

# 考虑剪应变的弹性薄壁杆件的振动理论\*

胡海昌 鍾万綱

(中国科学院力学研究所)

## 1. 引言

对于开口截面弹性薄壁杆件的振动问题, B. 3. 符拉索夫<sup>[1]</sup>在1940年提出的理论, 是基于下列两个基本假设: (1) 截面具有刚硬不可变形的周线; (2) 中曲面无剪应变. 其后, 有些学者也曾提出过相同的理论(例如 R. 海里格<sup>[2]</sup>). 由于忽略了中曲面的剪应变, 我们可以估计得到, 符拉索夫的理论只适用于研究低频率的固有振动和强迫振动, 而不适用于研究高频率的振动. 由于行动载荷和冲击载荷必然引起各个固有频率的振动, 因此符拉索夫的理论也不适用于研究这些载荷作用下的振动问题. 为了要更好地研究这些问题, 必须要考虑剪应变的影响.

最近解伯民<sup>[3]</sup>曾放弃了中曲面无剪应变的假设而只根据截面周线不可变形这样一个假设提出了薄壁杆件振动的一般理论. 他的理论虽然比较准确, 但是从实用方面看来, 未免带来了不必要的数学上的困难. 我们知道杆件变形后, 不但中曲面要产生剪应变, 并且截面的形状也必有变更. 因此, 在假定截面周线不可变形的情况下, 完全不采用关于剪应变的假设是过分的精细. 这种精细, 事实上并不能使理论更接近于实际情况, 因此作者认为, 为了使理论能研究较多的问题, 只需要将有关剪应变的假设稍稍放宽就可以了, 而不必完全放弃不用.

本文的目的在于提出开口截面薄壁杆件振动问题的一种不过分繁复的理论. 这个理论是以本文作者之一最近提出的变分原理<sup>[4]</sup>为基础, 它可以说是铁摩辛柯<sup>[5]</sup>关于细梁振动理论的推广. 在截面具有两个对称轴的情况, 本文的理论比铁摩辛柯理论多两个关于扭转振动的方程. 工字梁的扭转振动计算表明, 本文给出的频率比符拉索夫理论小, 而在很大的范围内与解伯民理论几乎没有区别. 此外, 我们还指出, 在杆件作扭转振动时, 有两个波速存在.

## 2. 固有振动的基本公式和方程

先来考虑杆件的固有振动问题. 取一直角坐标系  $x, y, z$ , 使  $z$  轴沿杆件的长度方

\* 1957年1月24日收到.

向,  $x, y$  轴与截面的中心主轴相重. 设  $s$  是截面周线的弧长, 从周线的一端算起. 我们将要用文献[4]中的一个变分原理来决定固有频率. 为此, 我们对杆件的形变作如下假定: (1) 杆件变形后, 它的横截面在平面  $z = \text{const}$  上的投影的形状不变 (即周线刚硬不可变形). 这样, 横截面的变形有如一个刚体, 因此可以用截面的弯曲中心点  $A$  (按照 B. 3. 符拉索夫的理论决定, 设它的坐标为  $x = a, y = b$ ) 的挠度  $\xi(z, t)$ ,  $\eta(z, t)$  和截面绕  $A$  点的转角  $\theta(z, t)$  来决定. 截面周线上任一点  $M$  沿周线法线方向的位移  $u(z, s, t)$  和切线方向的位移  $v(z, s, t)$  各为:

$$u = \left[ \xi - (y-b)\theta \right] \frac{dx}{ds} - \left[ \eta + (x-a)\theta \right] \frac{dy}{ds}, \quad v = \xi \frac{dy}{ds} + \eta \frac{dx}{ds} + \theta \frac{d\omega}{ds}. \quad (1)$$

(2) 截面上任意一点  $M$  的纵向位移  $w(z, s, t)$  可以用下列四项式表示:

$$w(z, s, t) = \zeta(z, t) - x\psi_x(z, t) - y\psi_y(z, t) - \omega\psi_\omega(z, t), \quad (2)$$

这里  $\zeta$  代表截面的移动,  $\psi_x$  和  $\psi_y$  代表截面的转角,  $\psi_\omega$  代表截面的扭曲. 根据假定(1)和(2), 中曲面的纵向伸长应变  $\varepsilon$  和剪应变  $\gamma$  各为

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - x \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - y \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \omega \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) \frac{dx}{ds} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) \frac{dy}{ds} + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) \frac{d\omega}{ds}. \quad (4)$$

关于杆件中应力分布情况, 我们作如下假定: (1) 沿杆件厚度法应力的非均匀分布的影响可以略去不计, 沿厚度剪应力非均匀分布的影响可以归结为一个内扭力矩  $\bar{M}_z$ , 它与扭转角  $\theta$  有下列关系:

$$\bar{M}_z = GJ_d \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (5)$$

式中  $GJ_d$  是杆件的自由扭转刚度. (2) 法应力的分布与符拉索夫理论中的分布相同. 即可以用四个内力  $N(z, t)$ ,  $M_x(z, t)$ ,  $M_y(z, t)$ ,  $B(z, t)$  表示如下:

$$\sigma(z, s, t) = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_{xx}} x + \frac{M_x}{J_{yy}} y - \frac{B}{J_{\omega\omega}} \omega, \quad (6)$$

(3) 剪应力沿厚度的平均值  $\tau(z, s, t)$  的分布情况与符拉索夫理论中的分布情况相同. 即可以用三个内力  $Q_x(z, t)$ ,  $Q_y(z, t)$ ,  $K(z, t)$  来表示如下:

$$\tau(z, s, t) = -\frac{N_x}{J_{xx}h} Q_x - \frac{N_y}{J_{yy}h} Q_y - \frac{S_\omega}{J_{\omega\omega}h} K. \quad (7)$$

在公式(6), (7)中,

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_0^l h ds, \quad J_{xx} = \int_0^l x^2 h ds, \quad J_{yy} = \int_0^l y^2 h ds, \quad J_{\omega\omega} = \int_0^l \omega^2 h ds, \\ S_x &= \int_0^s x h ds, \quad S_y = \int_0^s y h ds, \quad S_\omega = \int_0^s \omega h ds, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里  $h$  是杆件的厚度,  $l$  是截面周綫的弧長。

上面引進的一系列假定, 比 B. 3. 符拉索夫所用的稍稍寬松一些。如果我們再假定

$$\psi_x = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \psi_y = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \psi_\omega = \frac{\partial \theta}{\partial z};$$

那末我們將得到与符拉索夫理論完全相同的基本公式。

文献[4]曾証明了固有頻率<sup>1)</sup>  $\omega$  相应于下列泛函所取的極值:

$$\omega^2 = \text{ext} \frac{\iiint H dx dy dz - \iint_{s_u} (u p_x + v p_y + w p_z) ds}{\frac{1}{2} \iiint \rho (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz}, \quad (9)$$

其中

$$H = \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{yz} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - V, \quad (10)$$

而  $V$  是以应力分量表示的單位体積的应变能。由于在本問題中我們对位移及应力分佈作了上述假定,  $H$  的体積分相应地簡化为

$$\iiint H dx dy dz = \int_0^L \left\{ \int_0^l \left( \sigma \varepsilon + \tau \gamma - \frac{\sigma^2}{2E} - \frac{\tau^2}{2G} \right) h ds + \frac{1}{2} G J_a \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right\} dz, \quad (11)$$

这里  $L$  是杆件的長度。將  $\varepsilon, \gamma, \sigma, \tau$  的算式(3), (4), (6), (7)代入上式, 然后算出对  $s$  的積分, 得到

$$\begin{aligned} \iiint H dx dy dz = & \int_0^L \left\{ N \frac{\partial \xi}{\partial z} + M_y \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - M_x \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - B \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} + Q_x \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + \right. \\ & + Q_y \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) - \frac{N^2}{2EF} - \frac{M_y^2}{2EJ_{xx}} - \frac{M_x^2}{2EJ_{yy}} - \frac{B^2}{2EJ_{\omega\omega}} - \\ & - \frac{L_{xx}}{2GJ_{xx}^2} Q_x^2 - \frac{L_{yy}}{2GJ_{yy}^2} Q_y^2 - \frac{L_{\omega\omega}}{2GJ_{\omega\omega}^2} K^2 - \frac{L_{xy}}{GJ_{xx}J_{yy}} Q_x Q_y - \frac{L_{x\omega}}{GJ_{xx}J_{\omega\omega}} Q_x K - \\ & \left. - \frac{L_{y\omega}}{GJ_{yy}J_{\omega\omega}} Q_y K + \frac{1}{2} G J_a \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right\} dz, \quad (12) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^l \frac{S_x^2}{h} ds, \quad L_{yy} = \int_0^l \frac{S_y^2}{h} ds, \quad L_{\omega\omega} = \int_0^l \frac{S_\omega^2}{h} ds, \\ L_{xy} &= \int_0^l \frac{S_x S_y}{h} ds, \quad L_{x\omega} = \int_0^l \frac{S_x S_\omega}{h} ds, \quad L_{y\omega} = \int_0^l \frac{S_y S_\omega}{h} ds, \end{aligned} \quad (13)$$

1) 在本文中,  $\omega$  有时代表屬性面積, 有时代表頻率, 由于这两个量总是出現在很不相同的地方, 因此並不会混淆。

杆件的侧面是懸空的。如果杆件的两端面是夾住的,那末(9)式分子中的第二个积分变为

$$\iint_{S_u} (up_x + vp_y + wp_z) ds = \left\{ \int_0^L (w\sigma + v\tau) h ds + \bar{M}_z \theta \right\} \Big|_0^L. \quad (14)$$

將公式(1), (2), (6), (7)代入此式,然后算出积分,得到

$$\begin{aligned} \iint_{S_u} (up_x + vp_y + wp_z) ds = \\ = \{ N\zeta + M_y\psi_x - M_x\psi_y - B_\omega\psi_\omega + Q_x\xi + Q_y\eta + (K + \bar{M}_z)\theta \} \Big|_0^L. \end{aligned} \quad (15)$$

如果杆件的两端面是懸空的,那末上列积分就該省去。如果杆件的两端面上的部分位移等于零,那末應該在(15)中只保留相应的項,而其余的項省去。

公式(9)中分母的体积分,代表杆件的动能,在本問題中,它等于

$$\frac{1}{2} \iiint \rho (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \int_0^a \rho (u^2 + v^2 + w^2) h ds dz. \quad (16)$$

我們假定杆件的密度  $\rho$  是一个常数,將(1), (2)代入此式,然后算出对  $s$  的积分,得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint \rho (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \{ F(\xi^2 + \eta^2) + S_r \theta^2 + \\ + 2F(b\xi - a\eta)\theta + F\zeta^2 + J_{xx}\psi_x^2 + J_{yy}\psi_y^2 + J_{\omega\omega}\psi_\omega^2 \} dz, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$S_r = J_{xx} + J_{yy} + F(a^2 + b^2). \quad (18)$$

將算式(12), (15), (17)代入公式(9),然后列出使  $\omega^2$  取極值的条件,我們得到下列十四个方程:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{N}{EF} = 0, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x - \frac{I_{xx}}{GJ_{xx}^2} Q_x - \frac{I_{xy}}{GJ_{xx}J_{yy}} Q_y - \frac{I_{x\omega}}{GJ_{xx}J_{\omega\omega}} K = 0, \quad (19b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y - \frac{I_{xy}}{GJ_{xx}J_{yy}} Q_x - \frac{I_{yy}}{GJ_{yy}^2} Q_y - \frac{I_{y\omega}}{GJ_{yy}J_{\omega\omega}} K = 0, \quad (19c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega - \frac{I_{x\omega}}{GJ_{xx}J_{\omega\omega}} Q_x - \frac{I_{y\omega}}{GJ_{yy}J_{\omega\omega}} Q_y - \frac{I_{\omega\omega}}{GJ_{\omega\omega}^2} K = 0, \quad (19d)$$

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{M_y}{EJ_{xx}} = 0, \quad (19e)$$

$$-\frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \frac{M_x}{EJ_{yy}} = 0, \quad (19f)$$

$$-\frac{\partial \psi_{\omega}}{\partial \zeta} - \frac{B}{EJ_{\omega\omega}} = 0; \quad (19g)$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \omega^2 \rho F \zeta = 0, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} + \omega^2 \rho F (\xi + b\theta) = 0, \quad (20b)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} + \omega^2 \rho F (\eta - a\theta) = 0, \quad (20c)$$

$$\frac{\partial K}{\partial z} + GJ_a \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \omega^2 \rho \{S_r \theta + bF\xi - aF\eta\} = 0, \quad (20d)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} + Q_x + \omega^2 \rho J_{xx} \psi_x = 0, \quad (20e)$$

$$-\frac{\partial M_x}{\partial z} + Q_y + \omega^2 \rho J_{yy} \psi_y = 0, \quad (20f)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial z} + K + \omega^2 \rho J_{\omega\omega} \psi_{\omega} = 0. \quad (20g)$$

此外，我們還得到下列各種邊界條件：

$$\text{在端面上：} \quad \zeta = 0 \quad \text{或} \quad N = 0, \quad (21a)$$

$$\xi = 0 \quad \text{或} \quad Q_x = 0, \quad (21b)$$

$$\eta = 0 \quad \text{或} \quad Q_y = 0, \quad (21c)$$

$$\theta = 0 \quad \text{或} \quad K + GJ_a \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad (21d)$$

$$\psi_x = 0 \quad \text{或} \quad M_y = 0, \quad (21e)$$

$$\psi_y = 0 \quad \text{或} \quad M_x = 0, \quad (21f)$$

$$\psi_{\omega} = 0 \quad \text{或} \quad B = 0. \quad (21g)$$

方程(19)是應力應變關係，方程(20)是運動方程，方程(21)是邊界條件。這三組的第一個給出：

$$N = EF \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad E \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \omega^2 \rho \zeta = 0. \quad (22)$$

$$\text{在端面上，} \quad \zeta = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (23)$$

這便是熟知的縱向振動方程。方程(19)的其餘六式給出

$$Q_x = G \left\{ K_{xx} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + K_{xy} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K_{x\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_{\omega} \right) \right\}, \quad (24a)$$

$$Q_y = G \left\{ K_{xy} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K_{y\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_{\omega} \right) \right\}, \quad (24b)$$

$$K = G \left\{ K_{xx} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K_{\omega\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) \right\}, \quad (24c)$$

$$M_y = EJ_{xx} \frac{\partial \psi_x}{\partial z}, \quad (24d)$$

$$M_x = -EJ_{yy} \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad (24e)$$

$$B = -EJ_{\omega\omega} \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z}; \quad (24f)$$

其中  $K_{xx}, K_{yy}, \dots, K_{\omega\omega}$  由下列的关系决定:

$$\begin{pmatrix} \frac{I_{xx}}{J_{xx}^2}, & \frac{I_{xy}}{J_{xx}J_{yy}}, & \frac{I_{x\omega}}{J_{xx}J_{\omega\omega}} \\ \frac{I_{xy}}{J_{xx}J_{yy}}, & \frac{I_{yy}}{J_{yy}^2}, & \frac{I_{y\omega}}{J_{yy}J_{\omega\omega}} \\ \frac{I_{x\omega}}{J_{xx}J_{\omega\omega}}, & \frac{I_{y\omega}}{J_{yy}J_{\omega\omega}}, & \frac{I_{\omega\omega}}{J_{\omega\omega}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{xx}, K_{xy}, K_{x\omega} \\ K_{xy}, K_{yy}, K_{y\omega} \\ K_{x\omega}, K_{y\omega}, K_{\omega\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{1}. \quad (25)$$

将公式(24)代入(20)的后面六式, 我们得到以位移分量表示的运动方程如下:

$$G \left\{ K_{xx} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) + K_{\omega\omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} \right) \right\} + \omega^2 \rho F (\xi + b\theta) = 0, \quad (26a)$$

$$G \left\{ K_{xy} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) + K_{y\omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} \right) \right\} + \omega^2 \rho F (\eta - a\theta) = 0, \quad (26b)$$

$$G \left\{ K_{x\omega} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) + K_{y\omega} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) + K_{\omega\omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} \right) \right\} + GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \omega^2 \rho (S_r \theta + bF\xi - aF\eta) = 0, \quad (26c)$$

$$EJ_{xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} + G \left\{ K_{xx} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + K_{xy} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K_{x\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) \right\} + \omega^2 \rho J_{xx} \psi_x = 0, \quad (26d)$$

$$EJ_{yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + G \left\{ K_{xy} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + K_{yy} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K_{y\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) \right\} + \omega^2 \rho J_{yy} \psi_y = 0, \quad (26e)$$

$$EJ_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial z^2} + G \left\{ K_{x\omega} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + K_{y\omega} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + K_{\omega\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) \right\} + \omega^2 \rho J_{\omega\omega} \psi_\omega = 0. \quad (26f)$$

(24) 和 (26) 是本节所要推导的基本公式与方程。

### 3. 具有兩個對稱軸的杆件的扭轉振動

考慮截面有兩個對稱軸的開口截面薄壁杆件的振動, 此時由於對稱的緣故, 我們有

$$a=b=0, K_{xy}=K_{x\omega}=K_{y\omega}=0, S_r=J_{xx}+J_{yy}. \quad (27)$$

公式(26)就變為

$$GK_{xx} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) + \omega^2 \rho F \xi = 0, \quad (28a)$$

$$EJ_{xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} + GK_{xx} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi_x \right) + \omega^2 \rho J_{xx} \psi_x = 0. \quad (28b)$$

$$GK_{yy} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) + \omega^2 \rho F \eta = 0, \quad (29a)$$

$$EJ_{yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + GK_{yy} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi_y \right) + \omega^2 \rho J_{yy} \psi_y = 0, \quad (29b)$$

$$GK_{\omega\omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} \right) + GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \omega^2 \rho S_r \theta = 0, \quad (30a)$$

$$EJ_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial z^2} + GK_{\omega\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) + \omega^2 \rho J_{\omega\omega} \psi_\omega = 0. \quad (30b)$$

這些方程會同了相應的邊界條件可以分成互相獨立的三組, 方程(28)相應於在  $x$  方向考慮剪应变的彎曲振動, (29) 相應於在  $y$  方向考慮剪应变的彎曲振動, 我們不去討論它了, 而去考慮計及剪应变的扭轉振動方程(30).

現在來討論簡支杆件的扭轉振動, 它們的邊界條件為

$$\begin{aligned} \text{在 } z=0 \text{ 處,} \quad \theta=0, \quad B=+EJ_{\omega\omega} \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z}=0; \\ \text{在 } z=L \text{ 處,} \quad \theta=0, \quad B=-EJ_{\omega\omega} \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z}=0. \end{aligned} \quad (31)$$

為了要滿足邊界條件, 我們取

$$\theta = \theta_0 \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad \psi_\omega = \psi_0 \cos \frac{n\pi z}{L}. \quad (32)$$

以此式代入(30)式, 於是得到

$$\begin{aligned} \theta_0 \cdot \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (GK_{\omega\omega} + GJ_d) - \omega^2 \rho S_r \right] - \psi_0 \cdot GK_{\omega\omega} \frac{n\pi}{L} = 0; \\ -\theta_0 \cdot GK_{\omega\omega} \frac{n\pi}{L} + \psi_0 \left[ EJ_{\omega\omega} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - \omega^2 \rho J_{\omega\omega} + GK_{\omega\omega} \right] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

為要使  $\theta_0$  和  $\psi_0$  不同時為零, 它們的行列式必須為零, 即

$$(\omega^2 \rho)^2 \cdot J_{\omega\omega} S_r - \omega^2 \rho \left[ GK_{\omega\omega} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot EJ_{\omega\omega} \right] S_r + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 EJ_{\omega\omega} (GK_{\omega\omega} + GJ_d) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 GK_{\omega\omega} \cdot GJ_d = 0. \quad (33)$$

它的根为

$$\omega^2 \rho = \frac{\left[ GK_{\omega\omega} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EJ_{\omega\omega} \right]}{2J_{\omega\omega} S_r} \pm \sqrt{\frac{\left[ GK_{\omega\omega} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EJ_{\omega\omega} \right]^2 - 4J_{\omega\omega} S_r \left[ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 EJ_{\omega\omega} (GK_{\omega\omega} + GJ_d) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 GK_{\omega\omega} \cdot GJ_d \right]}{4J_{\omega\omega}^2 S_r^2}}. \quad (34)$$

$\omega$  共有两个正根, 由此可见, 对于转角  $\theta$  的同一个振动形式, 有两个不同的频率与之相对应。

作为例子, 我们计算了如图 1 所示工字形截面薄壁杆件的扭转振动的频率(尺寸可见图 1), 结果如图 1。于此可见本文结果与解伯民<sup>[311]</sup>的结果是很吻合的。数字计算表

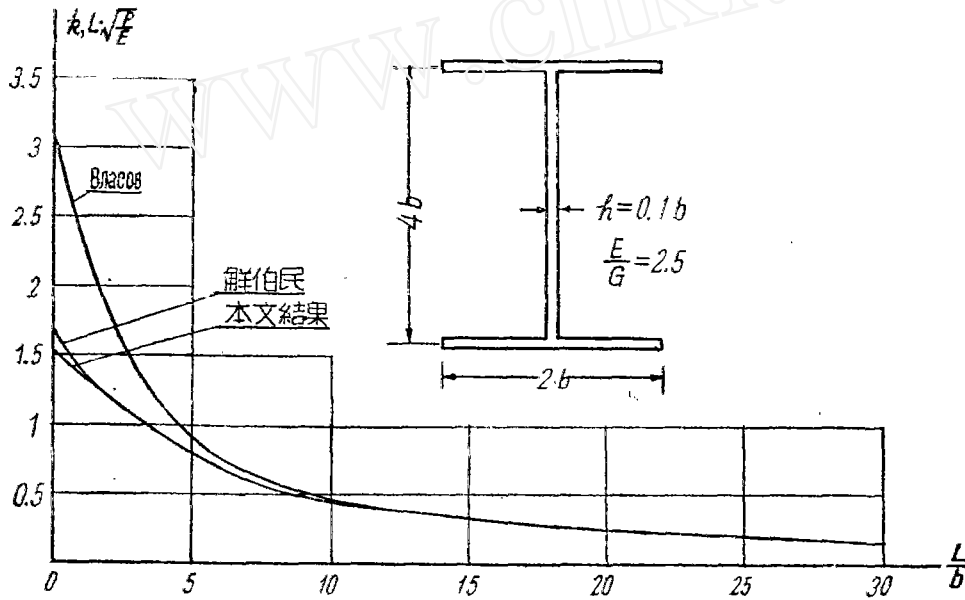


图 1.

1) 文献[3]中图 3 的曲线是有错误的, 在第 267 页后三个条件上尚需加入  $w$  连续的条件, 即

$$X_n'(a)_{B_1A} = X_n'(a)_{B_1A} = X_n'(a)_{OA}, \quad Y_n'(a)_{B_1A} = Y_n'(a)_{B_1A} = Y_n'(a)_{OA}, \quad \Omega_n'(a)_{B_1A} = \Omega_n'(a)_{B_1A} = \Omega_n'(a)_{OA};$$

$$X_n'(-a)_{OC} = X_n'(-a)_{D_1C} = X_n'(-a)_{D_1C}, \quad Y_n'(-a)_{OC} = Y_n'(-a)_{D_1C} = Y_n'(-a)_{D_1C},$$

$$\Omega_n'(-a)_{OC} = \Omega_n'(-a)_{D_1C} = \Omega_n'(-a)_{D_1C}.$$

本文所用的曲线是重新算过的。



明由本文理論算得的頻率低於 B. 3. 符拉索夫的，但一般比解伯民的高，只在  $L/b$  較小時才比解伯民的低。在圖上畫不出它們的區別了。

解伯民的理論是對杆件變形作了一定的限制後推導而得的，其頻率一定比準確值高，本文理論由[4]中的一個變分法得來，不能說由此而得的頻率一定比準確值高。

#### 4. 扭轉振動的傳播速度

方程(30)是用在簡諧振動時的振動方程，而一般的振動方程只要把  $\omega^2$  換成對時間  $t$  的偏導數就可以了。式(30)換好後就如下：

$$GK_{\omega\omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_{\omega}}{\partial z} \right) + GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho S_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (35a)$$

$$EJ_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \psi_{\omega}}{\partial z^2} + GK_{\omega\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_{\omega} \right) - \rho J_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \psi_{\omega}}{\partial t^2} = 0. \quad (35b)$$

我們採用無量綱數如下：

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} &= z \cdot \sqrt{\frac{J_d}{J_{\omega\omega}}}, & \bar{\theta} &= \theta, & \bar{\psi} &= \psi_{\omega} \cdot \sqrt{\frac{J_{\omega\omega}}{J_d}}, \\ \bar{\tau} &= \sqrt{\frac{GJ_d^2}{J_{\omega\omega} \rho S_r}} t, & \alpha &= \frac{K_{\omega\omega}}{J_d}, & \beta &= \frac{EJ_{\omega\omega}}{GJ_d}, & \gamma &= \frac{S_r \cdot K_{\omega\omega}}{J_d^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

於是(35)式變為

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{\tau}^2} = 0, \quad (37a)$$

$$\beta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{z}^2} + \gamma \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{\tau}^2} = 0. \quad (37b)$$

上式中為了簡單起見，把  $\bar{z}$  和  $\bar{\theta}$  仍舊寫為  $z$  和  $\theta$ ，想來不致弄錯。

考慮一半無限長的杆件  $0 \leq z < \infty$  的振動，它原來是靜止不動的，而在  $t \geq 0$  時在端點  $z=0$  上受到某一種擾動。我們採用拉普拉斯變換

$$\theta \dot{=} \Theta = \int_0^{\infty} \theta(z, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad \psi \dot{=} \Psi = \int_0^{\infty} \psi(z, \tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (38)$$

利用初始條件，我們有

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \dot{=} s^2 \Theta, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \dot{=} s^2 \Psi,$$

於是方程(37)變為

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - s^2 \Theta = 0, \quad \beta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \gamma \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Psi \right) - s^2 \Psi = 0. \quad (39)$$

我們來求(39)的這樣一個解：

$$\Theta = \theta_0 \cdot e^{-nz}, \quad \Psi = \psi_0 \cdot e^{-nz}. \quad (40)$$

代入(39)后,就得到

$$\theta_0 \cdot (\alpha n^2 + n^2 - s^2) + \alpha n \psi_0 = 0, \quad -\theta_0 \cdot \gamma n + \psi_0 \cdot (\beta n^2 - \gamma n - s^2) = 0. \quad (41)$$

为了使  $\theta_0$  和  $\psi_0$  不致同时等于零,则它的行列式必须等于零,于是有

$$n^4 \cdot \beta(1+\alpha) - n^2[\gamma + s^2(1+\alpha+\beta)] + s^4 + \gamma s^2 = 0; \quad (42)$$

这方程的根为

$$n = \pm \sqrt{\frac{\gamma + s^2(1+\alpha+\beta) \pm \sqrt{[\gamma + s^2(1+\alpha+\beta)]^2 - 4\beta(1+\alpha)s^2(s^2 + \gamma)}}{2\beta(1+\alpha)}}. \quad (43)$$

我们所需要的只是当  $z \rightarrow \infty$  时等于零的解,因此

$$\theta = \theta_{01} e^{-n_1 z} + \theta_{02} e^{-n_2 z}, \quad \psi = \psi_{01} e^{-n_1 z} + \psi_{02} e^{-n_2 z}. \quad (44)$$

上式中的  $n_1$  和  $n_2$  必须是(43)中在积分路线  $L$  (图2)上满足条件

$$\operatorname{Re} n_1 > 0 \quad \text{和} \quad \operatorname{Re} n_2 > 0 \quad (45)$$

的两个。 $\theta_{01}(s)$  和  $\psi_{01}(s)$  应满足当  $n = n_1$  时的(41)式,  $\theta_{02}(s)$  和  $\psi_{02}(s)$  是(41)的相应于  $n_2$  的解,此外它们还应当满足  $z=0$  处的边界条件。

根据黎曼-梅林转换公式,得

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (46)$$

其中

$$\begin{aligned} \theta_\nu &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \theta_{0\nu}(s) \exp(st - n_\nu z) ds, \\ \psi_\nu &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \psi_{0\nu}(s) \exp(st - n_\nu z) ds, \end{aligned} \quad (\nu=1,2) \quad (47)$$

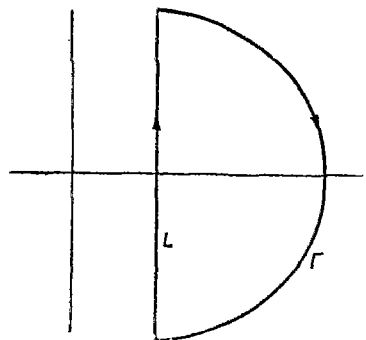


图 2.

$L$  可见图 2.

在  $L$  右边作一个大的半圆  $\Gamma$  如图 2, 因为被积函数在  $L$  右边没有奇点, 所以沿  $L$  的积分和沿  $\Gamma$  的积分相等. 由(43)可知, 当  $|s|$  很大时  $n_1$  的级是  $\frac{s}{c_1}$ ,  $n_2$  的级是  $\frac{s}{c_2}$ , 而

$$c_1 = \sqrt{\beta}, \quad c_2 = \sqrt{1+\alpha}. \quad (48)$$

因此(47)化为

$$\begin{aligned} \theta_\nu &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \theta_{0\nu}(s) \exp s \left( \tau - \frac{z}{c_\nu} \right) \exp \mathcal{E}_\nu z ds, \\ \psi_\nu &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \psi_{0\nu}(s) \exp s \left( \tau - \frac{z}{c_\nu} \right) \exp \mathcal{E}_\nu z ds, \end{aligned} \quad (\nu=1,2) \quad (49)$$

其中

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\nu = 0 \quad (\nu=1,2).$$

由边界条件决定的  $\theta_{0v}(s)$  和  $\psi_{0v}(s)$  总是可以满足这样的—个性質，即当  $|s| \rightarrow \infty$  时，它們一致地趋于零，因此，由約当引理可知：

$$\text{当 } \tau < \frac{z}{c_v} \text{ 时, } \quad \theta_v = \psi_v = 0. \quad (50)$$

这說明有两个波存在，一个以无量綱速度  $c_1$  傳播，而另一个以  $c_2$  傳播。

在求強迫振動时，方程 (35) 应改为

$$\begin{aligned} GK_{\omega\omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} \right) + GJ_a \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho S_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m(z, t) &= 0, \\ EJ_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial z^2} + GK_{\omega\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi_\omega \right) - \rho J_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial t^2} + B(z, t) &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

其中  $m(z, t)$  是分佈力矩， $B(z, t)$  是分佈双力矩。把 (51) 寫成无量綱形式：

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} + \bar{m}(z, \tau), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \gamma \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi \right) + \bar{B}(z, \tau), \quad (52)$$

其中

$$\bar{m} = m \cdot \frac{J_\omega}{GJ_a^2}, \quad \bar{B} = B \cdot \frac{S_r}{GJ_a^2}. \quad (53)$$

我們來求初始条件为零的解，把 (52) 的右边看做波动方程強迫振動的項，可得

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2c_1} \int_0^\tau \int_{z-c_1(\tau-\tau_1)}^{z+c_1(\tau-\tau_1)} \left( \bar{m} - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz d\tau_1, \\ \psi &= \frac{1}{2c_2} \int_0^\tau \int_{z-c_2(\tau-\tau_1)}^{z+c_2(\tau-\tau_1)} \left[ \bar{B} + \gamma \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \psi \right) \right] dz d\tau_1. \end{aligned} \quad (54)$$

这两个方程可用以求数字解答。

### 参 考 文 献

- [1] Власов, В. З., Упругие тонкостенные стержни. Госстройиздат, 1940.
- [2] Heilig, R., Torsions- und Biegeschwingungen von dünnwandigen Trägern mit beliebigen offener Profilform mit Vorlasten. *Ing.-Arch.*, 19(1951), 231-254.
- [3] 解伯民, 彈性薄壁杆件的振動理論. 物理學報, 12 (1956), 261-270.
- [4] 胡海昌, 綫性彈性體振動理論中的两个变分原理(即將發表). 关于彈性體固有頻率的两变分原理. 力学學報 2 (1957), 第 169-183 頁.
- [5] Timoshenko, S., On the correction for shear of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.*, 41(1921), 744-746.
- [6] Филиппов, А. П., Колебания упругих систем. Изд. АН УССР, 1956.
- [7] Уфлянд, Я. С., Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. *Прикл. Мат. и Мех.*, 12(1948), 287-300.

## THE EFFECT OF SHEAR DEFORMATION ON THE VIBRATIONS OF ELASTIC THIN WALLED BEAMS

HAI-CHANG HU and WAN-SHIA TSOON

(Institute of mechanics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

In this paper, a theory is proposed for the vibrations of elastic thin walled beams of open cross sections, where the effect of shear deformation is approximately taken into account. The theory is based on the following assumptions:

1) The transverse cross section of the beam is rigid. Therefore its motion may be defined by the deflections  $\xi(z, t)$ ,  $\eta(z, t)$  and the angle of torsion  $\theta(z, t)$  about the center of twist.

2) The longitudinal displacement  $w(z, s, t)$  and the longitudinal normal stress  $\sigma(z, s, t)$  have the following four terms expressions:

$$w(z, s, t) = U(z, t) + x\psi_x(z, t) + y\psi_y(z, t) + \omega\psi_\omega(z, t), \quad (2)$$

$$\sigma(z, s, t) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_{xx}}x + \frac{M_x}{J_{yy}}y + \frac{B}{J_{\omega\omega}}\omega. \quad (6)$$

3) The mean value of the shearing stress across the thickness of beam has the following three terms expression:

$$\tau(z, s, t) = -\frac{S_x}{J_{xx}h}Q_x - \frac{S_y}{J_{yy}h}Q_y - \frac{S_\omega}{J_{\omega\omega}h}K. \quad (7)$$

4) The effect of non-uniform shearing stress distribution may be counted for by introducing a twisting moment:

$$M_z = GJ_d \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (5)$$

Then the stress deformation relations, equations of motion, and boundary conditions are derived from a variational principle of reference [4]. The final equations are Eqs. (24), (26), (21).

In the case of beams having two planes of symmetry, the above equations may be divided into three sets. The two sets for the flexural vibrations are identical with the theory of S. Timoshenko<sup>[6]</sup>. The other set is for the torsional vibrations of the beam. The frequencies of the torsional vibrations of symmetrical I-beams are calculated. It appears that our results almost coincide with the results according to the theory of Shi Po-Ming<sup>[3]</sup>.