第13卷 第5期　　物 理 学 报　　Vol. 13, No. 5
1957年9月　　ACTA PHYSICA SINICA　　September, 1957

泥沙在动水中的沉淀运动(一)*

圓球在流体中运动时所受的阻力

蔡 樹 棠

(中国科学院力学研究所)

提　要

在河道动力学中，一般在討論泥沙和水的相对速度时，都应用斯篤克斯公式．但是这样一个假定是没有經过严格証明的，它的正确性必須仔細地加以討論．本文根据流体力学的基本理論討論了一个小球在不均匀流場中运动时候的情况．在討論的时候，我們引进了兩个基本假定：（1）圓球直徑和流場的綫性尺度比較起来小得很多；（2）水和圓球的相对速度很小．有了这兩个假定以后，我們就可以把运动方程式綫性化，然后再利用拉普拉斯轉換找出綫性化以后的方程式的解．最后得到小球在非均匀流場中运动时所受到的阻力．

一．引　　言

在河道动力学[1]中，一般在討論泥沙和水的相对速度时，都应用斯篤克斯公式，認为相对速度就是按照斯篤克斯公式所給出的常数値，但是这样一个假設是并没有經过严格証明的，它的正确性必須仔細地加以討論．在前兩篇文章[2]里，我們討論了泥沙在靜水中的沉淀运动，得出了在靜水中沉淀的情形里对斯篤克斯公式的修正項．为了进一步研究动水中的泥沙的沉淀运动，作者在本文中根据流体动力学的基本理論研究了圓球在一般流动中运动时所受到的阻力，并且得到了阻力公式．根据这一个阻力公式，我們就可以討論动水中泥沙和水的相对速度以及了解动水中泥沙沉淀的規律．

二．阻力公式的推導

(一)速度和阻力的划分

假設在空間里有一个由粘性流体所構成的流場，流場中流体的速度和压力等流体力学量是由流动的初始条件和流体周圍的边界条件所确定．假設我們現在在流場中放进一个半徑为 a 的小球，而把流体周圍的边界条件和距离小球中心較远的地方流动的初始条件保持不变，我們就得到一个新的流动狀态．現在我們采用笛卡兒張量符号来

* 1957年3月27日收到．

描写运动，并且取和小球中心一起运动的坐标系作为参考系，把原点取在小球中心．我們設小球的移动速度为 v_i，小球的轉动角速度为 ω_{ij}．我們現在写出沒有小球时候，流体質点的运动方程式和連續方程式

$$\frac{\partial u_i^0}{\partial t}+u_\alpha^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_\alpha}+\frac{dv_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^0}{\partial x_i}+\nu\nabla^2u_i^0-g_i, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i^0}{\partial x_i}=0, \tag{2}$$

式中 u_i^0 表示沒有小球时候流場中流体質点相对于运动坐标系的相对速度；p^0 是流体中間的压力；ρ 是流体的密度；ν 是流体的运动粘滯率；g_i 是重力加速度．現在流場中有了一个小球以后，整个流場就有了改变．如果用 u_i 代表有小球以后流場中流体質点相对于运动坐标系的相对速度，我們就可以写出有小球以后流場中流体質点所适合的运动方程式和連續方程式：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}+\frac{dv_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2u_i-g_i, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0. \tag{4}$$

令 $u_i-u_i^0=W_i, p-p^0=\varpi$，我們从（3）式中减去（1）式，从（4）式中减去（2）式，就得到下列兩个方程式：

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial W_i}{\partial x_\alpha}+W_\alpha\frac{\partial u_i^0}{\partial x_\alpha}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\nu\nabla^2W_i, \tag{5}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial x_i}=0. \tag{6}$$

假定流場中流体質点相对于小球中心的相对速度很小，我們就可以把（5）式中的非綫性項略去，（5）式就簡化成

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\nu\nabla^2W_i. \tag{7}$$

現在来討論 W_i 所要满足的初始条件和边界条件．我們先討論初始条件：假設在 $t=0$ 时，有小球时候，小球以外的流場中流体質点的速度和沒有小球时候流体質点的速度相同，我們就有在小球以外流体質点的速度的初始条件：

在 $t=0$ 时候，　　$W_i=0.$　　(8)

其次，我們来討論 W_i 所适合的边界条件．在無穷远处，小球所产生的扰动速度应該等于零．所以我們就得到在無穷远处的边界条件：

在無穷远处，　　$W_i=0.$　　(9)

在球面上的边界条件，由于流体是具有粘性的，因此球表面上流体質点的速度等于球面上質点的轉动速度．所以球面上的边界条件是：

在球面上，　　$u_i=\omega_{ij}x_j$；　　(10)

(10)式可以改写成下列形式:

在球面上, $$W_i=\omega_{ij}x_j-u_i^0. \tag{10'}$$

现在把 u_i^0 在坐标原点处展开,

$$u_i^0=\alpha_i+\alpha_{ij}x_j+\alpha_{ijk}x_jx_k+O\left(\frac{a^3}{L^3}\right),$$

式中 α_i, α_{ij}, α_{ijk}, 是展开式的系数,都是时間 t 的函数;L 表示流場中流动的綫性尺度;$O\left(\frac{a^3}{L^3}\right)$ 表示次数不低于 $\left(\frac{a}{L}\right)^3$ 的余下各項的总和. 因为球半徑 a 和流場中流动的綫性尺度比較起来小得很多,略去 $\frac{a}{L}$ 三次以上各項,就得到

$$u_i^0=\alpha_i+\alpha_{ij}x_j+\alpha_{ijk}x_jx_k. \tag{11}$$

从連續方程式(2),我們知道 α_{ij} 和 α_{ijk} 必須滿足下列的关系式:

$$\alpha_{jj}=0, \qquad \alpha_{jjk}=0. \tag{12}$$

除此而外,由于 u_i^0 还需要滿足运动方程式(1),所以上面的 α_i, α_{ij}, α_{ijk} 等还必須滿足另外一些动力学条件. 將(11)式代入(10'),我們得到在球面上的边界条件的最后形式:

在球面上, $$W_i=-\alpha_i+(\omega_{ij}-\alpha_{ij})x_j-\alpha_{ijk}x_jx_k. \tag{13}$$

我們現在的問題归結为在初始条件(8),边界条件(9)和(13)的情况下来解联立方程式(6)和(7).

現在进一步来討論上面所提出的問題. 利用綫性方程式的解的疊加原则,我們把 W_i 分成下列三部分:

$$W_i=u_i'+u_i''+u_i'''. \tag{14}$$

我們使这三部分各自滿足下列的方程式,初始条件和边界条件:

1. u_i' 所要滿足的方程式和条件:

u_i' 所要滿足的方程式是

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\nabla^2u_i', \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}=0, \tag{16}$$

式中 p' 是对应于 u_i' 的压力.

u_i' 所要滿足的初始条件是

在 $t=0$ 时候, $$u_i'=0. \tag{17}$$

u_i' 所要滿足的边界条件是

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在無穷远处,} & u_i'=0;\\ \text{在球面上,} & u_i'=-\alpha_i.\end{array}\right\} \tag{18}$$

2. u_i'' 所要滿足的方程式和条件:

u_i'' 所要满足的方程式是

$$\frac{\partial u_i''}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p''}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i'', \tag{19}$$

$$\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}=0, \tag{20}$$

式中 p'' 是对应于 u_i'' 的压力.

u_i'' 所要满足的初始条件是

在 $t=0$ 时候，　　$u_i''=0.$　　(21)

u_i'' 所要满足的边界条件是

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在無穷远处,} & u_i''=0;\\ \text{在球面上,} & u_i''=(\omega_{ij}-\alpha_{ij})x_j.\end{array}\right\} \tag{22}$$

3. u_i''' 所要满足的方程式和条件:

u_i''' 所要满足的方程式是

$$\frac{\partial u_i'''}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'''}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i''', \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_i'''}{\partial x_i}=0, \tag{24}$$

式中 p''' 是对应于 u_i''' 的压力.

u_i''' 所要满足的初始条件是

在 $t=0$ 时候，　　$u_i'''=0.$　　(25)

u_i''' 所要满足的边界条件是

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在無穷远处,} & u_i'''=0;\\ \text{在球面上,} & u_i'''=-\alpha_{ijk}x_jx_k.\end{array}\right\} \tag{26}$$

我們用 f_i 表示流体作用在小球上的总力，按照流体力学的基本公式

$$f_i=\oint\!\!\oint_S \tau_{i\alpha}\frac{x_\alpha}{a}dS, \tag{27}$$

式中 $\oint\!\!\oint_S dS$ 表示沿小球表面的面积分；$\tau_{i\alpha}$ 表示流体作用在小球表面上的应力，它的数值可以用下面的式子表示出来：

$$\tau_{i\alpha}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right)-p\delta_{i\alpha}, \tag{28}$$

μ 是流体的粘性系数.

現在把作用在小球上的力 f_i 分成兩部分，一部分对应于速度 u_i^0，我們叫它做 f_i^0；另一部分对应于速度 W_i，我們叫它做 φ_i．f_i^0 和 φ_i 各自的表达式如下：

$$f_i^0=\oint\!\!\oint_S \tau_{i\alpha}^0\frac{x_\alpha}{a}dS, \tag{29}$$

式中

$$\tau^0_{i\alpha}=\mu\left(\frac{\partial u^0_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u^0_\alpha}{\partial x_i}\right)-p^0\delta_{i\alpha}; \tag{30}$$

$$\varphi_i=\oint\!\!\oint_S \varpi_{i\alpha}\,\frac{x_\alpha}{a}\,dS, \tag{31}$$

式中

$$\varpi_{i\alpha}=\mu\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial W_\alpha}{\partial x_i}\right)-\varpi\,\delta_{i\alpha}. \tag{32}$$

同样，我們把 φ_i 再按照对应的速度和压力分成三个部分. 一部分对应于 u'_i，叫它做 f'_i

$$f'_i=\oint\!\!\oint_S \tau'_{i\alpha}\,\frac{x_\alpha}{a}\,dS, \tag{33}$$

式中

$$\tau'_{i\alpha}=\mu\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_i}\right)-p'\delta_{i\alpha}; \tag{34}$$

一部分对应于 u''_i，叫它做 f''_i

$$f''_i=\oint\!\!\oint_S \tau''_{i\alpha}\,\frac{x_\alpha}{a}\,dS, \tag{35}$$

式中

$$\tau''_{i\alpha}=\mu\left(\frac{\partial u''_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u''_\alpha}{\partial x_i}\right)-p''\delta_{i\alpha}; \tag{36}$$

一部分对应于 u'''_i，叫它做 f'''_i

$$f'''_i=\oint\!\!\oint_S \tau'''_{i\alpha}\,\frac{x_\alpha}{a}\,dS, \tag{37}$$

式中

$$\tau'''_{i\alpha}=\mu\left(\frac{\partial u'''_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u'''_\alpha}{\partial x_i}\right)-p'''\delta_{i\alpha}. \tag{38}$$

(二) f^0_i, f'_i 和 f''_i 的計算

我們現在来計算阻力 f^0_i，利用高斯把面积分化为体积分的公式，把公式(30)化成

$$f^0_i=\iiint_V \frac{\partial \tau^0_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}\,dV=\iiint_V\left(\mu\nabla^2 u^0_i-\frac{\partial p^0}{\partial x_i}\right)dV, \tag{39}$$

式中 $\iiint_V dV$ 表示經过整个小球的体积分. 再应用公式(1)，(39)式就可以化成

$$f^0_i=\rho\iiint_V\left(\frac{\partial u^0_i}{\partial t}+u^0_\alpha\frac{\partial u^0_i}{\partial x_\alpha}+\frac{dv_i}{dt}+g_i\right)dV. \tag{39'}$$

因为小球的半徑很小，所以积分号下的函数可以近似地用在坐标原点的函数值代替，最后就得到

$$f^0_i=\frac{4}{3}\pi a^3\rho\left[\left(\frac{\partial u^0_i}{\partial t}+u^0_\alpha\frac{\partial u^0_i}{\partial x_\alpha}\right)_{r=0}+\frac{dv_i}{dt}+g_i\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\rho\left[\frac{d\alpha_i}{dt}+\frac{dv_i}{dt}+g_i\right], \tag{40}$$

式中 $(\ )_{r=0}$ 表示在坐标原点的函数值.

我們再看阻力 f'_i. 根据布西涅斯克[3,4]公式,我們有

$$f'_i=6\pi\mu a\left[\alpha_i+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{d\alpha_i}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right]+\frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{d\alpha_i}{dt}. \tag{41}$$

現在来找 f''_i. 从方程式(19),(20),初始条件(21)和边界条件(22),我們可以看出 u''_i 是 x_j 的奇函数,而 p'' 是 x_j 的偶函数;所以在公式(35)里积分号底下的函数是 x_j 的奇函数,因此將这个函数沿小球表面积分所得出来的值恒等于零.所以相应于速度 u''_i 和压力 p'' 的阻力 f''_i 恒等于零.

(三) f'''_i 的計算

我們現在来找 f'''_i. 我們并不是直接解方程(23)和(24),而是通过拉普拉斯轉換求得 f'''_i 所对应的轉換函数,再把它轉換回来求得 f'''_i. 我們知道,任一函数 $\varphi(t)$ 的拉普拉斯轉換函数 $\Phi(s)$ 可以写成

$$\Phi(s)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)\,dt.$$

在应用拉普拉斯轉換以后,几个函数的对应关系列在表1中.

表 1

原函数	轉換函数
t	s
u'''_i	U_i
$-\alpha_{ijk}$	β_{ijk}
p'''	P
τ'''_{ij}	T_{ij}
f'''_i	F_i

將方程式(23)和(24)加以变换,我們得到

$$sU_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\nabla^2U_i, \tag{42}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0. \tag{43}$$

經过轉換以后的边界条件是:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在無穷远处,} & U_i=0;\\ \text{在球面上,} & U_i=\beta_{ijk}x_jx_k.\end{array}\right\} \tag{44}$$

由于連續方程式(43), β_{ijk} 必須滿足下列条件:

$$\beta_{ijj}=0. \tag{45}$$

原来有的初始条件(25),在进行拉氏轉換的过程中已經用过,所以已經包含在方程式(42)和(43)里面了.

在解方程式(42)和(43)以前,我們先考虑張量 W_{imn}, 它滿足的方程式是

$$sW_{imn}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{mn}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2W_{imn}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}W_{imn}=0. \tag{47}$$

它滿足的边界条件是:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在無穷远处,} & W_{imn}=0;\\ \text{在球面上,} & W_{imn}=\beta_{imn}.\end{array}\right\} \tag{48}$$

为了解方程式(46)和(47)，我們用 R 来表示空間任意一点离开坐标原点的距离，并且引进参数 $\eta=R^2$. 我們令

$$W_{imn}=f(\eta)\beta_{lmn}x_i x_l+g(\eta)\beta_{imn}, \tag{49}$$

$$\frac{P_{mn}}{\rho}=A\eta^{-\frac{3}{2}}x_l\beta_{lmn}, \tag{50}$$

式中 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 都是 η 的函数. 为了書写方便起見，我們以后把 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 簡写成 f 和 g. 在以后，我們將用函数右上角的撇数来表示某一个函数对 η 微分的次数. 式中 A 是一个待定常数. 將方程式(49)代入(47)，我們得到

$$\frac{\partial W_{imn}}{\partial x_i}=(2\eta f'+4f+2g')\beta_{lmn}x_l=0,$$

所以

$$2\eta f'+4f+2g'=0. \tag{51}$$

再把(49)式和(50)式微分，我們得到

$$\nabla^2 W_{imn}=(4\eta f''+14f')\beta_{jmn}x_i x_j+(2f+2\eta g''+6g')\beta_{imn},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{mn}}{\partial x_i}=-3A\eta^{-\frac{5}{2}}x_i x_j\beta_{jmn}+A\eta^{-\frac{3}{2}}\beta_{imn}.$$

代入方程式(46)得到下列兩个方程式:

$$sf=3A\eta^{-\frac{5}{2}}+\nu(4\eta f''+14f'), \tag{52}$$

$$sg=-A\eta^{-\frac{3}{2}}+\nu(2f+2\eta g''+6g'). \tag{53}$$

方程式(51)，(52)和(53)并不是互相独立的，它們中間只有兩个是独立的方程式，第三个可以从其他兩个求得. 現在我們来解方程式(51)和(52)，并且用 m 来表示 $\sqrt{\frac{s}{\nu}}$.
我們把方程式(51)和(52)里的自变数 η 改成 R，就得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2f}{dR^2}+\frac{6}{R}\frac{df}{dR}-m^2f+\frac{3A}{\nu}\frac{1}{R^5}=0,\\&\frac{1}{R}\frac{dg}{dR}=-4f-R\frac{df}{dR}.\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

我們現在来看 f 和 g 所适合的边界条件. 在無穷远处，W_{imn} 等于零，因此

在無穷远处， $$f(\infty)=g(\infty)=0. \tag{55}$$

在球面上，W_{imn} 等于 β_{imn}，所以

在球面上， $$f(a^2)=0,\ g(a^2)=1. \tag{56}$$

在边界条件(55)和(56)的情况下，解方程式(54)，我們就得到

$$\left.\begin{aligned}
f&=-\frac{9a}{2m^2}\frac{e^{-m(R-a)}}{R^5}\left(1+mR+\frac{m^2R^2}{3}\right)+\frac{9}{2m^2}\frac{a}{R^5}\left(1+ma+\frac{m^2a^2}{3}\right),\\
g&=\frac{3a}{2m^2R^3}e^{-m(R-a)}\left(1+mR+m^2R^2\right)-\frac{3a}{2m^2R^3}\left(1+ma+\frac{m^2a^2}{3}\right),\\
\frac{A}{\nu}&=\frac{3}{2}a\left(1+ma+\frac{m^2a^2}{3}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

現在来討論方程式(42)和(43)的解．我們令

$$\left.\begin{aligned}
(U_i)_I&=\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}W_{imn}=4f''\beta_{lmn}x_ix_lx_mx_n+4f'\beta_{lim}x_lx_m+\\
&\quad+2f'\beta_{lmm}x_ix_l+4g''\beta_{imn}x_mx_n+2g'\beta_{imm},\\
(P)_I&=\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}P_{mn}=15\rho A\eta^{-\frac{7}{2}}\beta_{lmn}x_lx_mx_n-3\rho A\eta^{-\frac{5}{2}}\beta_{lmm}x_l;
\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned}
(U_i)_{II}&=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}W_{imn}\right)=\left(4m^2f''-\frac{105A}{\nu}\eta^{-\frac{9}{2}}\right)\beta_{lmn}x_ix_lx_mx_n+\\
&\quad+\left(4m^2f'+\frac{30A}{\nu}\eta^{-\frac{7}{2}}\right)\beta_{lim}x_lx_m+\left(2m^2f'+\frac{15A}{\nu}\eta^{-\frac{7}{2}}\right)\beta_{lmm}x_lx_i+\\
&\quad+\left(4m^2g''+\frac{15A}{\nu}\eta^{-\frac{7}{2}}\right)\beta_{ilm}x_lx_m+\left(2m^2g'-\frac{3A}{\nu}\eta^{-\frac{5}{2}}\right)\beta_{imm},\\
(P)_{II}&=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2P_{mn}}{\partial x_m\partial x_n}\right)=0;
\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned}
(U_i)_{III}&=W_{imm}=f\beta_{lmm}x_ix_l+g\beta_{imm},\\
(P)_{III}&=P_{mm}=\rho A\eta^{-\frac{3}{2}}x_l\beta_{lmm};
\end{aligned}\right\}\tag{60}$$

$$\left.\begin{aligned}
(U_i)_{IV}&=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}W_{imm}=\left(m^2f-\frac{3A}{\nu}\eta^{-\frac{5}{2}}\right)\beta_{lmm}x_ix_l+\\
&\quad+\left(m^2g+\frac{A}{\nu}\eta^{-\frac{3}{2}}\right)\beta_{imm},\\
(P)_{IV}&=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}P_{mm}=0;
\end{aligned}\right\}\tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned}
(U_i)_V&=h\beta_{ilm}x_lx_m-h\beta_{lim}x_lx_m+k\beta_{imm},\\
(P)_V&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{62}$$

式中

$$h=\frac{1}{R^5}e^{-m(R-a)}\left(1+mR+\frac{m^2R^2}{3}\right),\qquad k=-\left(\frac{1}{3R^3}+\frac{m}{3R^2}\right)e^{-m(R-a)}.\tag{63}$$

將(58)，(59)，(60)，(61)和(62)各对 U_i 和 P 的值代入方程式(42)和(43)，我們可以証明每一对 U_i 和 P 的值都是满足方程式(42)和(43)的．我們現在来找既要满足方程式(42)和(43)，又要满足边界条件(44)的解．我們令

$$\left.\begin{aligned}
U_i&=C_1(U_i)_I+C_2(U_i)_{II}+C_3(U_i)_{III}+C_4(U_i)_{IV}+C_5(U_i)_V,\\
P&=C_1(P)_I+C_3(P)_{III};
\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

式中 C_1, C_2, C_3, C_4 和 C_5 是待定常数．把(64)式代入边界条件(44)，經过許多繁复

的計算以后，我們得到

$$
\left.
\begin{aligned}
C_1&=\frac{m^2a^7}{18}\frac{\nu}{A}\frac{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{10}}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}}+\frac{7}{18}\frac{a^4}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}},\\
C_2&=-\frac{\nu a^7}{18A}\frac{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{10}}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}},\\
C_3&=\frac{a^2}{3\left(1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}\right)}\left(1+ma+\frac{1}{5}m^2a^2\right),\\
C_4&=-\frac{a^4}{18}\frac{1}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}},\\
C_5&=-\frac{1}{2}a^5\frac{1}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{65}
$$

最后得到的 U_i 和 P 是

$$
\left.
\begin{aligned}
U_i={}&(2D_2f''-35D_1R^{-9})\beta_{lmn}x_ix_lx_mx_n+(2D_2f'+10D_1R^{-7}-\\
&-D_3h)\beta_{lim}x_lx_m+(2D_2g''+5D_1R^{-7}+D_3h)\beta_{ilm}x_lx_m+(D_2f'+\\
&+5D_1R^{-7}+D_4f-3D_5R^{-5})\beta_{lmm}x_ix_l+(D_2g'-D_1R^{-5}+\\
&+D_4g+D_5R^{-3}+D_3k)\beta_{imm},\\
\frac{P}{\rho}={}&15C_1AR^{-7}\beta_{lmn}x_lx_mx_n-3C_1AR^{-5}\beta_{lmm}x_l+C_3AR^{-3}x_l\beta_{lmm};
\end{aligned}
\right\}
\tag{66}
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
&D_1=-\frac{a^7}{6}\frac{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{10}}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}},\qquad D_2=\frac{\dfrac{7}{9}a^4}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}},\\
&D_3=\frac{-\dfrac{1}{2}a^5}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}},\qquad D_4=\frac{1+ma+\dfrac{1}{30}m^2a^2}{1+ma+\dfrac{m^2a^2}{3}}\cdot\frac{a^2}{3},\\
&D_5=-\frac{1}{12}a^5.
\end{aligned}
\right\}
\tag{67}
$$

現在来求 f_i''' 的轉換函数 F_i。我們很容易看出

$$
F_i=\frac{1}{a}\oiint_S T_{ij}x_j dS,
\tag{68}
$$

式中

$$T_{ij}=\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-P\delta_{ij}. \tag{69}$$

經过一些繁复的計算以后，最后得到

$$F_i=-2\pi\mu a^3\beta_{imm}\left[1+ma+\frac{1}{15}m^2a^2-\frac{4}{15}\frac{m^2a^2}{1+ma+\frac{1}{3}m^2a^2}\right]. \tag{70}$$

略去 a 的三次以上各項，就得到

$$F_i=-2\pi\mu a^3\beta_{imm}. \tag{70}$$

变回到原函数去，

$$f_i'''=2\pi\mu a^3\alpha_{imm}=\pi\mu a^3(\nabla^2 u_i^0)_{r=0}. \tag{71}$$

(四)小球在流体中运动时所受的总阻力

把前面得到的公式(40)，(41)和(71)中的 f_i^0，f_i' 和 f_i''' 加在一起，我們就得到在小球上所作用的总阻力 f_i 的表达式：

$$f_i=f_i^0+f_i'+f'''=\frac{4}{3}\pi a^3\rho\left[\frac{d\alpha_i}{dt}+\frac{dv_i}{dt}+g_i\right]+6\pi\mu a\left[\alpha_i+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{d\alpha_i}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right]+\frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{d\alpha_i}{dt}+2\pi\mu a^3\alpha_{imm}. \tag{72}$$

三. 討論

在整个計算的过程里，我們假定了流場中流体質点相对于小球中心的相对速度很小，因此我們能够把非綫性項略去. 对于实际河流中的悬浮泥沙来說，这一个假定是能够满足的. 因为像黄河这样的河流，所帶的悬浮泥沙的平均粒徑約 0.03 毫米左右，对于这样細的沙子重力对它的作用所产生的沉降速度是很小的，同时由于沙子的粒子很細，它的慣性很小，所以它也不会因为水流的运动产生很大的速度落后現象，所以非綫性項是可以略去的. 相反的，对于在河底运行的底沙，一般粒徑都在 0.2 毫米以上，它在水中的沉降速度很大，因此就不能应用上面我們所說的假定.

在討論的过程中，我們还假定了流动的綫性尺度比泥沙粒徑要大得很多. 在实际情形里，流动的綫性尺度大約和水深同級，一般从几个厘米到几米，所以和 0.03 毫米比起来的确要大得多了.

在討論中，我們还用了初始条件 $W_i=0$，从严格分析的观点来說，这是任意給的. 不过我們感覺兴趣的并不是初起时候流体运动的情况，而是在时間 t 較大时候的流动情形，对于粘性流体来說，在 t 稍大的时候，初始条件的影响很快就消失掉了，所以这任意性从我們应用的观点来說影响是并不大的. 最后我衷心地感謝我的老师周培源教授所給予我的指导和教誨.

参 考 文 献

[1] Великанов, М. А., Динамика русловых потоков, том II, стр. 11 (1955).
[2] 蔡树棠,物理学报, **12**, 402—408 (1956), 409—418.
[3] Boussinesq, J. Théorie analytiqul de la chaleur **2** (1901).
[4] Русанов, Б. В., *ДАН* **90** (1953), 41—44.

SEDIMENTATION MOTION OF SAND PARTICLES IN MOVING WATER (I)

THE RESISTANCE ON A SMALL SPHERE MOVING IN NON-UNIFORM FLOW

TSAI SHU-TANG

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In hydraulics, when we deal with the problem of sand particles moving relative to the surrounding water, Stokes' formula of resistance has usually been used to render the velocity of sedimentation of the particles. But such an approach has not been proved rigorously, and its accuracy must be carefully considered. In this paper, we discuss the problem of a sphere moving in a non-uniform flow field, on the basis of the fundamental theory of hydrodynamics. We introduce two assumptions: i) the diameter of the sphere is much smaller than the linear dimension of the flow field, ii) the velocity of the sphere relative to surrounding water is very small. Usnig these two assumptions, we solve the linearized Navier-Stokes' equations and equations of continuity by the method of Laplace transform, and finally we obtain a formula for the resistance acting on a sphere moving in a non-uniform flow field.