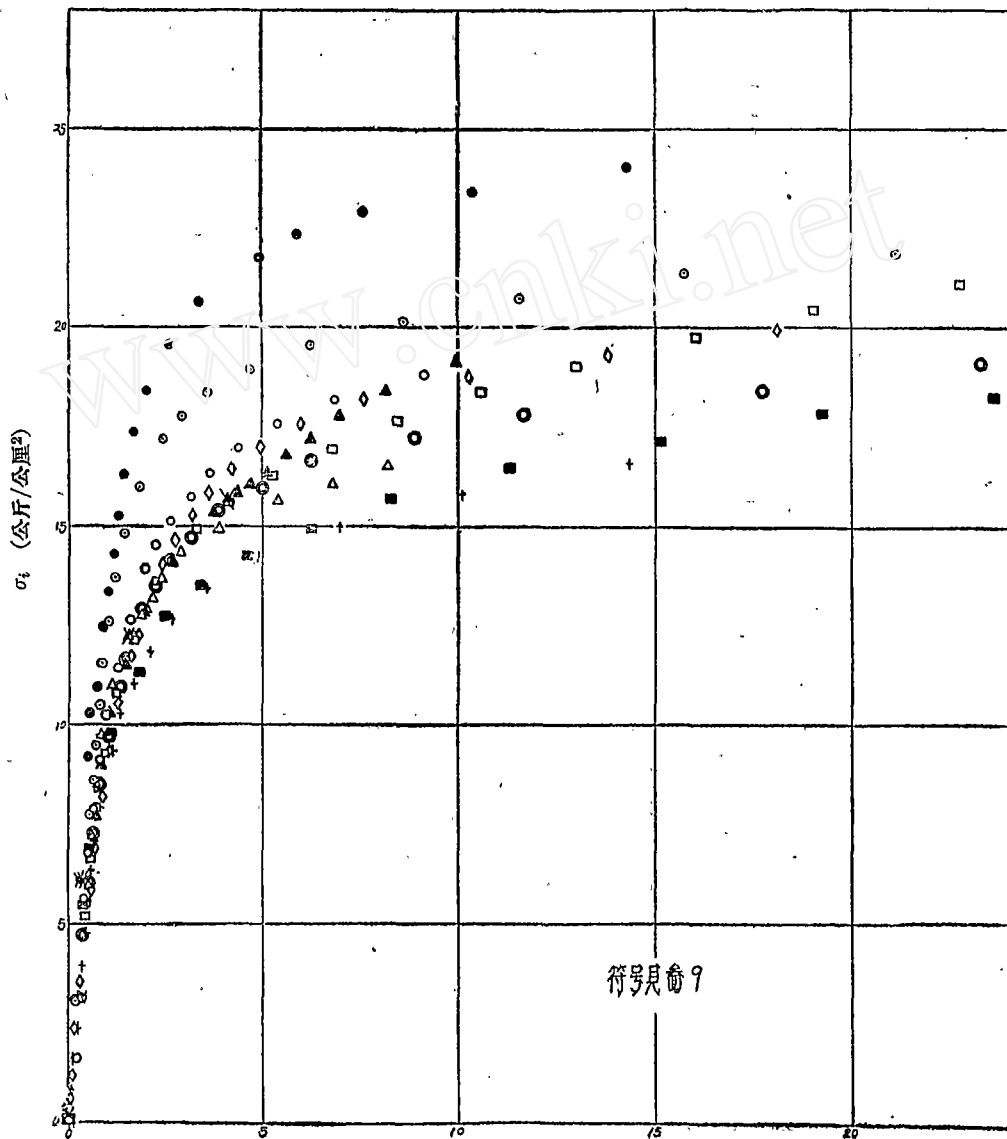


圖 10. $\sigma_i - e_i$ 曲线 (黃銅 I) $e_i (10^{-3})$

应力分量無一减少的复杂加载与对簡單加载大約相同。比較乙-1 及乙-2 的試驗点,似又可看出:塑性程度大时,复杂加载的硬化曲綫有偏离总曲綫的趋向。

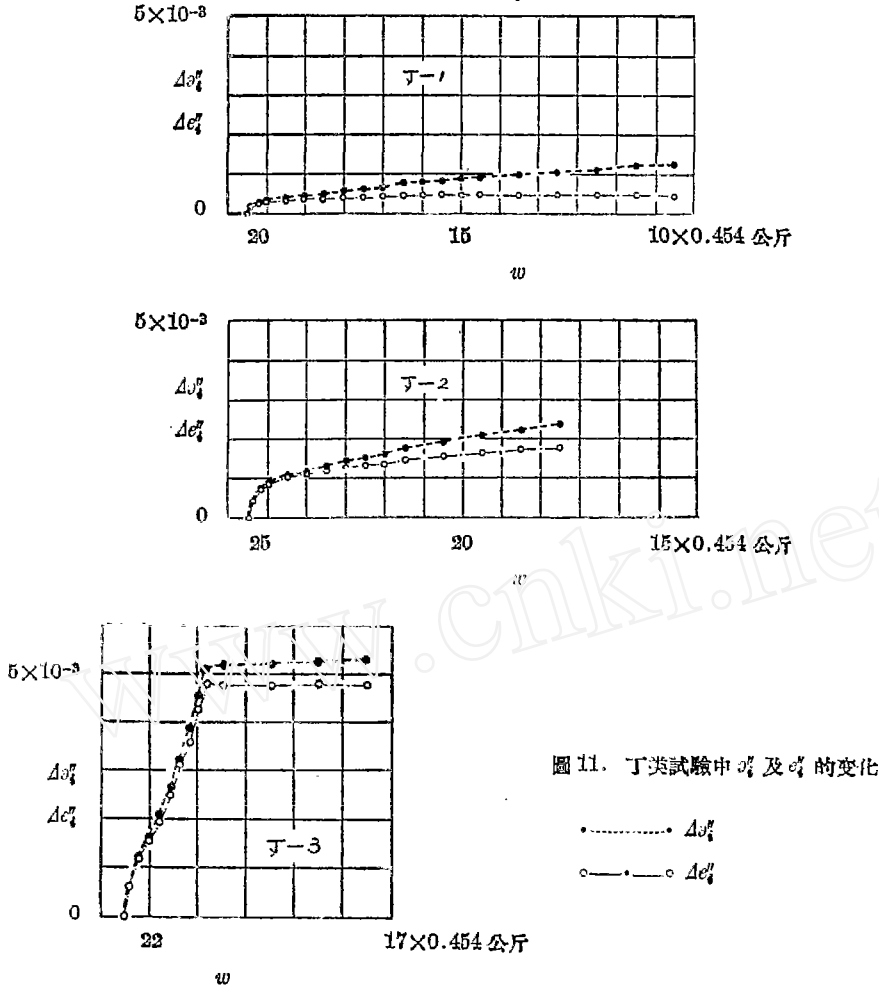


圖 11 示出了丁类試驗过程中 σ_i' 及 ϵ_i' 的变化。由圖可見:在丁-1 試驗中,虽 σ_i 保持恒值,而 σ_i' 及 ϵ_i' 的增加約为 1×10^{-3} (变載起点的 σ_i 及 ϵ_i 約为 3×10^{-3});在丁-2 試驗中,恒 σ_i 下 σ_i' 及 ϵ_i' 的增加約为 2×10^{-3} (变載起点的 σ_i 及 ϵ_i 約为 9×10^{-3})。說明以 $\sigma_i - \epsilon_i$ 或 $\sigma_i - \sigma_i'$ 建立的硬化特性曲綫对“中性变載”似是不适用的。因为在这种加载情况下, ϵ_i 和 σ_i 对 σ_i 都出现了非單值的关系¹⁾;而且非單值关系在变形塑性程度愈大时似也愈显著。在丁-3 試驗中,在 E 点以前 σ_i' 及 ϵ_i' 的增加达 5×10^{-3} (加载起点的 σ_i 及 ϵ_i 約为 11×10^{-3}), E 点以后 σ_i' 及 ϵ_i' 的变化約为 零。似示出本試驗中, E 点以前是圈加载, E 点以后屬卸載。亦即再一次示出本項材料的屈伏准則不近于 Tresca 理論,而較近于 Mises 理論 (見圖 16)。

1) 有些研究者^[15]認这种“中性变載”中,塑性应变的变化是由于管壁应力不均,在变載中內壁材料續有屈伏所致。但 Marin, 胡令開^[16]最近曾又根据以內壁应力計算出的屈伏准則进行中性变載,仍發現有塑性应变变化。說明应力不均似非这一現象的全部原因。

(5) 应变预测 本文采用了下述的简单形变理论和简单流动理论预测应变值, 以比较它们在各项加载方式下的适用性。

形变理论^{[16] 1)}:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu\sigma_z) + \Phi(\sigma_t) \left(\sigma_{\theta} - \frac{1}{2}\sigma_z\right), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_{\theta}) + \Phi(\sigma_t) \left(\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_{\theta}\right), \\ \gamma &= \frac{1}{G}\tau + 3\Phi(\sigma_t)\tau. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

流动理论^[17]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu\sigma_z) + \int_0^{\sigma_t} \phi(\sigma_t) \left(\sigma_{\theta} - \frac{1}{2}\sigma_z\right) d\sigma_t, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_{\theta}) + \int_0^{\sigma_t} \phi(\sigma_t) \left(\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_{\theta}\right) d\sigma_t, \\ \gamma &= \frac{1}{G}\tau + 3 \int_0^{\sigma_t} \phi(\sigma_t) \tau d\sigma_t. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上两组公式中 $\Phi(\sigma_t)$ 及 $\phi(\sigma_t)$ 都由拉伸试验数据得出。

对于甲乙丙类复杂加载, 两理论所给的预测值精确度大约相同; 它们和对简单加载(丙类试验)所预测的应变数值精确度也大约相同。(见图 12 至 15)(甲-3 试验中预测精确度似较差, 可能仍由于前述原因。)

对于丁类试验的应变预测, 形变理论较明显的是不能适用的(见图 15)。根据流动理论, 在中性变载中, 塑性应变应无变化。但本类试验结果明显表示各塑性应变分量都确有变化。在丁-3 试验中, 变化较大。再一次说明了材料的屈伏准则对 Tresca 和 Mises 两理论说是较为接近后者的。事实上, 在丁-3 试验中, 应变变化还有一不连续点 E (见图 15)。这个不连续的应变变化可由图 16 得到解释。根据 Mises 屈伏准则判断(若忽略硬化的各向异性, Mises 准则的瞬时强度应为以原点为心的同心圆), 沿丁-3 的加载途径 BEC 上, 在 E 点以前属加载, E 点以后属卸载。因此, 如果瞬时强度符合 Mises 准则, 则在丁-3 试验中, E 点以前各塑性应变分量都应增加; 而在 E 点以后, 应变变化应符合虎克定律。这两个推论在试验结果中都相当明显的得到证实。(由图 15 中丁-3 试验结果可见: E 点以后, $\gamma-\tau$ 间, $\varepsilon_{\theta}-p$ 间以及 ε_z-p 间都大致成直线关系, 且其斜率都与卸载直线大约一致。)

根据滑移理论^[18], 在上述的“中性变载”中是会有塑性应变变化的。但用滑移理论对丁-1 粗略计算所得结果, 理论预测的应变值超过实际数据很多(见表 2)。似乎说明滑移理论所根据的尖角屈伏面在定性上固然能给出合于实际的预测, 但在定量上却似嫌尖角太尖, 即: 该理论中所包含的硬化作用的各向异性程度似比实际程度大了些。

当然, 表 2 中所示出的数值偏差也可能部分是由于中性变载试样与理论预测值所根据的拉力试样, 二者硬化性能在一致性上的误差所引起的。但在丁-3 试验中, 对 E 点以后所发现的各应变分量的弹性变化现象, 则用滑移理论似完全不能得到解释。如图 16,

1) 形变理论在原提出时是只为在简单加载中应用的, 但由于本项理论在应用上比较简便, 所以本文也将它试用于各种复杂加载, 以探讨其适用范围扩大可能性。

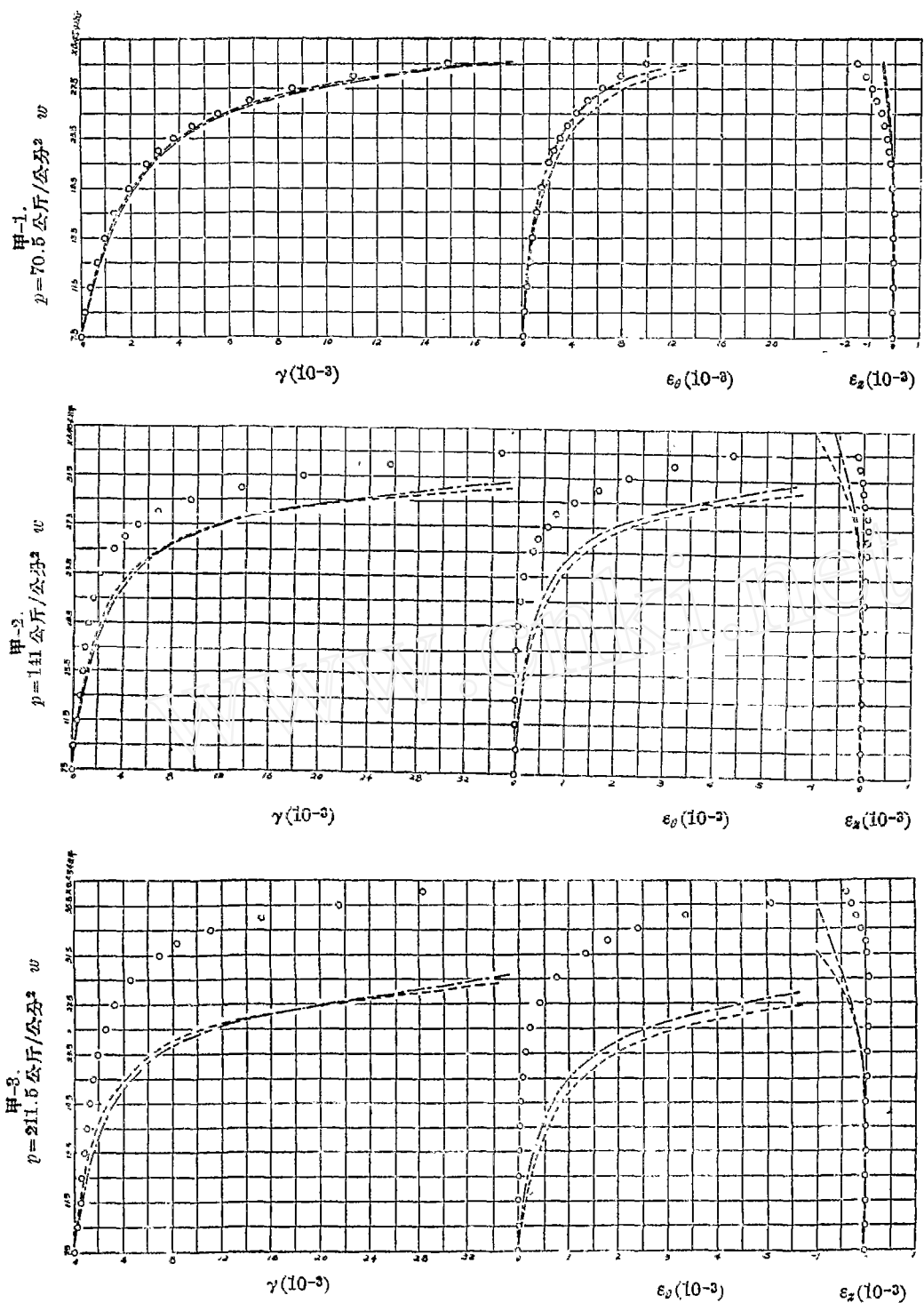


圖 12. 恒內壓試驗應變預測

- 實驗數據
- 形變理論預測值
- - - 流動理論預測值

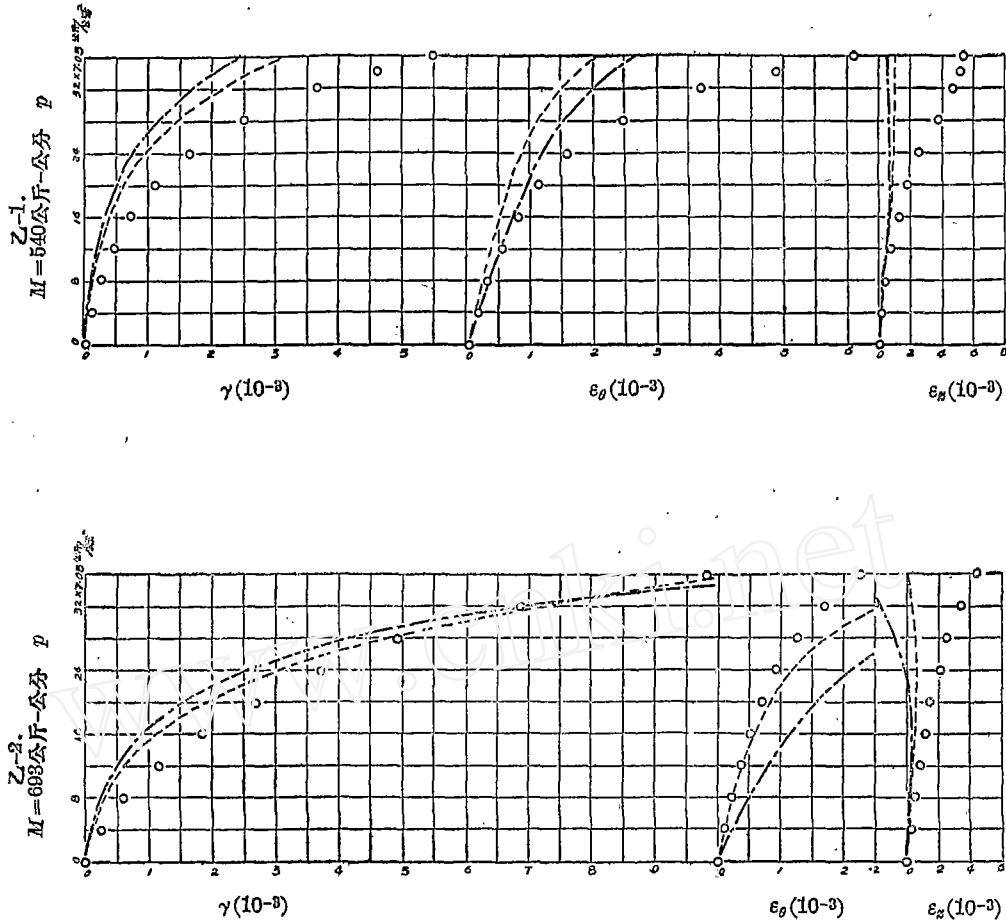


圖 19. 恒扭矩試驗应变預測

(符号同圖 12)

表 2. 丁-1 試驗中应变数据与滑移理論預測值的比較

	$\Delta\gamma(10^{-3})$		$\Delta\epsilon_{\theta}(10^{-3})$		$\Delta\epsilon_x(10^{-3})$	
	E 点	C 点	E 点	C 点	E 点	C 点
实验数据	0.65	0.31	0.80	1.49	0.12	0.24
滑移理論預測值	22.75	25.08	10.32	14.34	3.34	2.55

注：1. 各应变分量 $\Delta\gamma$, $\Delta\epsilon_{\theta}$, $\Delta\epsilon_x$ 均自中性变載始点 B 起算。B, E, C 各点位置見圖 1。

2. 在应变預測中，各点系分为 96 个方向进行积分 (即 $\delta\beta = \frac{\pi}{6}$, $\delta\Omega = \frac{\pi}{8}$, 見[18])。

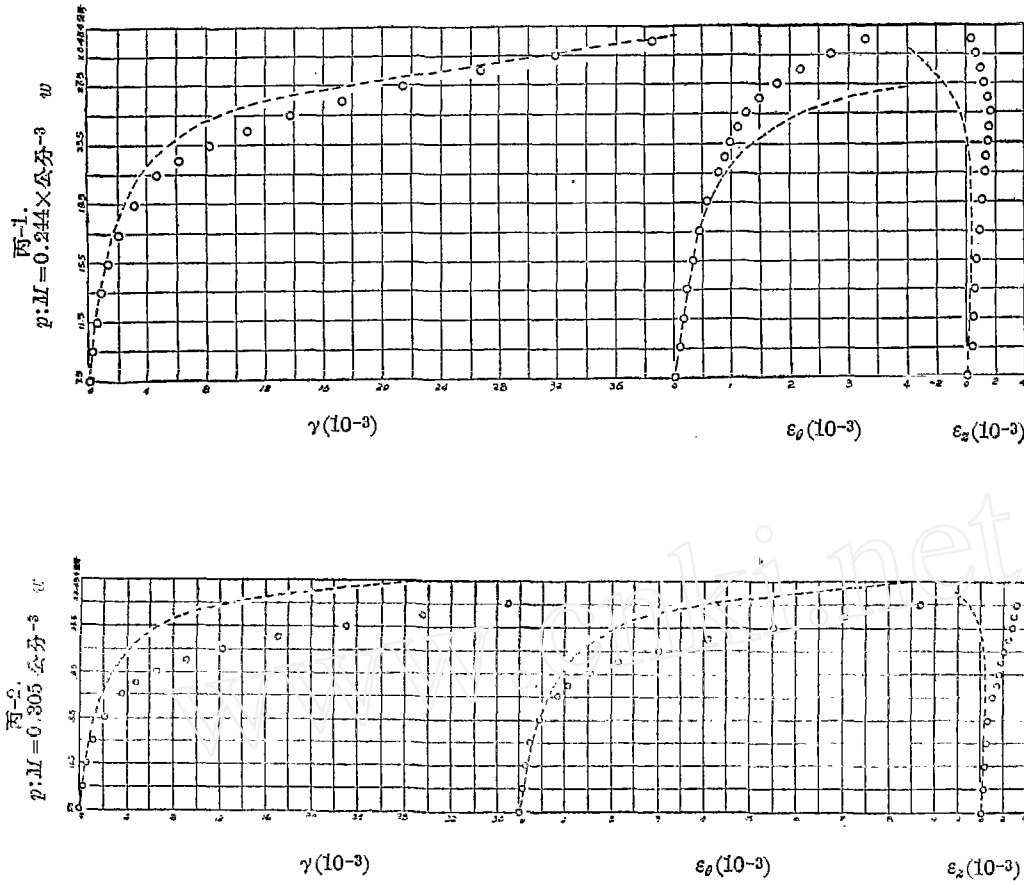


圖 14. 比例加载应变预测

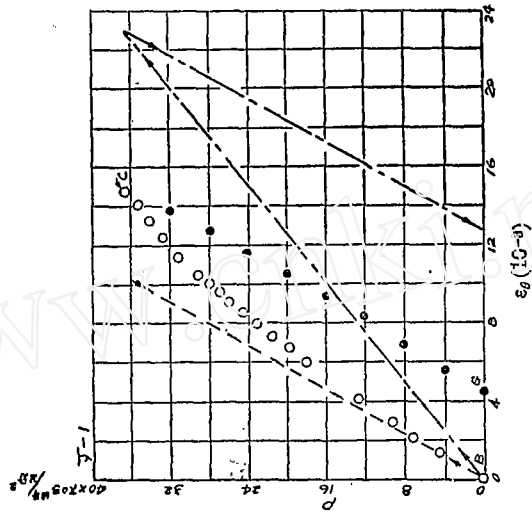
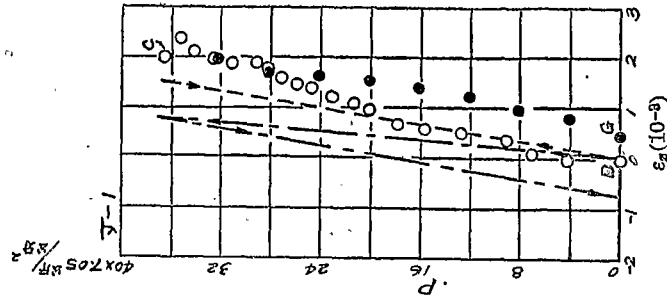
○ 实验数据

--- 流动理论预测值

(形变理论同此)

沿 OBE 加载至 B 点时, 根据滑移理论, 当时的屈伏面形状应如曲线 $BEFKHB$ 所示^[10]. 因此再沿 EC 施载时, 施载途径应是加载性的, 因而根据滑移理论, 在 EC 途径中应继续有塑性应变产生, 这一推论和丁-3 试验结果明显不符.

综上所述, 在本文的小弹塑性变形范围内, 在应力分量无一减少的加载情况下, 简单流动理论和形变理论所预测的应变数值彼此无大差别. 用上述任一理论对这种复杂加载的应变预测精确度和对简单加载的预测精确度相近. 但当应力分量有所减少的情形下 (即“中性变载”或接近“中性变载”的情况下), 形变及滑移理论所预测的应变数值和实验数据间都有较显著的差异. 仅流动理论在本情况下所预测的应变数值与实验数据较为相近.



丁-1
 $\sigma_3 = 6.12$ 公斤/公厘²
 $\sigma_1 = 12.99$ 公斤/公厘²

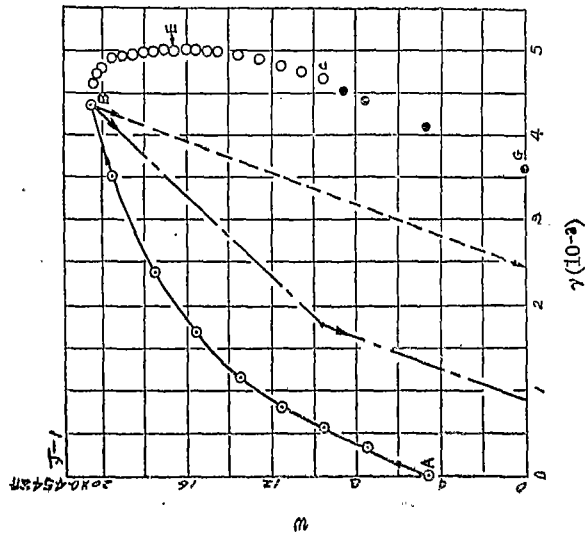
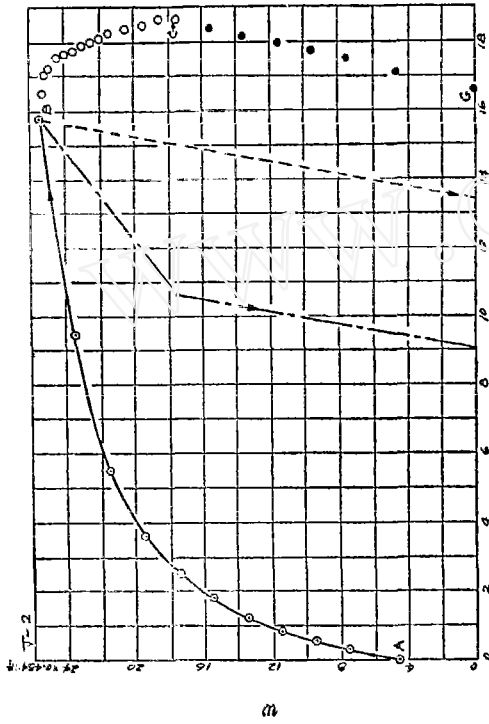
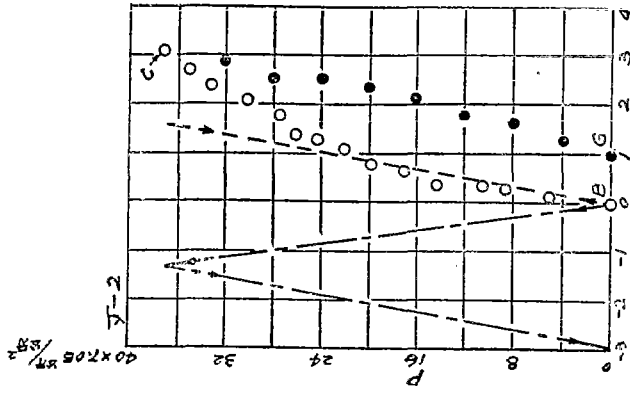


圖 16. 中性变載試驗应力应变关系

- A 至 B 預負荷
- B 至 C 變載
- C 至 G 卸載
- 形變理論預測值
- 流動理論預測值



丁-2

$\tau_0 = 7.67$ 公斤/公厘²

$\sigma_1 = 16.06$ 公斤/公厘²

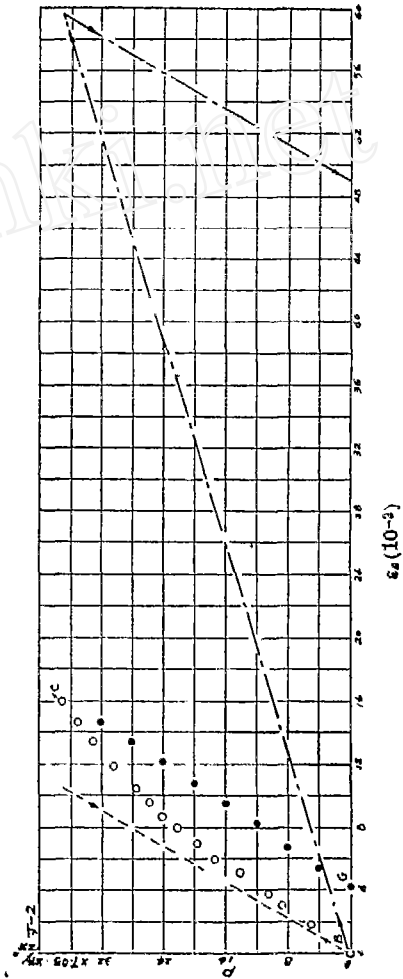
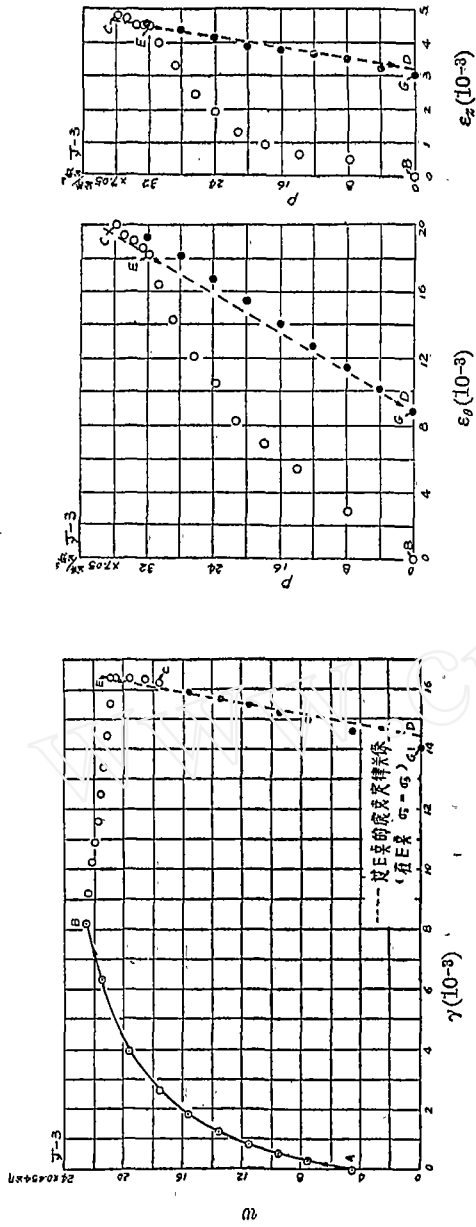


圖 15. 中性變載試驗應變預測

- A 至 B 預負荷
- B 至 C 變載
- C 至 G 卸載
- 形變理論預測值
- - - 流動理論預測值



丁-3
 $\tau_G = 8.22$ 公斤/公厘²

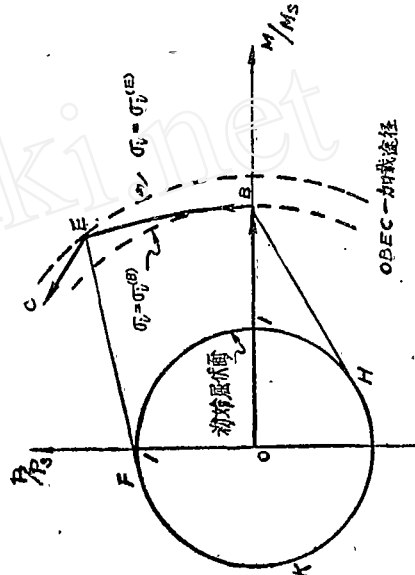


圖 16. 丁-3 試驗中 E 點的風伏面

四. 結論

根据本項研究結果,对于退火三七黃銅的彈塑性变形,其应力应变关系可以归納为下述几項規律:

(1) 对于屈伏准則,本文試驗結果分散,未能得出肯定結論。但在 Tresca 和 Mises 兩理論中,試驗結果似較符合后者。

(2) 在本文所及的小彈塑性範圍內(最大应变强度值約为 2%),对于加载过程中应力分量無一减少的复杂加载,应力应变关系大約符合簡單流动理論。即:塑性应变增量和应力的主軸方向大約重合,而且对应的 Lode 参数可以粗略認為相近。這項結論和 Phillips, Kaechele^[20] 在鋁合金上以及 Baildon^[21] 在低碳鋼上用拉扭复合加载所得的結果一致。

根据这样的流动理論,利用拉力試驗数据,对这种复杂加载的应变值进行預測时,其精确程度大約和形变理論对簡單加载的应变預測相同,因此可以認為是适用的。這項結論和 Morrison, Shepherd^[22] 用合金鋼、鋁合金进行的拉扭复合加载,以及 Marin 等^[15,23,24] 用低碳鋼、鋁合金进行的拉、内压复合加载所得結果一致。(虽然,許多研究者^[25,26,27,28] 曾發現:在这种复杂加载下,如果先以一种应力將材料引入塑性后,保持該应力不变,再加另一种应力时,后加应力和对应应变間的初始模量数值和流动理論并不相符;本文由于試驗数据不够精确,未能对这一点作出判断。但可能在本文所及的小彈塑性範圍內,这个数值对理論的偏差也是不显著的。Morrison, Shepherd^[22] 和 Faig^[29] 的試驗結果似也說明这一点。)

(3) 对于加载过程中应力分量無一减少的复杂加载,在变形的塑性程度較小时,应力应变关系如果用簡單形变理論描述,也沒有明显誤差。即:总应变与应力間主軸方向大約重合,而且对应的 Lode 参数大約相近。(这其实可能是因为在這種情况下,根据总应变定义的主軸方向和 Lode 参数,和根据塑性应变增量定义的相当物理量間,数值上沒有显著差异的緣故。)

在這種加载情况下,根据簡單形变理論来預測应变也大致是可以适用的。Жуков^[12,30] 在主軸固定的这种复杂加载下也曾得到相同結論。由此看来,形变理論对于应力分量無一减少的复杂加载似乎是也可以适用的,只要(i)应力主軸在材料中方向固定,或(ii)应力主軸虽然迴轉但变形的塑性程度还不很大。

(4) 对于偏离簡單加载較远的复杂加载(即加载中应力分量有减少者,亦即接近所謂“中性变載”的情况),应力应变的定性关系,本文由于試驗数据分散,未能确定;但是簡單形变理論的几項基本假定,在这类加载中是較明显的不适用的。亦即:在这类加载中,总应变和应力間,主軸方向明显不同,而且 Lode 参数明显不相等。对这类加载,形变或滑移理論的应变預測值都和实验数据有較明显的不符。

Жуков^[22] 在对合金鋼的这类加载試驗中,虽也曾發現 Lode 参数明显不等,但他認為形变理論的应变預測仍和实验数据相近。而 Marin, 胡介聞对鋁合金^[31,32] 和低碳鋼^[15] 所作的这类試驗中,發現应变变化大約符合滑移理論。但這些試驗都是应用主軸固定的复合应力系統(拉加内压);在接近“中性变載”的变形过程中,这种系統下材料的硬化情况和

本文所用主軸迴轉下的情況似會有相當差異，這可能是對於這類加載，應變預測會得到不同結論的原因。所以，對於接近“中性變載”時的塑性應力應變關係，似還有待於進一步的研究。

(5) 在本文所及的小彈塑性範圍內，對各種加載過程，根據應力強度和廣義應變強度所建立的硬化特性曲線 $\sigma_i - \vartheta_i$ 和通常的應力應變強度曲線 $\sigma_i - \epsilon_i$ 沒有明顯差異。上述兩種硬化特性曲線對於應力分量無一減少的複雜加載似乎都可適用。其唯一性的精確程度大約和簡單加載中 $\sigma_i - \epsilon_i$ 曲線相同。Жуков^[12,30] 在主軸固定的這種複雜加載下，也曾得到 $\sigma_i - \epsilon_i$ 曲線大約一致的結論。而對於主軸迴轉的複雜加載，近來的試驗^[26,28] 雖都發現在拉後加扭、或扭後加拉時， $\sigma_i - \epsilon_i$ 曲線上會出現一個新的屈服階段，因而引起這個特性曲線的一些分散；但在變形塑性程度不大時，這個分散情況可能也仍是並不顯著的。在文獻[26, 28] 的數據中以及 Faupel, Marin^[31] 的試驗結果似也可看出這一點。

對於偏離簡單加載較遠而接近所謂“中性變載”的情況，本試驗中 $\sigma_i - \vartheta_i$ 和 $\sigma_i - \epsilon_i$ 間都呈現非單值的關係。說明在主軸迴轉而且接近“中性變載”的複雜加載中，用它們作為硬化特性曲線似乎是不適宜的。雖然在主軸固定的應力系統下，可能由於硬化作用的各向異性情況較不顯著，所以 Жуков^[12] 曾認為 $\sigma_i - \epsilon_i$ 曲線對於這類加載也仍是粗略可用的。

(6) 在複雜加載下，應力應變關係對於簡單形變理論中的各項基本假定（指： $\alpha_s = \alpha_o$ ； $\mu_s = \mu_o$ 和 $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ ）的偏差程度似隨變形的塑性程度而異。在同樣的複雜加載方式下，塑性程度愈大時，對上述基本假定的偏差似也愈大。換言之，變形的塑性程度愈大時，應力應變關係對於複雜加載的敏感性似也愈大。本文試驗結果對這一現象只示出一些定性關係，其間的定量關係似還有待於進一步的研究。

五. 尾語

本文會由葉鈞道和陳祥渤兩同志協助計算和繪圖工作，謹此志謝。

參 考 文 獻

- [1] Taylor, G. I., Quinney, H., The Plastic Distortion of Metals, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, Series A, 230 (1932), p. 323.
- [2] 例如, Hill, R., *Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford, 1950), p. 16.
- [3] Mises, R. V., *Mechanik der Plastischen Formänderung von Kristalle*, *ZAMM*, B. 8 (1928), S. 161.
- [4] Hill, R., A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity, *Quar. Mech. App. Math.*, 1 (1948), p. 18.
- [5] Hodge, P. G., Prager, W., A Variational Principle for Plastic Materials with Strain-Hardening, *Jl. Math. & Phys.*, 27 (1948), p. 1.
- [6] Handelman, G. H., Lin, C. C., Prager, W., Mechanical Behaviour of Metals, *Quar. App. Math.*, 4 (1946—1947), p. 397.
- [7] Taylor, G. I., A Connexion between the Criterion of Yield and the Strain-Ratio Relationship in Plastic Solids, *Proc. Roy. Soc. (London)*, (A) 191 (1947), p. 441.
- [8] Swift, H. W., Plastic Strain in Isotropic Strain Hardening Materials, *Engineering*, 162 (1946), p. 381.
- [9] Gill, S. S., Three “Neutral” Loading Tests, *Jl. App. Mech.*, 23 (1956), p. 497.
- [10] Crossland, B., Hill, R., On the Plastic Behaviour of Thick Tubes under Combined Torsion

- and Internal Pressure, *Jl. Mech. Phys. Solids*, **2** (1953—1954), p. 27.
- [11] Reutledge, G., A Reliable Method for Obtaining the Derivative Function from Smoothed Data of Observation, *Phy. Rev.*, **40** (1932), p. 262.
- [12] Жуков, А. М., О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении, *Изв. АН СССР (ОТН)*, 1956, № 12, стр. 72.
- [13] Odqvist, F. K. G., Die Verfestigung von flusseisenähnlichen Körpern, *ZAMM*, **B. 13** (1933), S. 360.
- [14] Corten, H. T., 关于文献[31]的讨论, *Trans. ASME*, **75** (1953), p. 1187.
- [15] Marin, J., Hu, L. W. (胡令闻), Biaxial Plastic Stress-Strain Relations of A Mild Steel for Variable Stress Ratios, *Trans. ASME*, **78** (1956), p. 499.
- [16] 例如, Пльюшин, А. А., Пластичность, *ОПЗ* (1948), стр. 98.
- [17] 例如, Shepherd, W. M., Plastic Stress-Strain Relations, *Proc. I. M. E.*, **159** (1948), p. 95.
- [18] Batdorf, S. B., Budiansky, B., A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip, *NACA Tech. Rep.*, 1841, (Apr., 1949).
- [19] Sanders, J. L., Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Functions, *Proc. 2nd U. S. Nat. Cong. App. Mech.* (1954), p. 455.
- [20] Phillips, A., Kaechelle, L., Combined Stress Tests in Plasticity, *Jl. App. Mech.*, **23** (1956), p. 43.
- [21] Baildon, E., Experiments in Compound Stress & Strain, Report No. 1943/3, British Automobile Research Committee, (1943).
- [22] Morrison, J. L. M., Shepherd, W., An Experimental Investigation of Plastic Stress-Strain Relations, *Proc. I. M. E.*, **163** (1950), p. 1.
- [23] Marin, J., Sauer, J. A., Plastic Stress-Strain Relations under Radial and Non-Radial Stress-Loading, *Jl. Frank. Inst.*, **256** (1953), p. 119.
- [24] Marin, J., Hu, L. W. (胡令闻), Hamburg, J. F., Plastic Stress-Strain Relations of Alcoa 14S-T 6 for Variable Biaxial Stress Ratios, *Proc. ASM*, **43** (1953), p. 636.
- [25] Жуков, А. М., Работнов, Ю. Н., Исследование пластических деформация стали при сложном нагружении, *Инж. сб.* т. 18 (1951), стр. 165.
- [26] Жуков, А. М., Пластические деформация стали при сложном нагружении, *Изв. АН СССР (ОТН)*, 1954, № 11, стр. 53.
- [27] Naghdi, P. M., Rowley, J. G., An Experimental Study of Biaxial Stress-Strain Relation in Plasticity, *Jl. Mech. Phys. Solids*, **3** (1954—1955), p. 63.
- [28] Свешникова, В. А., О пластическом деформировании упрочняющихся металлов, *Изв. АН СССР (ОТН)*, 1956, № 1, стр. 155.
- [29] Feign, M., Inelastic Behaviour under Combined Tension and Torsion, *Proc. 2nd U. S. Nat Cong. App. Mech.* (1954), p. 469.
- [30] Жуков, А. М., Сложное нагружение и теории пластичности изотропных металлов, *Изв. АН СССР (ОТН)*, 1955, № 3, стр. 81.
- [31] Marin, J., Hu, L. W. (胡令闻), On the Validity of Assumptions Made in Theories of Plastic Flow for Metals, *Trans. ASME*, **75** (1953), p. 1181.
- [32] Hu, L. W. (胡令闻), Marin, J., Anisotropic Loading Functions for Combined Stress in the Plastic Range, *Jl. App. Mech.*, **22** (1955), p. 77.
- [33] Faupel, J. H., Marin, J., Tension-Compression Biaxial Plastic Stress-Strain Relations for Aluminium Alloys 24S-T and 2S-O, *Trans. ASM*, **43** (1951), p. 993.

PLASTIC STRESS-STRAIN RELATIONS OF AN α -BRASS

YANG, NAN-SHENG

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Experimental results on thin tubes made of a 70/30 α -brass subject to the combined action of torsion and internal pressure have been presented. The loading paths include those of simple loadings, of complex loadings in which no stress component decreases, and of "neutral loadings". The stress-strain relationship has been investigated with reference to the relative orientations of the principal axes of stress and strain, to the connection between the Lode's parameters of stress and strain-ratios, and also to the establishment of strain-hardening characteristics. The analysis of experimental results show that under all manners of loading, the stress-strain relations appear to agree approximately with the theory of flow. For the complex loadings in which no stress component decreases, the theory of deformation can be considered as also applicable. But under the so-called "neutral loadings", in which some stress components decrease while the yield criterion is to be maintained at constant values, the experimental results seem to deviate perceptibly with all the fundamental assumptions involved in the theory of deformation. For this type of loading, strain predictions according to the slip theory also appear to differ remarkably from experimental observations.

Test results also show with fair evidence that the sensitivity to the complexity of loading path of the stress-strain relations in the plastically deformed material seem to be affected by the intensity of plastic deformation attained, i.e., for a given type of complex loading, the further the deformation is brought into the plastic range, the more will the actual stress-strain relations deviate from the fundamental assumptions in the theory of deformation.