力 学 学 报
第1卷 第2期 1957年5月

关于彈性体固有頻率的两个变分原理*

胡海昌
(中國科学院力学研究所)

1. 引 言

对于几何形狀較复雜的彈性体，要嚴格地根据彈性体力学的全部方程來決定它的固有頻率是有很大的困难的，因此在实际上常常采用了各式各样的近似解法，其中最有名的近似解法要算根据萊瑞原理的变分解法（称为萊瑞黎兹法）[1,2,3]．在許多問題中，萊瑞黎兹法給出了滿意的結果．但是这个方法在实用上及理論上遺留下两个問題：第一、在許多問題中，我們往往能对应力分布的情况作适当的估計，可是这些估計在萊瑞黎兹法中不能加以充分利用；第二、在各种近似理論中，例如在梁、板、壳的近似理論中，虽然都各有自己的萊瑞原理，可是这些原理并不是彈性体力学中的萊瑞原理的直接的特殊形式．

本文提出了两个关于固有頻率的变分原理．第一个变分原理恰好与萊瑞原理相反，它要求預先滿足运动方程和应力边界条件，而連續条件和位移边界条件則可不加考慮，第二个变分原理不要求預先滿足任何边界条件．根据这两个变分原理，使得我們不但有可能利用关于位移分佈的估計，并且还可能充分利用关于应力分佈的估計；此外，根据第二个变分原理，我們有可能把彈性体力学与梁、板、壳的近似理論按一定的方式联系起來．在本文中我們指出，梁的鉄摩辛柯理論[4]和板的烏弗良特、明德林理論[5,6]都可以根据第二个变分原理直接推導出來．关于壳的一些問題將在另一文中討論．

所以本文提出的两个变分原理，不但可用于决定固有頻率的近似值，并且还可以用于建立近似理論．

2. 滿足运动方程和应力边界條件的变分原理

考慮一个綫性彈性体在沒有外力作用的情况下作固有振动，設应力分量的振幅为 $\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}$，位移分量的振幅为 u, v, w，圓周頻率为 ω．在这种情况下，运动方程可以寫成

* 1956年11月19日收到．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho\omega^2 u=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho\omega^2 v=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho\omega^2 w=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 ρ 是密度．应力与应变的关系可以通过以应力分量表示的單位体積的应变能 $V(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy})$ 表示如下：

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \sigma_x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial \sigma_y},\ \cdots\cdots,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \tau_{xy}}.
\tag{2}
$$

V 是应力分量的二次齐次式．对于各向同性的物体，V 的算式是

$$
V=\frac{1}{2E}\left\{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y)+2(1+\nu)(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)\right\},
\tag{3}
$$

設在物体的一部分表面 S_σ 上外力等于零，而在其余的表面 S_u 上位移等于零，于是有边界条件：

在 S_σ 上：

$$
\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n=0,\qquad \tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n=0,\qquad \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n=0;
\tag{4}
$$

在 S_u 上：

$$
u=v=w=0.
\tag{5}
$$

这里 l,m,n 是表面法綫的方向余弦．

所以我們的問題是从方程(1)，(2)，(4)，(5)去决定固有頻率 ω．下面我們要把这个問題化为一个变分問題．下面所說的允許狀态是指这样一种狀态：u,v,w 是連續的，$\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy}$ 有下列形式：

$$
\sigma_x=\omega^2\bar\sigma_x,\qquad \sigma_y=\omega^2\bar\sigma_y,\qquad \cdots,\qquad \tau_{xy}=\omega^2\bar\tau_{xy},
\tag{6}
$$

并且滿足运动方程(1)和应力边界条件(4)．換句話說，即 $u,v,w,\bar\sigma_x,\bar\sigma_y,\cdots,\bar\tau_{xy}$ 滿足下列方程和边界条件：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \bar\tau_{xz}}{\partial z}+\rho u=0,\\
&\frac{\partial \bar\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \bar\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar\tau_{yz}}{\partial z}+\rho v=0,\\
&\frac{\partial \bar\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \bar\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \bar\sigma_z}{\partial z}+\rho w=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

在 S_σ 上，

$$
\bar\sigma_x l+\bar\tau_{xy}m+\bar\tau_{xz}n=0,\quad \bar\tau_{xy}l+\bar\sigma_y m+\bar\tau_{yz}n=0,\quad \bar\tau_{xz}l+\bar\tau_{yz}m+\bar\sigma_z n=0.
\tag{8}
$$

命 $\bar V$ 代表下式：

$$\overline{V}=V(\bar{\sigma}_x,\bar{\sigma}_y,\cdots,\bar{\tau}_{xy})=\frac{1}{\omega^4}V(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy}). \tag{9}$$

此式第二个等号的成立是因为 V 是应力分量的二次齐次式．对于以上规定的允許狀态，我們有如下的变分原理：物体的固有頻率 ω 相应于下式在各种允許狀态中所取的極值：

$$\omega^2=\operatorname{ext}\frac{\frac{1}{2}\iiint\rho(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\overline{V}\,dx\,dy\,dz}=\operatorname{ext}\frac{\frac{1}{2}\omega^4\iiint\rho(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz}{\iiint V(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy})\,dxdydz}, \tag{10}$$

而基本固有頻率相应于(10)式的最小的極值．

証明　(10)式取極值的条件是

$$\iiint\rho(u\delta u+v\delta v+w\delta w)\,dx\,dy\,dz-$$
$$-\omega^2\iiint\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{\sigma}_x}\delta\bar{\sigma}_x+\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{\sigma}_y}\delta\bar{\sigma}_y+\cdots+\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{\tau}_{xy}}\delta\bar{\tau}_{xy}\right)dx\,dy\,dz=0. \tag{11}$$

由于 $\overline{V}$ 是 $\bar{\sigma}_x,\bar{\sigma}_y,\cdots,\bar{\tau}_{xy}$ 的二次齐次式，所以从(6)式可知，

$$\omega^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{\sigma}_x}=\frac{\partial V}{\partial\sigma_x},\qquad\omega^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{\sigma}_y}=\frac{\partial V}{\partial\sigma_y},\qquad\cdots,\qquad\omega^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{\tau}_{xy}}=\frac{\partial V}{\partial\tau_{xy}}. \tag{12}$$

如果我們定义应力分量的变分为

$$\delta\sigma_x=\omega^2\delta\bar{\sigma}_x,\qquad\delta\sigma_y=\omega^2\delta\bar{\sigma}_y,\qquad\cdots,\qquad\delta\tau_{xy}=\omega^2\delta\bar{\tau}_{xy}, \tag{13}$$

那末在利用(7)，(8)两式后，我們得到

$$\iiint\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x+\frac{\partial V}{\partial\sigma_y}\delta\sigma_y+\cdots+\frac{\partial V}{\partial\tau_{xy}}\delta\tau_{xy}\right)dx\,dy\,dz=$$
$$=-\iiint\left\{u\left(\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\delta\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+w\left(\frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\delta\sigma_z}{\partial z}\right)\right\}dxdydz=$$
$$=-\iint_{S_u}\left\{u(l\delta\sigma_x+m\delta\tau_{xy}+n\delta\tau_{xz})+v(l\delta\tau_{xy}+m\delta\sigma_y+n\delta\tau_{yz})+\right.$$
$$\left.+w(l\delta\tau_{xz}+m\delta\tau_{yz}+n\delta\sigma_z)\right\}dS+$$
$$+\iiint\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta\sigma_y+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_{xy}\right\}dxdydz,$$

卽

$$\iiint\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma_x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x+\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma_y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\sigma_y+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial\tau_{xy}}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_{xy}\right\}dxdydz+$$
$$+\iint_{S_u}\left\{u(l\delta\sigma_x+m\delta\tau_{xy}+n\delta\tau_{xz})+v(l\delta\tau_{xy}+m\delta\sigma_y+n\delta\tau_{yz})+\right.$$
$$\left.+w(l\delta\tau_{xz}+m\delta\tau_{yz}+n\delta\sigma_z)\right\}dS=0. \tag{14}$$

要此式成立，必须有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \sigma_x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial \sigma_y},\cdots,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \tau_{xy}},\tag{15}$$

以及

在 S_u 上，　　$u=v=w=0$.　　(16)

这两个方程便是方程(2)和(5)。由于方程(1)和(4)已經滿足，所以使(10)式取極值的問題与原有的問題完全相当，这就是說，每个固有頻率都相应于(10)式的一个極值，而(10)式的每一个極值都相应于一个固有頻率。由此可知，(10)式的最小的一个極值相应于基本固有頻率。

上面說明的定理提供了一个决定基本固有頻率的近似方法。这个方法与萊瑞黎兹法相似，所不同的是这里主要不是根据位移边界条件來簡化位移，而主要是根据应力边界条件來对应力分佈作适当的簡化，但仍使它包含若干不定因素。选取这些不定因素而求(10)式的最小的極值，我們便得到基本固有頻率的近似值。

和平衡問題的近似解法[1)]相似，在选取允許狀态时，其中可以包含不定常数，也可以包含不定函数。在有些問題中选取包含不定函数的允許狀态，能够得到很好的結果。

値得指出，使(10)式取極値的条件是(11)式。在近似解法中有时直接应用(11)式，比应用(10)式來得方便。对于不受附加条件限制的允許狀态，(11)式就是应力应变关系和位移边界条件，在近似解法中，(11)式給出近似的应力应变关系和位移边界条件。

3. 直梁的固有振动

設 w 是梁的撓度的振幅，M 是弯矩的振幅，EI 是梁的抗弯剛度，ρ 是單位長度的質量，在梁以圓周頻率 ω 作固有振动时，我們有方程

$$\frac{d^2M}{dx^2}+\rho\omega^2 w=0,\qquad M=-EI\frac{d^2w}{dx^2}.\tag{17}$$

梁的边界条件通常有四种情况，卽撓度、傾度、弯矩、横力等于零，其中后两者是屬于应力边界条件。仿照上節的方法可以証明在本問題中我們有如下的变分原理：設 M 是滿足应力边界条件的弯矩，命

$$\omega^2=\frac{\displaystyle\int\frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)^2dx}{\displaystyle\int\frac{M^2}{EI}dx}.\tag{18}$$

此式的極值相应于梁的固有頻率，而最小的極值相应于基本固有頻率。

我們來計算几个例子，以便估計根据(18)式得到的近似解法的准确度。

1) 胡海昌文献[7]，第七章。

例 1　两端懸空的均匀直梁　設梁的長度为 l. 取梁的一端为坐标軸的原点，我們有应力边界条件

$$\text{在 } x=0 \text{ 和 } x=l \text{ 处,} \qquad M=0, \quad \frac{dM}{dx}=0. \tag{19}$$

根据这个边界条件，我們取

$$M=Ax^2(l-x)^2, \tag{20}$$

其中 A 是不定常数. 將此代入公式(18)，得到基本固有頻率的近似值

$$\omega=22.4\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}. \tag{21}$$

这个数值准确到三位有效数字.

例 2　一端懸空一端简支的均匀梁　設梁的長度为 l. 取懸空端为坐标軸的原点，我們有应力边界条件

$$\text{在 } x=0 \text{ 处,} \quad M=\frac{dM}{dx}=0; \qquad \text{在 } x=l \text{ 处,} \quad M=0. \tag{22}$$

根据这个边界条件，我們取

$$M=x^2(l-x)(al+bx), \tag{23}$$

其中 a,b 是不定常数. 將此代入公式(18)，得到

$$\omega^2=\frac{1008(5a^2+10ab+6b^2)}{12a^2+15ab+5b^2}. \tag{24}$$

求此式的最小值，得到

$$\omega=15.5\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}. \tag{25}$$

基本固有頻率的准确值是

$$\omega=15.4\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}. \tag{26}$$

所以本文給出的近似值的差誤僅 0.6%.

4. 狹矩形截面梁的弯曲振动

(一种近似解法)

設有一狹矩形截面梁如圖 1 所示. 設梁的長度、高度与厚度为 l,h,b. 我們假定 $l\gg h\gg b$, 取一直角坐标系如圖 1 所示，設梁的側面不受外力作用，而在两底面 $x=0$ 和 $x=l$ 上，可以是夾住，或是简支、或是懸空. 当梁在 xy 平面內

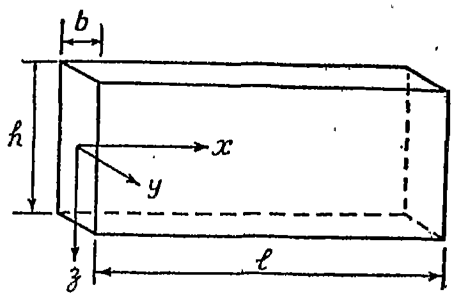

圖 1.

作弯曲振动时，我們可以合理地假定应力分量有如下的形式：

$$\sigma_x=\frac{M(x)}{J_{11}}z,\quad \tau_{xz}=\frac{Q(x)}{F}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right)\right],$$
$$\sigma_z=\frac{Z(x)}{J_{33}}z\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right),\quad \sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0. \tag{27}$$

式中 M、Q 是任一截面 $x=\text{const}$ 上的弯矩与横力，Z 是新引進的一个力素，記号 F，J_{11}，J_{33} 以及下面將要用到的記号 J_{22}，J_{13} 代表下列積分：

$$F=bh,\ J_{11}=b\int_{-h/2}^{+h/2}z^2dz=\frac{bh^3}{12},$$
$$J_{22}=b\int_{-h/2}^{+h/2}\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right)^2dz=\frac{4}{5}bh=\frac{4}{5}F,$$
$$J_{33}=b\int_{-h/2}^{+h/2}z^2\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2dz=\frac{2}{105}bh^3=\frac{8}{35}J_{11},$$
$$J_{13}=b\int_{-h/2}^{+h/2}z^2\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)dz=\frac{1}{30}bh^3=\frac{2}{5}J_{11}. \tag{28}$$

根据运动方程(1)可知，位移分量有如下的形式：

$$u=-\psi(x)z,\quad v=0,\quad w=w_0(x)+w_2(x)\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right), \tag{29}$$

这里 ψ、w_0、w_2 应滿足方程

$$\frac{1}{J_{11}}\left(\frac{dM}{dx}-Q\right)-\rho\omega^2\psi=0,\ \frac{1}{F}\frac{dQ}{dx}+\rho\omega^2w_0=0,$$
$$\frac{1}{2F}\frac{dQ}{dx}+\frac{Z}{J_{33}}+\rho\omega^2w_2=0. \tag{30}$$

函数 ψ 和 w_0 具有簡單的几何意义；公式(29)表示梁的任一截面 $x=\text{const}$ 在变形后仍为平面，ψ 是截面的轉角，w_0 是沿截面高度的平均撓度。

在假設(27)—(29)的情况下，运动方程和应力边界条件已經或者能够滿足，但是应力应变关系和位移边界条件则不能嚴格地得到滿足，因此我們去求助方程(14)，它能够給出最好的近似的应力应变关系和位移边界条件。

由于在本問題中 $\delta\sigma_x$、$\delta\tau_{xz}$、$\delta\sigma_z$ 独立无关，所以方程(14)中的体積分化为三个面積分如下：

$$\iint\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma_x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x dxdz=0,\ \iint\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma_z}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta\sigma_z dxdz=0,$$
$$\iint\left(\frac{\partial V}{\partial\tau_{xz}}-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\tau_{xz}dxdz=0. \tag{31}$$

应变能的算式(3)在本問題中簡化为：

$$V=\frac{1}{2E}\left\{\frac{M^2}{J_{11}^2}z^2+\frac{Z^2}{J_{33}^2}z^2\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2-2\nu\frac{MZ}{J_{11}J_{33}}z^2\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)+\right.$$
$$\left.+2(1+\nu)\frac{Q^2}{F^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right)\right]^2\right\}. \tag{32}$$

將位移分量的算式(29)和 V 的算式(32)代入方程(31)，注意到在本問題中

$$\delta\sigma_x=\frac{1}{J_{11}}z\delta M,\quad \delta\tau_{xz}=\frac{1}{F}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right)\right]\delta Q,\quad \delta\sigma_z=\frac{1}{J_{33}}z\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)\delta Z, \tag{33}$$

并算出对 z 的積分后得到

$$\begin{gathered}\int\left\{\frac{1}{E}\left(\frac{M}{J_{11}}-\nu\frac{J_{13}}{J_{11}J_{33}}Z\right)+\frac{d\psi}{dx}\right\}\delta M dx=0,\\ \int\left\{\frac{1}{E}\left(\frac{Z}{J_{33}}-\nu\frac{J_{13}}{J_{11}J_{33}}M\right)+\frac{24J_{13}}{h^2J_{33}}w_2\right\}\delta Z dx=0,\\ \int\left\{\frac{2(1+\nu)}{E}\left(1+\frac{J_{22}}{4F}\right)Q+\psi-\frac{dw_0}{dx}-\frac{J_{22}}{2F}\frac{dw_2}{dx}\right\}\delta Q dx=0.\end{gathered} \tag{34}$$

由此我們得到三个近似的应力应变关系如下：

$$\begin{gathered}\frac{1}{E}\left(\frac{M}{J_{11}}-\nu\frac{J_{13}}{J_{11}J_{33}}Z\right)+\frac{d\psi}{dx}=0,\\ \frac{1}{E}\left(\frac{Z}{J_{13}}-\nu\frac{M}{J_{11}}\right)+\frac{24}{h^2}w_2=0,\\ \frac{2(1+\nu)}{E}\left(1+\frac{J_{22}}{4F}\right)Q+\psi-\frac{dw_0}{dx}-\frac{J_{22}}{2F}\frac{dw_2}{dx}=0.\end{gathered} \tag{35}$$

方程(14)中的面積分在本問題中給出在梁两端的近似边界条件，結果如下：

$$\begin{gathered}\text{在 } x=0 \text{ 和 } x=l \text{ 处，}\qquad \psi=0 \quad\text{或}\quad M=0;\\ w_0+\frac{J_{22}}{2F}w_2=0 \quad\text{或}\quad Q=0.\end{gathered} \tag{36}$$

所以总起來說，狭矩形截面梁的弯曲振动問題的基本方程，按照本文的近似解法，是运动方程(30)、应力应变关系(35)和边界条件(36)。

5. 薄板的弯曲振动

考慮等厚度的薄板的弯曲振动，設 w 是板的撓度，M_x, M_y, $M_{xy}=M_{yx}$ 是板的弯矩和扭矩，D 是板的抗弯刚度，ν 是泊松系数，ρ 是單位面積的質量。當板以圓周頻率 ω 作固有振动时，我們有方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\rho\omega^2 w=0, \tag{37}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial V}{\partial M_x},\quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial V}{\partial M_{xy}},\quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial V}{\partial M_y},\tag{38}$$

其中

$$V=\frac{1}{2D(1-\nu^2)}[M_x^2+M_y^2-2\nu M_xM_y+2(1+\nu)M_{xy}^2].\tag{39}$$

板的边界条件通常有四种情况，即撓度、法向傾度、法向弯矩、横力等于零；其中后两者屬于应力边界条件．仿照第二節的方法可以証明在本問題有如下的变分原理：設 M_x，M_y，M_{xy} 为一組滿足应力边界条件的应力狀态，并且

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}$$

不在有限的面積內等于零，板的固有頻率相应下列泛函数所取的極值：

$$\omega^2=\operatorname{ext}\frac{D(1-\nu^2)\iint\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right]^2dxdy}{\iint[M_x^2+M_y^2-2\nu M_xM_y+2(1+\nu)M_{xy}^2]dxdy},\tag{40}$$

而基本固有頻率相应于上式的最小的極值．

6．不必滿足任何條件的变分原理

在第二節提出的变分原理，允許狀态必須滿足运动方程和应力边界条件．本節我們將提出一个一般的变分原理，其中允許狀态只要求应力和位移分量是連續函数而不必事先滿足任何方程或边界条件．

依照文献[8]中的方法和記号，命

$$\begin{aligned}H=&\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\\&+\tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-V,\end{aligned}\tag{41}$$

式中 V 仍旧代表以应力分量表示的單位体積中的应变能．考慮与第二節相同的問題，即彈性体的固有振动，并假定在一部分表面 S_σ 上外力等于零，而在其余的表面 S_u 上位移等于零．对于这个問題，我們有如下的一般变分原理：彈性体的固有頻率相应于下列泛函所取的極值：

$$\omega^2=\operatorname{ext}\frac{\iiint Hdxdydz-\iint_{S_u}(up_x+vp_y+wp_z)dS}{\frac{1}{2}\iiint\rho(u^2+v^2+w^2)dxdydz},\tag{42}$$

而基本固有頻率相应于上式最小的極值．在(42)式中，p_x，p_y，p_z 代表下列算式：

$$p_x=\sigma_xl+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n,\quad p_y=\tau_{xy}l+\sigma_ym+\tau_{yz}n,\quad p_z=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_zn,\tag{43}$$

而 l,m,n 是表面法綫的方向余弦．

証明　(42)式取極值的条件是

$$\delta\iiint H dxdydz-\delta\iint_{S_u}(up_x+vp_y+wp_z)dS-$$
$$-\frac{1}{2}\omega^2\delta\iiint\rho(u^2+v^2+w^2)dxdydz=0. \tag{44}$$

將变分算子 δ 作用于積分号內，并將 H 的算式(41)代入，得到

$$\iiint\Big\{\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\delta v}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial\delta w}{\partial z}+\tau_{yz}\Big(\frac{\partial\delta v}{\partial z}+\frac{\partial\delta w}{\partial y}\Big)+$$
$$+\tau_{xz}\Big(\frac{\partial\delta u}{\partial z}+\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big)+\tau_{xy}\Big(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\Big)\Big\}dxdydz+$$
$$+\iiint\Big\{\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial\sigma_x}\Big)\delta\sigma_x+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial\sigma_y}\Big)\delta\sigma_y+\Big(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial\sigma_z}\Big)\delta\sigma_z+$$
$$+\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial\tau_{yz}}\Big)\delta\tau_{yz}+\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial\tau_{xz}}\Big)\delta\tau_{xz}+$$
$$+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial\tau_{xy}}\Big)\delta\tau_{xy}\Big\}dxdydz-\iint_{S_u}(p_x\delta u+p_y\delta v+p_z\delta w)dS-$$
$$-\iint_{S_u}(u\delta p_x+v\delta p_y+w\delta p_z)dS-$$
$$-\omega^2\iiint\rho(u\delta u+v\delta v+w\delta w)dxdydz=0. \tag{45}$$

利用文献[8]公式(104)来变換上式中的第一个積分，我們就得到

$$\iiint\Big\{\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho\omega^2u\Big)\delta u+\Big(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho\omega^2v\Big)\delta v+$$
$$+\Big(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho\omega^2w\Big)\delta w\Big\}dxdydz+$$
$$+\iiint\Big\{\Big(\frac{\partial V}{\partial\sigma_x}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\delta\sigma_x+\Big(\frac{\partial V}{\partial\sigma_y}-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\delta\sigma_y+\Big(\frac{\partial V}{\partial\sigma_z}-\frac{\partial w}{\partial z}\Big)\delta\sigma_z+\Big(\frac{\partial V}{\partial\tau_{yz}}-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\delta\tau_{yz}+$$
$$+\Big(\frac{\partial V}{\partial\tau_{xz}}-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\delta\tau_{xz}+\Big(\frac{\partial V}{\partial\tau_{xy}}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\delta\tau_{xy}\Big\}dxdydz+$$
$$+\iint_{S_u}(u\delta p_x+v\delta p_y+w\delta p_z)dS-\iint_{S_\sigma}(p_x\delta u+p_y\delta v+p_z\delta w)dS=0. \tag{46}$$

由于 $u,v,w,\sigma_x,\cdots,\tau_{xz}$ 的变分不受任何限制，所以从上式的第一个積分我們得到运动方程(1)，从第二个積分得到应力应变关系式(2)，从第三个積分得到位移边界条件(5)，从第四个積分得到应力边界条件(4)．由此可知，(42)式取極值的条件与原有問題完全相当，这样就証明了上述原理．

剛才証明的变分原理提供了一个决定基本固有頻率的方便而有效的方法．任選九个包含不定因素的函数作为应力和位移分量，然后求(42)式的極值．这最小的極值便

是基本固有頻率平方的近似值.

在上述原理中，$u, v, w, \sigma_x, \cdots, \tau_{xz}$ 和它們的变分不受任何限制，因此可以認为公式(42)是固有振动問題中最一般的变分原理之一. 如果在公式(42)中，我們給 $u, v, w, \sigma_x, \cdots, \tau_{xz}$ 以种种限制[当然这些限制必須适合方程(1)，(2)，(4)，(5)]，那末我們便可引出一系列較为特殊的但仍相当普遍的原理. 今將重要的特例列举如下：

1. 假定位移分量已滿足位移边界条件　在这种場合，公式(42)簡化为

$$\omega^2 = \text{ext}\frac{\iiint H dxdydz}{\frac{1}{2}\iiint \rho(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz}. \tag{47}$$

2. 假定应力应变关系(2)已經滿足　在这种場合，函数 H 变为

$$H = \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \cdots + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) - V = U, \tag{48}$$

这里 U 是以应变分量表示的單位体積的应变能，因此公式(42)簡化为

$$\omega^2 = \text{ext}\frac{\iiint U\,dxdydz - \iint_{S_u}(up_x+vp_y+wp_z)\,dS}{\frac{1}{2}\iiint \rho(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz}. \tag{49}$$

3. 假定应力应变关系及位移边界条件已經滿足　在这种場合，公式(49)可以進一步簡化为

$$\omega^2 = \text{ext}\frac{\iiint U dxdydz}{\frac{1}{2}\iiint \rho(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz}; \tag{50}$$

这便是熟知的萊瑞原理.

7. 再論狹矩形截面梁的彎曲振动

（鉄摩辛柯理論）

考慮与第四節相同的問題. 我們要从公式(42)推導出鉄摩辛柯理論中的运动方程和应力应变关系. 由于梁的厚度小于它的高度而高度又小于它的長度，因此在一級近似中我們可以合理地假定(参考圖1)：

$$\begin{gathered}\sigma_x = \frac{M(x)}{J}z, \quad \tau_{xz} = \frac{3Q(x)}{2F}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right), \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \\ u = -\psi(x)z, \quad w = w(x), \quad v = 0,\end{gathered} \tag{51}$$

式中 M, Q 是弯矩和剪力，ψ 和 w 是轉角和撓度；而

$$F=bh,\quad J=\frac{bh^3}{12}\tag{52}$$

是截面的面積和慣性矩．在假設(51)的情况下，V 的算式(3)变为

$$V=\frac{\sigma_x^2}{2E}+\frac{\tau_{xz}^2}{2G}=\frac{M^2}{2EJ^2}z^2+\frac{9Q^2}{8GF^2}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2.\tag{53}$$

因此 H 的算式(41)变为

$$H=-\frac{M}{J}\frac{d\psi}{dx}z^2+\frac{3Q}{2F}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)\left(-\psi+\frac{dw}{dx}\right)-$$
$$-\frac{M^2}{2EJ^2}z^2-\frac{9Q^2}{8GF^2}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2.\tag{54}$$

將(51)，(54)代入公式(42)，然后算出对 y, z 的積分，得到

$$\omega^2=\operatorname{ext}\frac{\int_0^l \overline{H}dx-(-M\psi+Qw)\Big|_0^l}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho(J\psi^2+Fw^2)\,dx},\tag{55}$$

其中

$$\overline{H}=-M\frac{d\psi}{dx}+Q\left(-\psi+\frac{dw}{dx}\right)-\frac{M^2}{2EJ}-\frac{3Q^2}{5GF}.\tag{56}$$

公式(55)便是这种近似理論中的一般变分原理．寫出使(55)式取極值的条件，我們得到方程

$$\frac{d\psi}{dx}+\frac{M}{EJ}=0,\quad -\psi+\frac{dw}{dx}-\frac{6Q}{5GF}=0,\tag{57}$$

$$-\frac{dM}{dx}+Q+\omega^2\rho J\psi=0,\quad \frac{dQ}{dx}+\omega^2\rho Fw=0.\tag{58}$$

在梁的两端有边界条件

$$\begin{aligned}&\psi=0\quad 或\quad M=0,\\&w=0\quad 或\quad Q=0.\end{aligned}\tag{59}$$

方程(58)是近似的运动方程，条件(59)是近似的边界条件，方程(57)是近似的应力应变关系，它也可寫成下列形式：

$$M=-EJ\frac{d\psi}{dx},\quad Q=kGF\left(\frac{dw}{dx}-\psi\right),\tag{60}$$

其中

$$k=\frac{5}{6}.\tag{61}$$

方程(58)—(61)便是鉄摩辛柯理論中的基本方程，在鉄摩辛柯原來的推演中，应力应变关系(60)是当作一个独立的假設被引進的，但是在本文中它們是根据假設(51)推導出來的．

在二級近似中，我們可以合理地假定

$$\sigma_x=\frac{M(x)}{J_{11}}z,\quad \tau_{xz}=\frac{3Q(x)}{2F}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right),$$
$$\sigma_z=\frac{Z(x)}{J_{33}}z\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right),\quad \sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0, \tag{62}$$
$$u=-\psi(x)z,\quad w=w_0(x)+w_2(x)\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right),\quad v=0,$$

其中 J_{11}、J_{33} 的意义仍如(28)式所規定的．經过較長的計算可以証明，在假設(62)的情况下，使(42)式取極値的条件是方程(30)，(35)，(36)，这样我們得到与第四節完全相同的結果．由于在假設(62)中比在假設(51)包含有更多的不定因素，所以可以肯定第四節提出的近似理論，比鉄摩辛柯的理論更接近于准确解．

8. 再論薄板的弯曲振动

（烏弗良特、明德林理論）

考慮等厚度的均匀各向同性薄板的弯曲振动問題．設 h 是板的厚度，取板的中面为 xy 坐标面，在一級近似中，我們可以合理地假定

$$\sigma_x=\frac{M_x(x,y)}{J}z,\quad \sigma_y=\frac{M_y(x,y)}{J}z,\quad \tau_{xy}=\frac{M_{xy}(x,y)}{J}z,$$
$$\tau_{xz}=\frac{3Q_x(x,y)}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right),\quad \tau_{yz}=\frac{3Q_y(x,y)}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right),\quad \sigma_z=0, \tag{63}$$
$$u=-\psi_x(x,y)z,\quad v=-\psi_y(x,y)z,\quad w=w(x,y),$$

式中 M_x、M_y，M_{xy} 是板内的弯矩和扭矩，Q_x，Q_y 是横力，w 是板的撓度，ψ_x,ψ_y 是垂直于板中面的綫段的轉角．

$$J=\frac{h^3}{12}. \tag{64}$$

在假設(63)的情况下，公式(42)变为

$$\omega^2=\mathrm{ext}\frac{\iint \overline{\Pi}\,dxdy-\int(-\psi_n M_n-\psi_s M_s+wQ_n)\,ds}{\frac{1}{2}\iint\rho[J(\psi_x^2+\psi_y^2)+hw^2]\,dxdy}, \tag{65}$$

其中

$$\overline{\Pi}=-M_x\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-M_y\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-M_{xy}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)+Q_x\left(-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+$$
$$+Q_y\left(-\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{1}{2EJ}[M_x^2+M_y^2-2\nu M_xM_y+2(1+\nu)M_{xy}^2]-$$
$$-\frac{3}{5Gh}(Q_x^2+Q_y^2), \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&Q_n=lQ_x+mQ_y,\\
&M_n=l^2M_x+2lmM_{xy}+m^2M_y,\\
&M_s=(l^2-m^2)M_{xy}+(M_y-M_x)lm,\\
&\psi_n=l\psi_x+m\psi_y,\quad \psi_s=-m\psi_x+l\psi_y.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

s 是板中面的周綫的弧長，l, m 是周綫法綫的方向余弦．由(67)式中規定的各量具有簡單的力学及几何意义：Q_n 是板边上的横力，M_n 是法向弯矩，M_s 是切向扭矩，ψ_n 是板边的法向轉角，ψ_s 是切向轉角．

寫出使(65)式取極値的条件，我們得到下列方程：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{1}{EJ}(M_x-\nu M_y)=0,\quad \frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{1}{EJ}(M_y-\nu M_x)=0,\\
&\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}+\frac{2(1+\nu)}{EJ}M_{xy}=0,\\
&-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{6Q_x}{5Gh}=0,\quad -\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{6Q_y}{5Gh}=0;
\end{aligned}
\right\}
\tag{68}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+Q_x+\omega^2\rho J\psi_x=0,\\
&-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial M_y}{\partial y}+Q_y+\omega^2\rho J\psi_y=0,\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\omega^2\rho hw=0;
\end{aligned}
\right\}
\tag{69}
$$

在边界上：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\psi_n=0 \quad 或 \quad M_n=0,\\
&\psi_s=0 \quad 或 \quad M_s=0,\\
&w=0 \quad 或 \quad Q_n=0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{70}
$$

方程(69)是近似的运动方程，条件(70)是近似的边界条件，方程(68)是近似的应力应变关系，它也可以寫成下列形式：

$$
\begin{aligned}
&M_x=-D\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right),\quad M_y=-D\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right),\\
&M_{xy}=-\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right),\\
&Q_x=kGh\left(-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad Q_y=kGh\left(-\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right),
\end{aligned}
\tag{71}
$$

其中

$$
D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad k=\frac{5}{6}.
\tag{72}
$$

参 考 文 献

[1] Lord Rayleigh, Theory of Sound. Стретт, ДЖ. В.(Лорд Рэлей), Теория звука.
[2] Timoshenko, S., Vibrational Problems in Engineering.
[3] Филиппов, А. П., Колебания упругих систем. Изд. АН Укр. ССР, 1956.
[4] Timoshenko, S., Transverse vibrations of prismatic beams. *Phil. Mag.*, **41**(1921), 744—746; **43** (1922), 125—131.
[5] Уфлянд, Я. С., Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. *Прикл. Мат. Мех.*, 12(1948), 287—300.
[6] Mindlin, R. D., Influence of rotary inertia and shear on fluexual motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 31—38.
[7] 钱偉長、林鸿蓀、胡海昌、叶开沅，彈性柱体的扭轉理論，科学出版社出版，1956年.
[8] 胡海昌，論彈性体力学与受范性体力学中的一般变分原理. 物理学报，**10**(1954),259—289.

ON TWO VARIATIONAL PRINCIPLES FOR THE NATURAL VIBRATIONS OF ELASTIC BODIES

HAI-CHANG HU
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Consider the natural vibrations of elastic bodies. For the natural frequencies, we have obtained two variational principles. In the first variational principle, an allowable state is defined as follows. The stress components and their variations have the forms

$$\sigma_x=\omega^2\bar{\sigma}_x, \quad \sigma_y=\omega^2\bar{\sigma}_y, \quad \cdots, \quad \tau_{xy}=\omega^2\bar{\tau}_{xy}, \tag{6}$$

$$\delta\sigma_x=\omega^2\delta\bar{\sigma}_x, \quad \delta\sigma_y=\omega^2\delta\bar{\sigma}_y, \quad \cdots, \quad \delta\tau_{xy}=\omega^2\delta\bar{\tau}_{xy}, \tag{13}$$

and satisfy the stress-free boundary conditions. The corresponding displacement components are derived from equations of motion:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho\omega^2u=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho\omega^2v=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho\omega^2w=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Then it is proved that the natural frequencies ω of the body correspond to the extreme values of the following functional:

$$\omega^2=\mathrm{ext}\frac{\frac{1}{2}\omega^4\iiint\rho(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz}{\iiint V(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy})\,dxdydz}, \tag{10}$$

where V is the strain energy per unit volume expressed in terms of stress components.

In the second variational principle, an allowable state is defined by any continuous stress and displacement distributions, not necessarily satisfying any equation and boundary condition. In this case, it is proved that the natural frequencies ω of the body correspond to the extreme values of the following functional:

$$\omega^2 = \text{ext}\frac{\iiint H\,dxdydz - \iint_{S_u}(up_x + vp_y + wp_z)\,dS}{\frac{1}{2}\iiint \rho(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz}, \tag{42}$$

where H has the expression

$$H = \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \cdots + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - V(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}), \tag{41}$$

p_x, p_y, p_z are the surface tractions, and S_u is that part of the surface of the body where displacement should vanish.

In the last two sections of this paper, the Timoshenko's theory for the transverse vibrations of beams and the Ufliand-Mindlin's theory for the flexural vibrations of plates are derived from the second variational principle.