

曲綫叶柵的繞流問題*

林 同 驥

(中國科學院力學研究所)

1. 引 言

关于一般叶柵的繞流問題，現有的許多解法，如格利克 (Garrick, J. E.)^{[1], [2]}、馬特波尔 (Mutterperl, W.)^[2] 和波略霍夫 (Поляхов, Н. Н.)^[3] 等法，都以直綫叶柵的繞流問題為基礎。這些方法有個共同缺點，就是當葉片彎度較大時，計算甚繁而不準確。針對這個缺點，本文給出一系列曲綫叶柵的準確解，所用的保角變換和一般直綫叶柵的保角變換一樣簡單，可用來代替上述各法中的直綫叶柵部分，使它們適合於彎度較大的葉片；因為變換簡單，同時又有四個參數，故可用來調整葉柵的稠度、柵角以及葉片的進出口角度。本方法可用來計算葉柵中葉片的相互位置和形狀，尤其是彎度對於葉柵性能的影響，同時這些準確解可用來鑑定渦旋分佈法所給曲綫叶柵近似解^[4] 的準確度。我們應當指出：本方法所給的曲綫叶柵當稠度較大時，柵角有一定限度，所以只適用於柵角較小的葉片，如沖擊式葉片或導向葉片等。

利用保角變換法來解決葉柵的繞流問題，一般分為三大類：第一類是單個圓法^{[1], [6]} 把葉柵的繞流問題映像為單個圓的繞流問題；第二類是同心圓法^[6]，把葉柵的繞流問題映像為兩個同心圓所包的環狀區域內的流動；第三類是一排圓法^{[7], [8]}，將葉柵映像為一排圓。本文處理曲綫葉柵的方法屬於第一類，即將曲綫葉柵映像為單個圓，和一般直綫葉柵的保角變換相似，在單個圓的平面上圓外有兩個奇點，各相當於葉柵平面上的正負無限遠。這類單個圓的繞流問題早已解決^{[1], [6]}，所以本文的重點在找出曲綫葉柵與單個圓之間的保角變換。

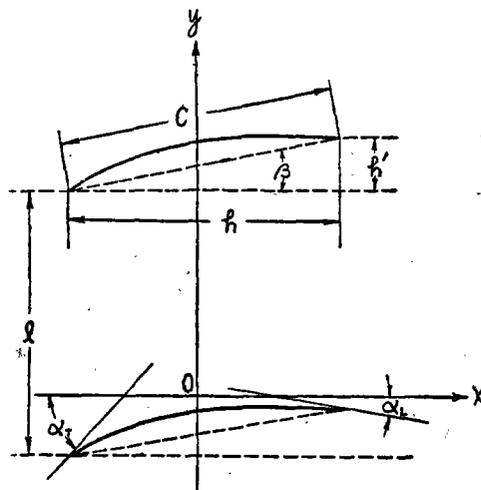


圖 1. z 面，曲綫葉柵

* 1956年11月12日收到。

1) 方括弧內的數字系指參考文獻(見本文末)的號碼。

2. 保角变换

讓我們分析下列的保角变换:

$$z = \frac{l}{2\pi} \left(\ln \frac{p_1+p}{p_2-p} + \ln \frac{p+1/p_1}{p-1/p_2} \right), \quad (1)$$

式中 z 和 p 都是复变数, p_1 和 p_2 是复常数, l 是实常数. 令

$$p = e^{\zeta}, \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad (2)$$

$$p_n = e^{\zeta_n}, \quad \zeta_n = \xi_n + i\eta_n \quad (n=1,2), \quad (3)$$

則 (1) 式可寫成:

$$z = \frac{l}{2\pi} \left(\ln \frac{\cosh \zeta_1 + \cosh \zeta}{\cosh \zeta_2 - \cosh \zeta} \right). \quad (4)$$

令

$$z = x + iy, \quad (5)$$

$$\cosh \zeta_n = a_n + ib_n \quad (n=1,2). \quad (6)$$

由 (4) 式分开实数和虚数部分:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{l} &= \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{(a_1 + \cosh \xi \cos \eta)^2 + (b_1 + \sinh \xi \sin \eta)^2}{(a_2 - \cosh \xi \cos \eta)^2 + (b_2 - \sinh \xi \sin \eta)^2} \right], \\ \frac{y}{l} &= \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{b_1 + \sinh \xi \sin \eta}{a_1 + \cosh \xi \cos \eta} - \tan^{-1} \frac{b_2 - \sinh \xi \sin \eta}{a_2 - \cosh \xi \cos \eta} \right] + n, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 n 为零或任一整数. 当 $\xi=0$ 时, 从式 (2) 可看出, 在 p 面上是个单位圆, 圆心位于原点上; 同样地令 $\xi=0$, 从 (7) 式得叶片的坐标 x_b 和 y_b 如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_b}{l} &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(a_1 + \cos \eta)^2 + b_1^2}{(a_2 - \cos \eta)^2 + b_2^2}, \\ \frac{y_b}{l} &= \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{b_1}{a_1 + \cos \eta} - \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2 - \cos \eta} \right] + n, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

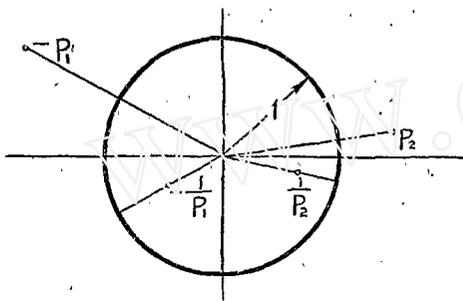
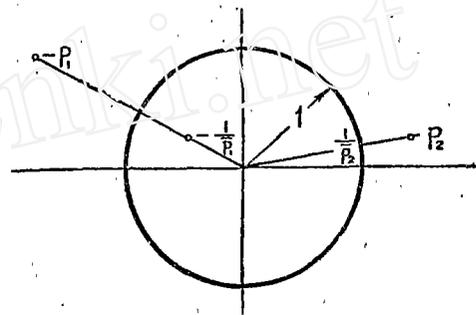
式中 n 为零或任一整数. 从 (8) 式可以看出 x_b 和 y_b 都是 $\cos \eta$ 的函数, 因为 $\cos \eta = \cos(2\pi - \eta)$, 所以 $x_b(\eta) = x_b(2\pi - \eta)$, $y_b(\eta) = y_b(2\pi - \eta)$. 因此, 当 η 从 0 变到 π 时, x_b 和 y_b 在 z 面上画出一曲线; 当 η 从 π 变到 2π 时, x_b 和 y_b 在 z 面上沿原曲线画回, 这双迭曲线就是我们的叶片. 再依 n 的数值不同, 就在 z 面上出现栅距为 l 的一串曲线叶片, 叶片的进出口角度以及叶栅的稠度和栅角则由 a_1, a_2, b_1, b_2 四个参数来调整.

在讨论叶片的相互位置和几何形状以前, 讓我們先找出变换式 (1) 的奇点. 將式 (1) 对 p 微分, 得

$$\frac{dz}{dp} = \frac{l}{2\pi} \frac{[(p_1+1/p_1) + (p_2+1/p_2)](p^2-1)}{(p_1+p)(p_2-p)(p+1/p_1)(p-1/p_2)}, \quad (9)$$

上式中的零点分别位于 $p = \pm 1$ 和 $\pm \infty$. 此外还有四个极点, 分别位于 $p = -p_1, p_2, -1/p_1, 1/p_2$. $p = \pm 1$ 相当于叶栅平面上曲线叶片的前后缘, $p = \pm \infty$ 相当于叶栅平面

上 $z = il \left(n \pm \frac{1}{2} \right)$ 的一串點。假設 p_1 和 p_2 的絕對值都大於 1, 則極點 $p = -p_1$ 和 $p = p_2$ 位於 p 面上以原點為圓心的單位圓外, 這兩點各相當於葉柵平面上的正負無限遠。極點 $p = -1/p_1$ 和 $p = 1/p_2$ 位於單位圓內(圖 2), 相當於葉柵平面以外的兩點。要留意的是, 對 p 面的單位圓來講, $-1/p_1$ 和 $1/p_2$ 並不是 $-p_1$ 和 p_2 的共軛點, 後者應為 $-1/\bar{p}_1$ 和 $1/\bar{p}_2$ 。我們在式(1)中將奇點放在 $-1/p_1$ 和 $1/p_2$ 為的是要保證 x_b 和 y_b 都成為 $\cos \eta$ 的函數, 使在 z 面上出現的是雙曲綫, 而不是 8 字形或其他有厚度的截面。

圖 2. p 面, 圖示保角變換的奇點圖 3. p 面, 圖示位流的奇點

p 面上以原點為中心的單位圓相當於 z 面上的葉片, 所以這單位圓是個流綫。在討論 p 面上單位圓外的流速分佈時(圖 3), 只要考慮到圓外的兩奇點 $p = -p_1$ 和 $p = p_2$, 維持這個單位圓是個流綫; 至於變換式(1)在圓內的奇點, 如 $p = -1/p_1$ 和 $p = 1/p_2$ 可以不予考慮, 因為變換式(1)在圓內的奇點, 只影響 p 面和 z 面間的關係, 但不影響 p 面上單位圓外的流速分佈。

3. 葉片的相互位置和形狀

現在讓我們討論葉柵中葉片的相互位置和形狀。曲綫葉柵中各葉片的坐標 x_b 和 y_b 已見(8)式, 將它們分別對 η 微分, 再將其結果相除, 即得葉片上任何一點的斜度:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_b = \frac{b_1[(a_2 - \cos \eta)^2 + b_2^2] + b_2[(a_1 + \cos \eta)^2 + b_1^2]}{(a_1 + \cos \eta)[(a_2 - \cos \eta)^2 + b_2^2] + (a_2 - \cos \eta)[(a_1 + \cos \eta)^2 + b_1^2]} \quad (10)$$

設氣流由右向左流動, 則葉片的前緣位於右側尖端 $\eta = 0$ 處。從(8)和(10)式, 令 $\eta = 0$, 得葉片前緣點的坐標 x_L , y_L 和進口角的斜度 $\left(\frac{dy}{dx} \right)_L$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_L}{l} &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(a_1 + 1)^2 + b_1^2}{(a_2 - 1)^2 + b_2^2}, \\ \frac{y_L}{l} &= \frac{1}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{b_1}{a_1 + 1} - \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2 - 1} \right); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_r = \frac{b_1[(a_2-1)^2+b_2^2]+b_2[(a_1+1)^2+b_1^2]}{(a_1+1)[(a_2-1)^2+b_2^2]+(a_2-1)[(a_1+1)^2+b_1^2]} \quad (12)$$

同样地在后缘点上 $\eta=\pi$, 从 (8) 和 (10) 式得后缘点的坐标 x_T, y_T 和出口角的斜度

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_T$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_T}{l} &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(a_1-1)^2+b_1^2}{(a_2+1)^2+b_2^2}, \\ \frac{y_T}{l} &= \frac{1}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{b_1}{a_1-1} - \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2+1} \right); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_T = \frac{b_1[(a_2+1)^2+b_2^2]+b_2[(a_1-1)^2+b_1^2]}{(a_1-1)[(a_2+1)^2+b_2^2]+(a_2+1)[(a_1-1)^2+b_1^2]} \quad (14)$$

从 (11) 和 (13) 式得叶片前后缘的水平距离 h 和垂直距离 h' 如下:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(a_1-1)^2+b_1^2][(a_2+1)^2+b_2^2]}{[(a_1-1)^2+b_1^2][(a_2-1)^2+b_2^2]}, \\ \frac{h'}{l} &= \frac{1}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{b_1}{a_1+1} - \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1-1} + \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2+1} - \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2-1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

叶片的弦长为

$$c = (h^2 + h'^2)^{1/2}; \quad (16)$$

弦和 x 轴所成的角度, 即叶栅的栅角为

$$\beta = \tan^{-1} \frac{h'}{h}; \quad (17)$$

叶栅的稠度 $\sigma = c/l$, 从 (16) 式得

$$\sigma = \left[\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \left(\frac{h'}{l}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (18)$$

一般情况下, 我们可以利用 a_1, a_2, b_1, b_2 等四个参数来调整叶栅的稠度和栅角, 以及叶片的进出口角度. 为简单起见, 我们只讨论下列几个特殊情况:

(1) 直线叶栅

当 $\eta_1 = \eta_2 = 0$ 时, 从式 (6) 得 $b_1 = b_2 = 0$, 因此 (8) 式简化为

$$\frac{x_b}{l} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_1 + \cos \eta}{a_2 - \cos \eta}, \quad \frac{y_b}{l} = n, \quad (19)$$

式中 n 为奇或任一整数. 这是一串直线叶片, 每两相邻叶片间的距离为 l , 栅角为零, 稠度为

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(a_1+1)(a_2+1)}{(a_1-1)(a_2-1)}. \quad (20)$$

当 $a_1 = a_2$ 时, 式 (20) 可简化为

$$a = \coth \frac{\sigma\pi}{2}. \quad (21)$$

(2) 对称曲綫叶柵

当 $\xi_1 = \xi_2$, 并 $\eta_1 = -\eta_2$ 时, 从 (6) 式得 $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$. 令 $a_1 = a_2 = a, b_1 = -b_2 = b$, (8) 和 (10) 式简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_b}{l} &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(a + \cos \eta)^2 + b^2}{(a - \cos \eta)^2 + b^2}, \\ \frac{y_b}{l} &= \frac{-1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2ab}{a^2 - b^2 - \cos^2 \eta}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_b = \frac{2b \cos \eta}{a^2 + b^2 - \cos^2 \eta}. \quad (23)$$

当 η 从 0 变到 2π , (22) 式在 z 面上画出一串曲綫叶片, 这些叶片以 y 轴为对称轴, $\eta = 0, \pi$ 及 $\pm\pi/2$ 各相当于叶片的前后緣及中心点. 从 (22) 及 (23) 式得叶片的中心点与叶弦的距离 t 和叶片的進口角 α_L 如下:

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)}, \quad (24)$$

$$\alpha_L = \tan^{-1} \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1}. \quad (25)$$

因为对称关系, 叶片出口角 α_T 与進口角 α_L 大小相等、符号相反. 从 (22) 式可求得叶柵的稠度

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(a+1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2}. \quad (26)$$

以上各式系给出了参数 a 和 b , 来求 t, α_L 或 σ . 如果已知叶柵的稠度和叶片的進口角, 要求和它們相当的参数 a 和 b , 我們須將 a, b 寫成 σ 和 α_L 的函数, (26) 式可改寫为

$$b^2 = 2a \coth \sigma\pi - a^2 - 1. \quad (27)$$

从 (25) 和 (27) 式消去 b 或 a , 得

$$a = \frac{\sinh \sigma\pi}{\cosh \sigma\pi - \cos \alpha_L}, \quad b = \frac{\sin \alpha_L}{\cosh \sigma\pi - \cos \alpha_L}. \quad (28)$$

在各种稠度下, 参数 a 和 b 与叶片進口角 α_L 的关系見圖 4 和 5.

代 (28) 式入 (24) 式, 得 t/l 作为 σ 和 α_L 的函数:

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sin \alpha_L \sinh \sigma\pi}{1 + \cos \alpha_L \cosh \sigma\pi}. \quad (29)$$

从 (29) 式可算出各种稠度下 t/l 与叶片進口角 α_L 的关系, 結果見圖 6.

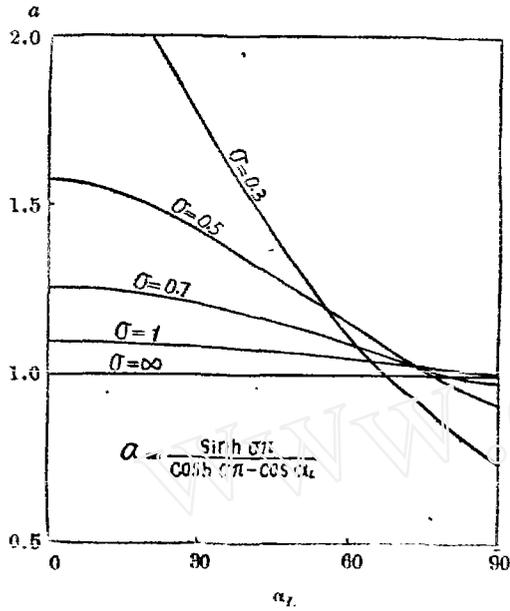


图4. 各个稠度下参数 a 和进口角 α_L 的关系

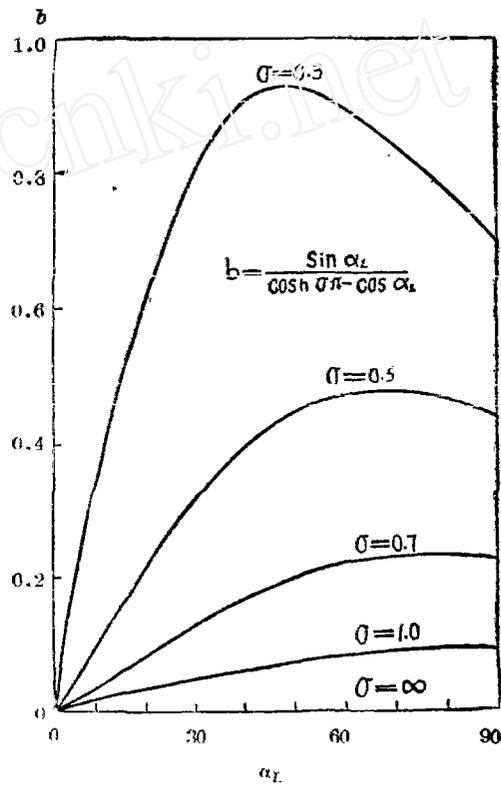


图5. 各个稠度下参数 b 和进口角 α_L 的关系

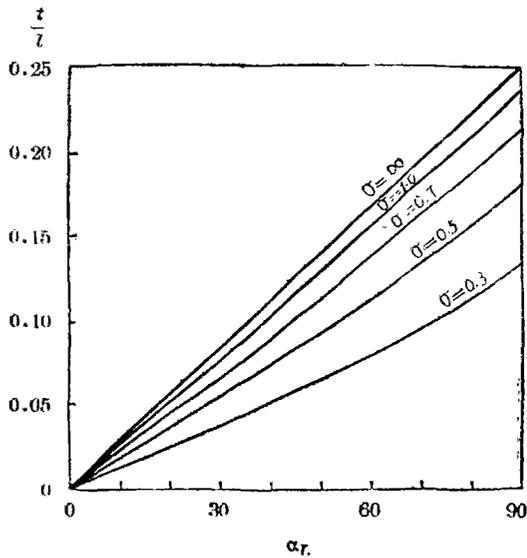


图6. 各个稠度下 t/l 和进口角 α_L 的关系

給出了叶柵的稠度 σ 和叶片的進气角 α_L ，我們可以从圖 4 和 5 查出相当的 a 和 b 的值。把它們代入(22)式，可算出叶片的形狀。在圖 7 中，我們給出 $\sigma=1$ ， α_L 各为 30° ， 45° 和 60° 的对称曲綫叶片；同时也給出 $\sigma=0.7$ ， $\alpha_L=60^\circ$ 的对称曲綫叶片作为参考。

从(6)式可求得 ξ_1 和 η_1 与 a_1 和 b_1 的关系。利用(28)式，因为 $a_1=a$ ， $b_1=b$ ，可將 ξ_1 和 η_1 寫成 σ 和 α_L 的函数：

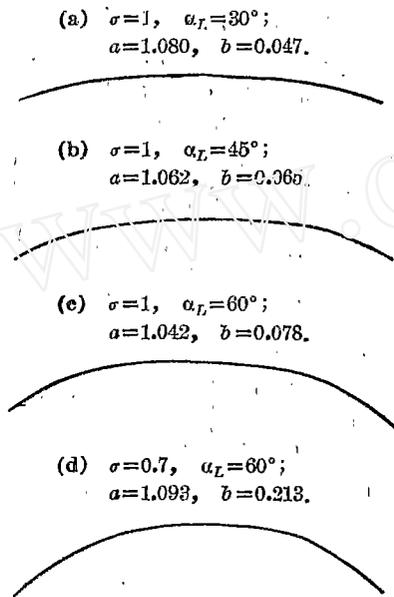


圖 7. 一些曲綫叶柵的对称叶片

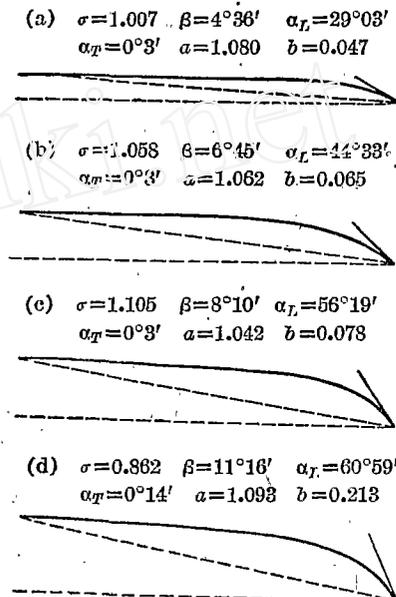


圖 8. 一些曲綫叶柵的叶片

$$\sinh^2 \xi_1 = \frac{1 + \cos \alpha_L}{\cos \sigma \pi - \cos \alpha_L}, \quad \sin^2 \eta_1 = \frac{1 - \cos \alpha_L}{\cosh \sigma \pi - \cos \alpha_L}. \quad (30)$$

这样給出了叶柵的稠度和叶片的進口角，我們就可以直接算出 ξ_1 和 η_1 的值：把它們代入(3)式，即得 p 面上奇点的位置。从(30)式得

$$\tan \frac{\alpha_L}{2} = \frac{\sin \eta_1}{\sinh \xi_1}, \quad \tanh \frac{\sigma \pi}{2} = \frac{\cos \eta_1}{\cosh \xi_1}. \quad (31)$$

从(31)式可看出，当 $0 \leq \eta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ 时， η_1 愈大或 ξ_1 愈小，則 α_L 愈大； η_1 或 ξ_1 愈小，則 σ 愈大。

(3) 不对称曲綫叶柵

一般情况下，只要 a_1 不等于 a_2 ，或 b_1 不等于 b_2 ，(8)式所給的曲綫叶柵都是不对称的。为簡單起见，我們只討論一个特殊情况，即

$$a_1 = a_2 = a, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = b. \quad (32)$$

在这种情况下, (8) 式简化为

$$\frac{x_b}{l} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(a + \cos \eta)^2}{(a - \cos \eta)^2 + b^2}, \quad \frac{y_b}{l} = -\frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{b}{a - \cos \eta} + n, \quad (33)$$

式中 n 为任一整数; 同样地, 叶片的斜度 (10) 式简化为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_b = \frac{b(a + \cos \eta)}{2a(a - \cos \eta) + b^2}. \quad (34)$$

从 (33) 式令 $\eta=0$ 和 π , 得叶片进口角 α_L 和出口角 α_T (圖 1):

$$\alpha_L = \alpha_1 - \alpha_3, \quad \alpha_T = \alpha_2 - \alpha_3, \quad (35)$$

式中

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \frac{b}{a-1}, \quad \alpha_2 = \tan^{-1} \frac{b}{a+1}, \quad \alpha_3 = \tan^{-1} \frac{b}{2a}. \quad (36)$$

代 (32) 式入 (15) 式 并利用 (17)、(18) 和 (35) 式, 得栅角及叶栅稠度:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\ln \tan \alpha_1 - \ln \tan \alpha_2 + \ln \sin \alpha_1 - \ln \sin \alpha_2}, \quad (37)$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\ln \tan \alpha_1 - \ln \tan \alpha_2 + \ln \sin \alpha_1 - \ln \sin \alpha_2)^2]^{1/2}. \quad (38)$$

所以给出了 a 和 b , 我們就可以从 (36) 式算出 α_1 , α_2 和 α_3 ; 將它們代入 (35), (37) 和 (38) 式, 即得叶片的进出口角 α_L , α_T 和叶栅栅角 β 及稠度 σ . 在圖 8 中, 我們給出一系列不对称曲线叶片. 为便于比較, 这些叶片的参数 a , b 和圖 7 中各对称叶片的参数相等. 如果给出了 α_1 和 α_2 , 我們可利用 (36) 式將 a , b 和 α_3 寫成 α_1 和 α_2 的函数如下:

$$a = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}, \quad b = \frac{2 \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}, \quad (39)$$

$$\cot \alpha_3 = \cot \alpha_1 - \cot \alpha_2. \quad (40)$$

这样就可以直接算出它們的值. 再由 (33) 式求出叶片的形状, 由 (37) 和 (38) 式求出栅角和稠度.

4. 流速分布和升力

我們已有 (1) 式將 z 面上的曲线叶栅映像为 p 面上的单个单位圆. 为求叶栅面上的流速分佈, 我們只要求 p 面上的流速分佈. 在 p 面上, 单位圆是个流綫, 利用 $p = -p_1$ 和 p_2 与它們的共轭点 $p = -1/\bar{p}_1$ 和 $1/\bar{p}_2$ 上的源漂和渦旋, 我們可將 p 面上的复位函数 $\Omega(p)$ 寫成

$$\Omega(p) = -\frac{\Gamma l}{2\pi} \left(e^{i\alpha} \ln \frac{p_1 + p}{p_2 - p} + e^{-i\alpha} \ln \frac{p + 1/\bar{p}_1}{p - 1/\bar{p}_2} \right) - \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln \frac{(p + 1/\bar{p}_1)(p - 1/\bar{p}_2)}{(p_1 + p)(p_2 - p)}. \quad (41)$$

式中 V, α, Γ 都是实常数. 当 $p=e^{i\eta}$ 时, Ω 的虚数部分不依变于 η , 所以 p 面上的單位圓是一流綫. 設 u, v 为 z 面上流体沿 x 及 y 軸的分速, 并令 $w=u-iv$, 則

$$w = \frac{d\Omega}{dz} = \frac{d\Omega}{dp} \left/ \frac{dz}{dp} \right. \quad (42)$$

上式中的微分系数可由 (41) 及 (1) 式求得. 当 $z=\infty$ 时, $p=p_2$. 由 (41), (1) 及 (42) 式, 得

$$w_{z=\infty} = -V e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2l},$$

即

$$u_{\infty} = -V \cos \alpha, \quad v_{\infty} = +V \sin \alpha + \frac{\Gamma}{2l}. \quad (43)$$

同样地, 当 $z=-\infty$ 时, $p=-p_1$,

$$w_{z=-\infty} = -V e^{i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2l};$$

即

$$u_{-\infty} = -V \cos \alpha, \quad v_{-\infty} = V \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2l}. \quad (44)$$

由上两式可見, z 面上正負无限远处的平均流速的絕對值为 V , 它与 x 軸所成的角度为 $\pi - \alpha$.

环量 Γ 的值由庫塔-儒可夫斯基的条件來決定, 即在叶片后緣点 $p=-1$ 上, $\frac{d\Omega}{dp} = 0$, 利用这条件由 (41) 式得

$$\frac{\Gamma}{2Vl} = \frac{\frac{\sin \alpha \sinh \xi_1 - \cos \alpha \sin \eta_1}{\cosh \xi_1 - \cos \eta_1} - \frac{\sin \alpha \sinh \xi_2 + \cos \alpha \sin \eta_2}{\cosh \xi_2 + \cos \eta_2}}{\frac{\sinh \xi_1}{\cosh \xi_1 - \cos \eta_1} + \frac{\sinh \xi_2}{\cosh \xi_2 + \cos \eta_2}}. \quad (45)$$

(45) 式系一般公式. 如果是对称曲綫叶片, $\xi_1 = \xi_2$, $\eta_1 = -\eta_2$, 利用 (31) 式, (45) 式簡化为

$$\frac{\Gamma}{2Vl} = \left(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \frac{\alpha_L}{2} \right) \tanh \frac{\sigma\pi}{2}. \quad (46)$$

(46) 式給出对称曲綫叶柵的环量 Γ 和稠度 σ , 進口角度 α_L 以及冲角 α 的关系.

如果 F_x 和 F_y 代表作用于叶片上沿 x 和 y 方向的分力, 并令 $F = F_x - iF_y$, 則布拉西烏斯 (Blasius, H.)^[1] 公式可寫为

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{d\Omega}{dp} \right)^2 \frac{dp}{dz} dp, \quad (47)$$

式中 ρ 为流体的密度. 这积分沿着單位圓 $p=e^{i\eta}$ 依反时針方向積一圈, (47) 式不难証

明,只須記住叶片橫截面边界綫是个流綫,即在(47)式中,

$$(u-iv)(dx+idy)=(u+iv)(dx-idy), \quad (48)$$

从(41)和(1)式求得 $\frac{d\Omega}{dp}$ 和 $\frac{dp}{dz}$,代入(47)式后,可看出:(47)式中被積函数

在單位圓內、圓上和圓外,各有两个極点,它們分別位于 $p = -\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \pm 1, -p_1$ 和 p_2

处.在單位圓上的两个極点应包括在積分时所沿之單位圓內,所以这積分可簡化为求前四个極点的留数,或求圓外两个極点的留数,結果得到

$$\begin{aligned} \text{即} \quad F &= i\rho V \Gamma e^{i\alpha}, \\ F_x &= \rho V \Gamma \sin \alpha, \quad F_y = \rho V \Gamma \cos \alpha. \end{aligned} \quad (49)$$

这和一般直綫叶棚的結果相似,但式中 Γ 的值則由(45)式給出,从(45)式可看出,在一般情况下,当 $\alpha=0$ 时, Γ 并不为零,因为叶片的弯曲,当來流和叶弦平行时仍可有升力,正如同我們所想象地一样,从(46)式可看出,当

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} \quad (50)$$

时,曲綫叶棚的环量 Γ 及升力皆为零.

5. 結 論

本文給出一系列曲綫叶棚的准确解,式中包含四个参数,可用來調整叶棚的稠度、棚角以及叶片的進口角和出口角.

本文所給的曲綫叶棚可用來代替格利克^[1]、馬特波尔^[2]和波略霍夫等法中的直綫叶棚部分,使它們适合于弯度較大的叶片.

本文所給的曲綫叶棚,当稠度較大时,棚角有一定限度,所以只适用于棚角較小的叶片,如冲击式叶片或導向叶片等.

本文所給的曲綫叶棚,它的叶片的進出口角度可以从0变到 π ;一般情况下从0到 $\pi/2$ 已够用,所以本文圖4、圖5和圖6中所給的 α_1 只从0到 $\pi/2$.

ρ 面上的奇点距單位圓愈近,或奇点的坐标的幅角愈大,則叶片的弯度愈大, ρ 面上的奇点距單位圓愈远,或奇点的坐标的幅角愈小,則叶棚的稠度愈大.

参 考 文 献

- [1] Garrick, L.E., On the plane potential flow past a lattice of arbitrary cascades of airfoils, *NACA ARR*, 4A07, 1944.
- [2] Mütterer, W., A solution of the direct and inverse potential problems for arbitrary cascades of airfoils, *NACA ARR LTR* 22b, 1944.
- [3] Цолахов, Н.Н., Обтекание решеток профилей, *ДАН*, **34**, 233—236, 1952.

- [4] Pistoiesi, E., Sul calcolo di schiere infinite di ali Sottili, *Publicazion della R. Scuola d'Ingegneria di pise*, No. 323, Sept. 1937; 或英譯本 On the calculation of flow past an infinite screen of Thin Airfoils, *NACA*, TM. No. 968, 1941.
- [5] Kawada, S., A contribution to the theory of latticed wings, *Proc. 3rd International Congress for Applied Mechanics*, vol. 1, pp. 393-402, 1930.
- [6] Spraglin, W. E., Flow through cascades in tandem, *NACA*, TN. 2393, 1951; 或 Shirakura, M., A theory on cascades built up of arbitrary blade sections, 1954.
- [7] Кочин, Н. Е., Влияние шага решетки на ее гидродинамические характеристики, *Прикл. Матем. Мех.*, 1941.
- [8] Самойлович, Г.С., Расчет гидродинамических решеток, *Прикл. Матем. Мех.*, 14, 121-133, 1950.
- [9] Blasius, H., Stromfunktionen für die strömung durch Turbinenschaufeln, *Z. Math. Phys.*, 60 354-372, 1912.

ON THE PLANE POTENTIAL FLOW PAST A LATTICE OF CURVED LINE CASCADES

TUNG-CHI LIN

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Methods for solving plane potential flow past a lattice of arbitrary cascades of airfoils have been given by various investigators, notably, Garrick [1]*, Mütterperl [2], and Полухов [3]. As all these methods are based on the solution of the straight line cascades, they have the drawback that the process becomes laborious for high cambered blades. To overcome this difficulty, it is suggested, in the present paper, that the part of the straight line cascades used in the above mentioned methods may be replaced by curved line cascades. To achieve this end, a simple and exact solution for plane potential flow past a lattice of curved line cascades is established. This solution contains four parameters, which can be used to adjust the inlet and the outlet angles of the blades and the solidity and the angle of the cascades.

* Numbers in parentheses refer to Bibliography at end of paper.