第 2 卷 第 2 期
1958 年 4 月

力 學 學 報
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 2, No. 2
Apr., 1958

輸水管的振動問題*

鄭 哲 敏

（中國科學院力學研究所）

管道的振動是工程上實際發生的一類問題．管道愈長，半徑愈大或管壁愈薄，發生振動的可能性也愈大．

管道的振動可以分爲兩個類型．第一個類型相當於樑的彎曲振動，它的特點是，振動時管子的橫截面基本上保持原有的形狀．由橫向風力所引起的振動往往屬於這一類．第二個類型管道振動的特點在於管壁的變形，譬如像圖 1，a 所表示的那樣．水泵裏的壓力擾動經過流體的傳送作用到管壁上，是引起這種振動的一個原因[1]．

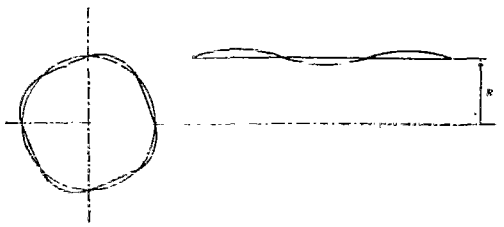

圖 1a 管壁的變形

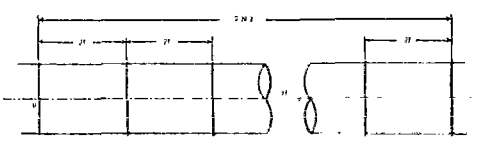

圖 1b

本文只討論屬於第二個類型的管道振動問題，關於第一個類型的振動問題，可參看文獻 [2—4]．

我們將實際管道理想爲一個無限長的薄壁圓筒，它在等間隔上是用圓環支撐着的（圖 1，b）．我們假設支撐圓環的剛度很大、寬度很小，因此在支撐的位置上，管壁的徑向撓度等於零，徑向撓度沿水管軸向的微分一般不等於零．爲了照顧到流體靜壓力的作用，令 σ_0 爲在沒有振動時管壁裏存在着的圓周方向的法應力．σ_0 是一個常數．

管道中液體的平均流速爲 U，這也是一個常數．伴隨管道振動而出現的速度變化可以看作附加於 U 的小量．同時，我們略去流體的可壓縮性和黏性．這樣，便可以根據綫性化後的位勢理論來計算流速和水壓力的波動．

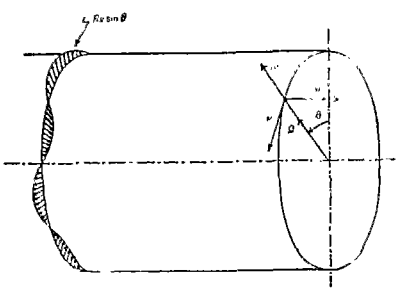

圖 2

爲了討論管子與流體相互作用下的自由振動，我們把管壁各點的位移分量寫作 $u(x,\theta)e^{i\omega t}$、$v(x,\theta)e^{i\omega t}$、$w(x,\theta)e^{i\omega t}$（圖 2）．ω 是待定的圓周頻率，t 代表時間．流體中隨振動而發生的擾動位勢函數和擾動壓力將寫作 $\varphi e^{i\omega t}$ 和 $pe^{i\omega t}$．這樣，便可以在下面的公式裏略去有關時間的因子 $e^{i\omega t}$．

一個單節管子具有雙重無窮多個自由振動形式

* 本文的一部分內容曾在第九屆國際力學會(1956)上報告，原題爲“流體彈性力學”．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和頻率，無窮多節管子連接而成的管道便具有三重無窮多個數目的自由振動形式和頻率．爲便於討論，我們把每經N節便重複的振動形式歸入一類，N可以是任意正整數．於是，相應於一定的N，由於w對於x和θ的週期性，w可以普遍地用富氏級數來表示：

$$w=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_m\sin m\theta+\beta_m\cos m\theta)A_{mn}e^{i\frac{n\pi x}{Nl}},\quad -\infty<x<\infty. \tag{1}$$

$2l$是每節管子的長度．在以下的討論中，我們取

$$w=\sin m\theta\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{mn}e^{i\frac{n\pi x}{Nl}},\quad -\infty<x<\infty. \tag{2}$$

顯然，求出相應於(2)式的解，(1)式所代表的更普遍的解可以很容易地得出．當x爲$2l$的整倍數時，也就是在支撐的位置上，w恆等於零．因此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{mn}e^{i\frac{2n\pi s}{N}}=0, \tag{3}$$

$$s=0,1,2,\cdots,N-1.$$

爲了照顧到以後計算上的方便(參看[8])，我們將n寫作

$$\begin{aligned}&n=qN+k,\\&q=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\&k=0,1,\cdots,N-1.\end{aligned} \tag{4}$$

這樣，(2)和(3)式可以改寫爲

$$w=\sin m\theta\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{k\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_{m\,qN+k}e^{i\frac{q\pi x}{l}}, \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2k_0\pi s}{N}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_{m\,qN+k}=0, \tag{6}$$

$$s=0,1,\cdots,N-1.$$

由於行列式

$$\mathrm{Det}\,a_{sk}\neq0,\quad a_{sk}=e^{i\frac{2sk\pi}{N}},$$

(6)式相當於

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_{m\,qN+k}=0. \tag{7}$$

以下的主要工作是決定ω和$A_{m\,qN+k}$．

流體作用於管壁的擾動壓力

擾動位勢函數$\varphi e^{i\omega t}$必須滿足下面的拉普拉斯方程，

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0. \tag{8}$$

在流體與管壁的接觸面上，φ必須滿足垂直於這個面的速度連續性條件．經綫性化後，這個條件是

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = i\omega w + U\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{9}$$

φ 所須滿足的另一個條件是對於 x 和 θ 的週期性.

(8),(9)和(2)式給出

$$\varphi = i\sin m\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega + \frac{n\pi}{Nl}U\right)\frac{I_m\left(\frac{n\pi r}{Nl}\right)}{\frac{n\pi}{Nl}I'_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)} A_{mn}\, e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}. \tag{10}$$

這裏, $I_m(x)$ 是第一類、m 級的變相貝塞爾函數, $I'_m(x)$ 是 $I_m(x)$ 對 x 的一次導數.

綫性化後的拉格郎日公式是

$$\frac{p}{\gamma} = -i\omega\varphi - U\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

其中 γ 是流體的密度. 將(10)式所給出的 φ 代入上式, 便得出液體作用於管壁的擾動壓力如下,

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma}\bigg|_{r=R} = \sin m\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega + \frac{n\pi}{Nl}U\right)^2 \frac{I_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)}{\frac{n\pi}{Nl}I'_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)} A_{mn}\, e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}. \tag{11}$$

水管的運動方程和它們的解

根據薄壳理論,以 u、v、w 爲未知函數,薄壁圓筒的運動方程式可以寫作

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{Eh}F_x, \tag{12.a}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} = \frac{1-\nu^2}{Eh}F_\theta, \tag{12.b}$$

$$\frac{\sigma_0 h}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\theta^2} + \frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \right.$$
$$\left. + \nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R}\right) = \frac{1-\nu^2}{Eh}(F_r + p_0 + h\rho\omega^2 w). \tag{12.c}$$

h 是管壁厚度, ρ 是管壁密度, ν 是泊桑係數, E 是楊氏模數, F_x、F_θ、F_r 是加於管壁的外力,以下將認爲是支撑環加於管壁的約束力. 推導(12)式時採用的假定包括:

$$\frac{h}{R} \ll 1,\ \frac{w}{h} \ll 1,\ \frac{E}{\rho h R\omega^2} \gg 1,$$

$$u, v \sim O\left(\sqrt{\frac{h}{R}}\,w\right),\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{Rh}}\right).$$

就其主要物理意義看,以上假定相當於 w 很小而頻率不是很高的情況. 在(12.a)和(12.b)中我們略去了 x 和 θ 方向的慣量. 這是由於已經假定了 u 和 v 爲次於 w 的小量的緣故. 我們又略去了所有的轉動慣量. 應用以上假定可以直接從鐵木辛克所給的一般平衡方程式得出(12)式[5]. 讀者還可以參看文獻[6]和[7].

當 F_θ、F_x 等於零時,(12)式合併爲

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^4\nabla^4 w+\frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\nabla^4\left(\frac{\sigma_0 h}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+p_0+\rho h\omega^2 w+F_r\right). \tag{13}$$

其中

$$\nabla^4=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2.$$

關於支撐情況，我們作如下的規定：

i) 在支撐的位置上 $w=0$。

ii) $F_x=F_\theta=0$。F_r 是作用在 $x=2sl$ 上的綫集中載荷。按照這個規定，支撐環不加 x 方向的彎矩於管壁，它也不約束管壁在 x 和 θ 方向的滑動。

我們稱這種支撐爲“有滑動的環簡支”。如果在支撐的位置上要求 u、v、w 都等於零，那末 F_x、F_θ 也必須作爲綫載荷來處理。這種支撐情況可以稱爲“無滑動的環簡支”。以下的討論適用於前一種情況。

F_r 和 w 對 x 和 θ 必然有相同的週期性。如果以 $0\leqslant x<2Nl$ 這一段爲代表，相應於(2)式的綫集中載荷可以表示爲

$$F_r=\sin m\theta\sum_{k=0}^{N-1}R_{mk}\delta(x-2kl),$$
$$0\leqslant x<2Nl.$$

其中，$\delta(x)$ 是狄拉克函数，R_{mk} 是待定常數。用富氏級數表示上式即得

$$F_r=\frac{\sin m\theta}{2Nl}\sum_{k=0}^{N-1}R_{mk}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{2k\pi n}{N}+i\frac{n\pi x}{Nl}}. \tag{14}$$

在上式和公式(2)和(11)中，已經把 F_r、w 和 p_0 寫成適當的富氏級數形式。把它們代入(13)式並比較係數，便得出下列關係式：

$$A_{mn}=F_{m,\frac{n}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_{mk}}{2Nl}e^{-i\frac{2kn\pi}{N}}, \tag{15}$$

$$=\tau_{m,\frac{n}{N}}F_{m,\frac{n}{N}}.$$

其中

$$\frac{1}{F_{m,\frac{n}{N}}}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{R^2}\right]^2+\frac{\frac{Eh}{R^2}\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{R^2}\right]^2}+\frac{m^2\sigma_0 h}{R^2}-$$

$$-\rho h\left(\omega^2+\beta_{m,\frac{n}{N}}\right), \tag{16}$$

$$\tau_{m,\frac{n}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_{mk}}{2Nl}e^{-i\frac{2kn\pi}{N}}, \tag{17}$$

$$\beta_{m,\frac{n}{N}}=\frac{\gamma R}{\rho h}\left(\omega+\frac{n\pi}{Nl}U\right)^2\frac{I_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)}{\frac{n\pi R}{Nl}I'_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)}. \tag{18}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

於是，因爲 $\tau_{m,\ q+k/N} = \tau_{m,\ k/N}$，

$$A_{m,\ qN+k} = \tau_{m,\ k/N} F_{m,\ q+k/N}. \tag{19}$$

代入(7)式即得

$$\tau_{m,\ k/N} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{m,\ q+k/N} = 0,$$
$$k = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{20}$$

$\tau_{m,\ k/N}$ 可以認爲是N個基本待定常數，知道了 $\tau_{m,\ k/N}$ 便可以從(15)式求出 A_{mn}. 在一般情況下 $\tau_{m,\ k/N}$ 恆等於零的解是沒有意義的，因爲這表示水管的振幅恆等於零. 因此，要同時滿足(20)式所表示的N個條件，可以取

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{m,\ q+k_0/N} = 0, \tag{21,a}$$

$$\tau_{m,\ k/N} = 0, \quad \text{如果 } k \neq k_0, \tag{21,b}$$

$$\tau_{m,\ k_0/N} = \text{任意常數} \neq 0. \tag{21,c}$$

(21.a) 式只包含 ω 這一個待定常數，它就是決定自由振動頻率的頻率方程式. 相應於一定值的m和 k_0/N，可以從(21.a)式求出一系列的頻率值. 根據我們對振動形式分類的原則，k_0/N 可以是位於 0 和 1 之間的任意有理數. 事實上可以證明，只要使 k_0/N 位於 0 和 1/2 之間，便足以確定全部自由振動頻率和形式.

如果 ω_0 是(21.a)式的一個根，與其相應的自由振動形式從(5)式求出爲

$$w = \tau_{m,\ k_0/N} \sin m\theta\, e^{i\frac{k_0\pi x}{Nl}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{m,\ q+k_0/N}\, e^{i\frac{q\pi x}{l}}. \tag{22}$$

從(17)式得出

$$R_{m,k} = 2Nl\, \tau_{m,\ k_0/N}\, e^{i\frac{2kk_0\pi}{N}}. \tag{23}$$

以上結果是在 $\tau_{m,\ k/N}$ 不全等於零的情況下得到的. 倘若 $\tau_{m,\ k/N}$ 對於每個 k 都等於零，可以用極限法得出與(22)和(23)式相應的結果. 從(22)式看出，假如 $\tau_{m,\ k_0/N} \to 0$ 而 w 並不趨於零的話，則對某些 q 的值而言，$\tau_{m,\ k_0/N} F_{m,\ q+k_0/N}$ 必須趨近於一些不等於零的有限值. 因此，對這些 q 而言，$F_{m,\ q+k_0/N} \to \infty$. 從 $F_{m,\ q+k_0/N}$ 的定義，公式(16)，我們知道，同時只能有兩個這樣的 q 值. 令其爲 q_1 和 q_2. 於是我們有

$$\frac{1}{F_{m,\ q_1+k_0/N}} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\pi^2}{l^2}(q_1+k_0/N)^2+\frac{m^2}{R^2}\right]^2 + \frac{\dfrac{Eh}{R^2}\dfrac{\pi^4}{l^4}(q_1+k_0/N)^4}{\left[\dfrac{\pi^2}{l^2}(q_1+k_0/N)^2+\dfrac{m^2}{R^2}\right]^2} +$$
$$+ \frac{m^2\sigma_0 h}{R^2} - \rho h(\omega^2 + \beta_{m,\ q_1+k_0/N}) = 0,$$
$$\frac{1}{F_{m,\ q_2+k_0/N}} = 0. \tag{24}$$

用這兩個式子可以同時計算 ω 和 U，這說明，當U等於某些特殊的數值時，對於某些振動形式，支撐與管子之間沒有作用力.

要滿足(20)式必須有

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\tau_{m,\ k_0/N} F_{m,\ q_1+k_0/N} \to -\tau_{m,\ k_0/N} F_{m,\ q_2+k_0/N} \to A(\text{常數}).$$

於是(22)式所表示的一般振動形式簡化爲

$$w = A \sin m\theta\, e^{i\frac{k_0\pi x}{Nl}}\left(e^{i\frac{q_1\pi x}{l}} - e^{i\frac{q_2\pi x}{l}}\right). \tag{25}$$

附帶指出，(24)式中的 q_1 和 q_2 固然可以是任意整數，只有當所求出的 U 爲實數時，結果才具有物理意義．如果 U 雖爲實數而 ω 爲虛數或複數，則振動已進入不穩定階段．下面還要回轉來討論不穩定現象．

垂直於管壁的撓度 $e^{i\omega t}w(x,\theta)$ 可以分解爲實數和虛數兩部分．它們分別代表自由振動的獨立解．引進函數 $f(x)$ 和 $g(x)$，(22)式可以簡寫爲

$$w = (f + ig)\sin m\theta.$$

於是

$$e^{i\omega t}w = \{(f\cos\omega t - g\sin\omega t) + i(f\sin\omega t + g\cos\omega t)\}\sin m\theta.$$

虛數部分與實數部分之不同處僅在於時間坐標上原點位置的差別．以下只以實數部分爲例．引進角度參數

$$\alpha(x) = \tan^{-1}\frac{g(x)}{f(x)},$$

則

$$Rl\, e^{i\omega t}w = \sqrt{f^2+g^2}\sin m\theta\cos(\omega t + \alpha(x)).$$

如 $U \neq 0$，一般地說 $\alpha \neq$ 常數．因此在這種情況下，管壁上沿 x 方向上的各點有着不同的振相．如 $U = 0$，$F_{m,\ q+k/N}$ 變爲 ω^2 的函數，因而 $e^{i\omega t}w$ 和 $e^{-i\omega t}w$ 都是自由振動的解．這時，管壁上沿 x 方向各點具有共同的振相．

至此，已經在形式上解決了管道自由振動的數學分析問題．以下討論幾個特殊情況，藉以說明以上結果的物理意義和應用．

空管的自由振動

將 γ 取爲零，便得到空管自由振動的一系列結果．首先，要滿足(24)式，q_1 和 q_2 必須有下列關係，

$$q_1 = -q_2 - \frac{2k}{N} \tag{26}$$

由於 q_1、q_2 爲整數，以及 $0 \leqslant k/N \leqslant 1/2$，我們有

$$\frac{k}{N} = 0 \text{ 或 } \frac{k}{N} = \frac{1}{2}. \tag{27}$$

根據這兩個結果，(24)和(25)式給出，

$$w = A\sin m\theta \sin\frac{q\pi x}{l},\ \Omega^2 = \Omega^2_{m,\ q\lambda},\ (k/N = 0); \tag{28}$$

$$w = A\sin m\theta \sin\frac{(2q+1)\pi x}{2l},\ \Omega^2 = \Omega^2_{m,\ (q+\frac{1}{2})\lambda},\ \left(k/N = \frac{1}{2}\right). \tag{29}$$

其中

$$\Omega^2 = \frac{12(1-\nu^2)\rho\omega^2R^4}{Eh^2},$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\Omega^2_{m,\,(q+\frac{k}{N})\lambda}=\left[\lambda^2\left(q+\frac{k}{N}\right)^2+m^2\right]^2+12(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{\lambda^4\left(q+\frac{k}{N}\right)^4}{\left[\lambda^2\left(q+\frac{k}{N}\right)^2+m^2\right]^2}+$$

$$+12(1-\nu^2)\frac{\sigma_0R^2m^2}{Eh}, \tag{30}$$

$$\lambda=\frac{\pi R}{l}.$$

以上是 $R_k\equiv 0$ 時的特殊解．空管振動的一般解是

$$w=A\sin m\theta\, e^{i\frac{k\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\frac{q\pi x}{l}}}{\Omega^2_{m,\,(q+\frac{k}{N})\lambda}-\Omega^2}, \tag{31.a}$$

Ω^2 是下列頻率方程的根，

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Omega^2_{m,\,(q+\frac{k}{N})\lambda}-\Omega^2}=0. \tag{31.b}$$

現在討論方程式(31.b)的根的分佈．我們稱這個分佈爲空筒自由振動的頻率譜．

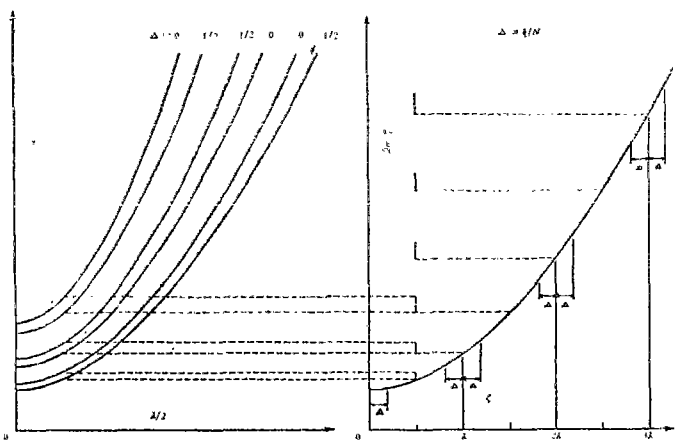

圖 3

$\Omega_{m,\zeta}$ 作爲 ζ 的函數有如圖 3 所示．這個曲綫對 $\Omega_{m,\zeta}$ 軸和 ζ 軸都是對稱的，我們只需考慮它在第一象限裏的情況．相應於任一 λ 和 $\frac{k}{N}$，Ω_m，$\frac{k}{N}\lambda$、$\Omega_{m,\,(1-\frac{k}{N})\lambda}$、$\Omega_{m,\,(1+\frac{k}{N})\lambda}$，…的值可在圖 3 上直接讀出．(31.b)式的根必然位於上這些 $\Omega_{m,\zeta}$ 之間．因此相應於一定的 λ 和 $\frac{k}{N}$，有無窮多個自振頻率．利用 $\Omega_{m,\zeta}$ 隨 ζ 增加的特性可以證明，當 k/N 在 0 和 1/2 之間變化時，Ω 必然以圖 3 左端所表示的那樣分佈在 Ω 軸上．這些間隔的上界和下界相應於 $k/N=0$ 或 1/2．它們的下界由簡單的計算公式(28)和(29)給出．上界由(31.b)式給出，條件是

$$\Omega^2\neq\Omega^2_{m,\,(q+\frac{k}{N})\lambda},\quad k/N=0\text{ 或 }1/2. \tag{32}$$

特別值得指出的是，(31.a)式所表示的解在(32)式所規定的條件下具有不等於零的實

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

數和虛數部分．由這兩部分組成的解可以同時滿足在支撐的位置上，$\frac{\partial w}{\partial x}=0$ 的條件．因此這樣的解適用於以有限寬度圓環支撐着的管道的自由振動．當然，這裏所得到的解僅僅是這種支撐情況下的一類特解．然而可以證明，按照(32)式的規定所得出的最低頻率(相當於 $k/N=0$)也是這種支撐條件下的最低頻率。

小流速的情況

當流速不大時，可以將包含 U 的各項略去．於是所得到的計算公式便與(28)、(29)、(31.a)、(31.b)完全相似，只不過是用

$$\Omega^2\left\{1+\frac{\gamma R}{\rho h}\frac{I_m\left[\left(q+\frac{k}{N}\right)\lambda\right]}{\lambda\left(q+\frac{k}{N}\right)I'_m\left[\left(q+\frac{k}{N}\right)\lambda\right]}\right\} \tag{33}$$

代替以上各式中的 Ω^2 而已．括號{ }中的量恆大於 1，可見當管內充滿流體時，所有的頻率都較沒有流體時爲低．流體的密度愈大，降低得愈多．λ 愈大則降低得愈少．頻率譜與無流體時相似。

我們用以下算例說明以上結果的一個應用[1]：一鋼製輸水管具有下列尺寸，

$$h=1.11\text{ 公分},\quad R=183\text{ 公分}.$$

輸水量爲每秒 39.5 立方米，靜水壓爲 1.83 公斤/公分^2．水管的一端與一離心式水泵相連接．根據水泵轉速和葉片數目算出的水壓力波動的基本頻率爲每秒 23.5 週．要求解決的問題是，如何正確地選擇支撐間的距離($2l$)，以避免水管與水泵間發生共振．

我們假設，支撐可以認爲是環簡支(有滑動)，並取

$$\gamma=1\text{ 克/公分}^3,\quad \rho=7.82\text{ 克/公分}^3,$$
$$E=2.1\times10^6\text{ 公斤/公分}^2,\quad \nu=0.3.$$

計算的平均流速等於每秒 0.375 公尺．這樣的流速對頻率和振動形式只有不大的影響，因此以下近似地將 U 取作零．

計算水管最低自由振動頻率的公式是

$$\Omega^2=\frac{\Omega^2_{m,\frac{\lambda}{2}}}{1+\frac{\gamma R}{\rho h}\frac{I_m(\lambda/2)}{\frac{\lambda}{2}I'_m(\lambda/2)}} \tag{34}$$

將水管數據代入上式，所得頻率如圖 4 所示．每一曲綫相應於一個 m．縱坐標爲 $\sqrt{\frac{\rho}{E}}R\omega$，橫坐標爲 $\frac{\lambda}{2}$．AB 是這簇曲綫的包綫，橫綫表示水泵中水壓力波動的基本頻率．

如前所述，這些曲綫表示管道自由振動頻率分佈的下界．在它們所表示的頻率之上有一系列像圖 3 左端所表示的那種振譜．因此，爲避免共振，從圖 4 可見，最好使 $\frac{\lambda}{2}>1.51$，也即 $2l<3.81$ 公尺．換言之，最好選擇這樣的 λ，使 C 點位於包綫 AB 之下．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

www.cnki.net

199 008 C in A ad ic Jo rna E e o ic u l s i g use All rights s ve . ttp: /ww .cnk . et

$$R_{ms} = 2Nl\,\tau_{m,k/N}\,e^{i\frac{2sk\pi}{N}}. \tag{3,b}$$

If the average flow velocity U is sufficiently small, all roots of Eqs. (1) are real. Hence, when only one particular mode of free vibration is excited, each point on the cylinder executes a simple harmonic motion. However, since w, as given by (2), is in general a complex function of x, different points along a generator of the cylinder do not move in phase.

It is easily shown that if ω is a root of Eqs. (1) for $k/N = k_0/N$, then $-\omega$ is a root for $k/N = 1-k_0/N$. It follows, that in order to determine ω for all possible values of k and N, it is sufficient to put k/N equal to any fractional number between 0 and $\frac{1}{2}$.

For fixed m and k/N, the roots of Eqs. (1) are distinct. These roots are continuous functions of k/N. Since k/M may be any fractional number between 0 and $\frac{1}{2}$, when one plots the totality of frequencies along a straight line, the points fall in definite intervals. This fact is illustrated in Fig. 3 for the case when no fluid is present.

The frequencies of free vibration are dependent upon the flow velocity in a manner illustrated in Fig. 5. When U is sufficiently large, a number of roots of Eqs. (1) become either imaginery or complex. In both cases the motion is unstable, i.e. the pipe flutters when ω is complex and diverges when it is imagenery. It is shown that for a fixed m, instability first appears when U increases just beyond $U_{m,cr}$, where

$$U^2_{m,cr} = \frac{1}{3\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{\frac{\pi R}{2l} I'_m\left(\frac{\pi R}{2l}\right)}{I_m\left(\frac{\pi R}{2l}\right)} \frac{Eh^3 l}{\gamma R^3}\, \Omega^2_{m,\frac{\pi R}{2l}}, \tag{4}$$

in which

$$\Omega^2_{m,\zeta} = [\zeta^2 + m^2]^2 + 12(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{\zeta^4}{[\zeta^2+m^2]^2} + 12(1-\nu^2)\frac{\sigma_0 R^2}{Eh^2}\,m^2.$$

The unstable phenomenon is of the divergent type.

The theoretical results are applied to an engineering situation requiring a determination of ring spacing when a pulsating source, such as a pump, is connected to a pipe line.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net