

泥沙在动水中的沉淀运动(二)*

泥沙在層流中的沉淀运动

蔡 树 棠

(中国科学院力学研究所)

提 要

在前文中我們已經給出小球在不均匀流場中运动时所受到的阻力。本文中我們假定泥沙和水为两种不同的介質,同时假定泥沙的濃度很小。利用前文所得到的阻力公式,我們建立了在層流状态时泥沙和水各自的运动方程組。然后利用这一組方程来討論明渠中水流状态为層流时泥沙沉淀的情况。最后我們得到泥沙和水的相对速度在主流方向的分量并不等于零。同时我們求得根据簡單假定来计算时所引起的沉积位置的誤差。这个誤差和水深成正比而和泥沙顆粒的大小無关。一般說来,这个誤差并不是一个可以忽略的数值。

一、引言

在水力学中,一般在討論泥沙在沉淀池中^[1]运动的时候,認為水流質点相对于泥沙顆粒的相对速度就是泥沙在靜水中沉降的速度。这样一个假定是沒有經過証明的,因此需要进一步的加以探討。在本文中,我們把泥沙認為是由直徑同样大小的圓球所組成,应用了前文^[2]所得到的阻力公式我們給出了在層流的一般情况下,泥沙和水的运动方程和連續方程;并且討論了泥沙在明渠内速度为拋物綫分布的水流中泥沙的沉淀运动。最后得到了水流質点相对于泥沙顆粒的相对速度,并且給出了在这种情况下泥沙沉积的位置和用上述假定所給出的沉积位置相差的数值。得出的結果說明相对速度除了沉降速度那一部分以外,还有因为水流流場中速度不均匀所引起沿着水流方向的相对速度的分量,而这一个分量在一般情况下并不見得比沉降速度来得小。同时我們看到沉积位置的相差值一般說来也不是一个很小的可以忽略的数值。

二. 泥沙在層流中运动的一般方程

关于两种气体混合在一起时的运动問題,周培源教授^[3]曾在1947年發表过一篇

* 1957年3月27日收到。

論文,給出了兩種气体混合物的运动方程式和連續方程式。最近苏联巴倫卜拉脫^[4]曾用类似的方程来討論泥沙运动。我們現在用他們的理論方法来討論泥沙在層流中的运动問題。

按照巴倫卜拉脫的看法,把泥沙和水看做兩種不同的流体。我們采用笛卡兒張量符号来描述水和泥沙的运动。我們写出泥沙和水的运动方程式和連續方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t} s + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (s v_\alpha) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-s) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(1-s) u_\alpha] = 0, \quad (2)$$

$$\rho_s s \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right] = -s \rho_s g_i + f_i + \frac{\partial \omega_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (3)$$

$$\rho (1-s) \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right] = -(1-s) \rho g_i - f_i + \frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}; \quad (4)$$

式中 ρ 代表水的密度; ρ_s 代表泥沙的密度; u_i 代表水的速度; v_i 代表泥沙的速度; $\tau_{i\alpha}$ 代表水中的应力; $\omega_{i\alpha}$ 代表泥沙中的应力; s 代表單位体积里泥沙所占的体积, $1-s$ 代表單位体积里水所占的体积; f_i 代表水对泥沙的作用力; g_i 代表重力加速度。

假定挟沙水流的含沙濃度很小,因此泥沙顆粒之間的相互作用可以略去不計,于是就得到

$$\omega_{i\alpha} = 0. \quad (5)$$

因此方程式(3)就簡化成

$$\rho_s s \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right] = -\rho_s s g_i + f_i. \quad (6)$$

由于水流的含沙濃度很小,所以可以假定水流在挟帶泥沙以后仍旧是牛頓流体,因此我們就有应力和速度形变的关系式

$$\tau_{i\alpha} = \mu^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu^* \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} \delta_{i\alpha} - p \delta_{i\alpha}, \quad (7)$$

式中 μ^* 是帶沙以后的水流的粘性系数; p 是水流中的压力。根据爱因斯坦^[5]公式, μ^* 可以表成

$$\mu^* = \mu(1+cs), \quad (8)$$

式中 μ 是水不含沙的时候水的粘性系数; c 是某一个常数。

現在来考虑水对泥沙的作用力 f_i 。我們把泥沙顆粒看做是半徑为 a 的同样大小的圓球,这样每个泥沙顆粒的体积为 $\frac{4}{3} \pi a^3$ 。我們知道,在單位体积里泥沙所占的体积为 s ,所以在單位体积里泥沙顆粒的数目 n 由下列公式給出:

$$n = \frac{s}{\frac{4}{3} \pi a^3}. \quad (9)$$

我們現在用 P_i 表示流体作用在單个泥沙顆粒上的作用力。根据上面的水流含沙濃度很小这一个假定, 我們可以認為泥沙顆粒之間彼此互不影响, 因此水对泥沙的作用力等于單个泥沙顆粒在水中运动时所受到的水对它的作用力的总和。因此在單位体积里, 水对泥沙的作用力 f_i 可以用下列公式表出:

$$f_i = nP_i. \quad (10)$$

根据前文的計算, 并且考虑到从和泥沙顆粒的中心一起运动的坐标系轉換到靜止坐标系时所引起的改变, 我們得到

$$P_i = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \left[\frac{Du_i}{dt} + g_i \right] + 6\pi\mu a \left[(u_i - v_i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{D}{d\tau} (u_i - v_i) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] + \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \left(\frac{Du_i}{dt} - \frac{Dv_i}{dt} \right) + \pi\mu a^3 \nabla^2 u_i, \quad (11)$$

式中 $\frac{D}{dt}$ 代表对時間 t 的物質微分。式中 $\int_0^t d\tau$ 代表当泥沙顆粒在水中运动时, 沿着泥沙顆粒中心的軌跡 L 的积分。把(9)式代入(8)式, 得到

$$f_i = \rho s \left[\frac{Du_i}{dt} + g_i \right] + \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2} s \left[(u_i - v_i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{D}{d\tau} (u_i - v_i) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] + \frac{1}{2} \rho s \left(\frac{Du_i}{dt} - \frac{Dv_i}{dt} \right) + \frac{3}{4} \mu s \nabla^2 u_i. \quad (12)$$

把公式(10)代入公式(6), 我們得到泥沙的运动方程式:

$$\left(\rho_s + \frac{1}{2} \rho \right) \frac{Dv_i}{dt} = \frac{3}{2} \frac{Du_i}{dt} - (\rho_s - \rho) g_i + \frac{3}{4} \mu \nabla^2 u_i + \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2} \left[(u_i - v_i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{D}{d\tau} (u_i - v_i) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (13)$$

把公式(10)代入公式(4), 我們得到水的运动方程式:

$$\rho \frac{Du_i}{dt} = -\rho g_i + \frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \rho s \left(\frac{Du_i}{dt} - \frac{Dv_i}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu s \nabla^2 u_i - \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2} s \left[(u_i - v_i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{D}{d\tau} (u_i - v_i) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (14)$$

公式(1), (2), (13) 和 (14) 就是泥沙在層流中运动时的基本方程式。

三. 泥沙在沉淀池里的沉淀运动

我們考虑一个很寬的沉淀池, 池里面的水的流动是处在層流状态。假設沉淀池的底是一个平面, 它和地面的交角为 α 。又假定水面是一个和水底平行的平面, 它离开

水底的距离为 h , 我们把坐标轴的原点取在水表面上, 并且使 xz -平面和水表面互相重合. 我们把 x 轴取在沿水流的方向, z 轴取在沿沉沙池宽度的方向, y 轴取得和水表面垂直并且以向上的方向为正方向. 假定沉沙池够宽, 那么整个的运动可以看作是二维流动, 也就是在每一个垂直于 z 轴的断面里, 流动的状态都完全一样. 整个的流动图案就像图 1 中所画的那样.

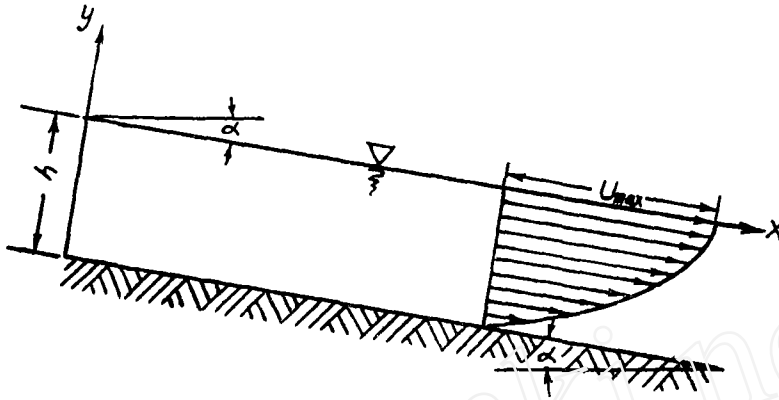


图 1.

在这一个特殊情形里, 我们现在来解方程式 (1), (2), (13) 和 (14). 因为水流的含沙浓度很小, 所以作为第一级近似, 在方程式 (2), (8) 和 (14) 中间略去包含 s 的各项. 然后把 (8) 式代入 (7) 式, 再把 (7) 式代入 (14) 式, 经过简化以后, 我们就得到普通的粘性流体的运动方程式和连续方程式:

$$\rho \frac{Du_i}{dt} = -\rho g_i + \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (16)$$

在沒有解方程式 (15) 和 (16) 之前, 先来看一下水流所要适合的边界条件. 由于空气的粘性系数很小, 我们就近似地认为空气的粘性系数为零, 因此在水的表面上的边界条件就成为正应力等于常数值 $-p_0$, 剪应力恒等于零. 写成解析形式, 我们得到

$$\text{在水表面上, } \tau_{yy} = -p_0, \tau_{xy} = 0, \tau_{zy} = 0. \quad (17)$$

在水底上的边界条件由于流体是有粘性的, 所以在水底上速度 u_i 为零. 也就是

$$\text{在水底上, } u_i = 0. \quad (18)$$

从方程式 (15) 和 (16), 可以看出在略去含沙浓度的影响以后, 水流就成了一个定常流动. 在三个速度分量中间只有沿 x 轴方向的一个速度分量 U 不等于零, 而且可以看出 U 仅仅是 y 的函数. 同时可以看到压力 p 也仅仅是 y 的函数, 沿 x 方向的压力并不改变. 现在把水的运动方程式写成标量的形式, 我们就得到

$$0 = \rho g \sin \alpha + \mu \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad (19)$$

$$0 = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (20)$$

边界条件(17)和(18)也简化成

$$\left. \begin{array}{l} \text{当} \quad y=0, \quad p=p_0, \quad \frac{d}{dy} U=0; \\ \text{当} \quad y=-h, \quad U=0. \end{array} \right\} \quad (21)$$

在边界条件(21)的情况下解方程式(19)和(20), 我們得到

$$U = U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad (22)$$

$$p = p_0 - \rho g y \cos \alpha, \quad (23)$$

式中 $U_m = \frac{h^2}{2\mu} \rho g \sin \alpha$, 是速度 U 的最大值.

现在采用拉格朗基变数作为自变数来讨论泥沙的运动. 令

$$\frac{\rho_s - \rho}{\rho_s + \frac{1}{2}\rho} g_i - \frac{3}{4} \frac{\mu \nabla^2 u_i}{\rho_s + \frac{1}{2}\rho} = G_i, \quad \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2} = A, \quad \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2} \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} = B. \quad (24)$$

同时再利用了上面所推出来的结果, 方程式(15)就简化成

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)_{x_i^0} = -G_i + Av_i - B \int_0^t \frac{\left(\frac{\partial v_i}{\partial \tau}\right)_{x_i^0}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (25)$$

式中 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x_i^0}$ 表示把泥沙质点初起位置 x_i^0 保持不变时对时间 t 的偏导数. 把方程式

(25)写成标量形式, 我們得到

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)_{x_i^0} = -G_x + AU - Av_x - B \int_0^t \frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial \tau}\right)_{x_i^0}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}\right)_{x_i^0} = -G_y - Av_y - B \int_0^t \frac{\left(\frac{\partial v_y}{\partial \tau}\right)_{x_i^0}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (27)$$

方程式(26)和(27)所要适合的初始条件是:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } \quad x=x_0, \quad y=y_0; \quad v_x=U, \quad v_y=0. \quad (28)$$

令

$$A - \frac{B^2\pi}{2} = \alpha_1, \quad \sqrt{A^2 - \left(A - \frac{B^2\pi}{2}\right)^2} = \alpha_2, \quad (29)$$

方程式(27)的解^[6]就可写成

$$v_y = -\frac{G_y}{A} \left[1 + e^{-\alpha_1 t} \left\{ \frac{A - \alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 t - \cos \alpha_2 t \right\} - \frac{AB}{\alpha_2} \int_0^t \frac{e^{-\alpha_1 \tau}}{\sqrt{t-\tau}} \sin \alpha_2 \tau d\tau \right], \quad (30)$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt. \quad (31)$$

现在来解方程式(26). 我們先把原来的微分积分方程改成下列的微分方程:

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}\right)_{x_1} + (2A - B^2 \pi) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)_{x_1} + A^2 v_x = \frac{BG_x}{\sqrt{t}} - AG_x - \frac{2AU_m}{h^2} y \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_1} - \frac{AU_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)}{\sqrt{t}} B - B \int_0^t \frac{\left(-2 \frac{AU_m}{h^2} y\right) \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{x_1} d\tau + A^2 U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (32)$$

同时令

$$\varphi(t) = \frac{BG_x}{\sqrt{t}} - AG_x - \frac{2AU_m}{h^2} y \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_1} - \frac{AU_m \left(1 - \frac{y_0^2}{h^2}\right)}{\sqrt{t}} B - B \int_0^t \frac{\left(-2 \frac{AU_m}{h^2} y\right) \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{x_1} d\tau + A^2 U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (33)$$

那么我們就得到方程式(32)的解

$$v_x = c_1 \bar{e}^{\alpha t} + c_2 \bar{e}^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha_2} \int_0^t \varphi(\tau_2) \bar{e}^{\alpha_1(t-\tau_2)} \sin \alpha_2(t-\tau_2) d\tau_2; \quad (34)$$

式中

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \bar{\alpha} = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad (35)$$

式中 c_1 和 c_2 是两个待定常数, 由初始条件决定. 根据初始条件, 我們得到

$$c_1 + c_2 = U_m \left(1 - \frac{y_0^2}{h^2}\right), \quad -\alpha c_1 - \bar{\alpha} c_2 = -G_x. \quad (36)$$

解方程式(36), 我們得到

$$c_1 = \frac{G_x - \bar{\alpha} U_m \left(1 - \frac{y_0^2}{h^2}\right)}{\alpha - \bar{\alpha}}, \quad c_2 = \frac{G_x - \alpha U_m \left(1 - \frac{y_0^2}{h^2}\right)}{\bar{\alpha} - \alpha}. \quad (37)$$

当 t 很大时, 我們得到下列渐近展开式^[7]:

$$\left. \begin{aligned} v_y &= -\frac{G_y}{A} \left(1 - \frac{B}{A} \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \\ y &= y_0 - \frac{G_y}{A} t; \\ v_x &= -\frac{G_x}{A} + U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{4U_m}{h^2} \frac{B}{A} \left(-\frac{G_y}{A}\right) \left[y_0 - \frac{2}{3} \frac{G_y}{A} t\right] t^{\frac{1}{2}}, \\ x &= x_0 - \frac{G_x}{A} t + \int_0^t U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dt + \frac{4U_m}{h^2} \frac{B}{A} \left(-\frac{G_y}{A}\right) \left[\frac{2}{3} y_0 - \frac{4}{15} \frac{G_y}{A} t\right] t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

把(38)式换回到欧拉变数做自变数的情形, 我們就得到 v_x 和 v_y 在欧拉变数做自变数时的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{G_x}{A} + U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{4U_m}{h^2} \frac{B}{A} \left(-\frac{G_y}{A}\right) \left[y + \frac{1}{3} \frac{G_y}{A} t\right] t^{\frac{1}{2}}, \\ v_y &= -\frac{G_y}{A} \left(1 - \frac{B}{A} \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

因此我們可以看出,把泥沙和水的相对速度看做就是泥沙在水中的沉降速度所引起的誤差是很大的,它們的数值由下列公式表出:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_x &= v_x - U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) = -\frac{G_x}{A} + \frac{4U_m}{h^2} \frac{B}{A} \left(-\frac{G_y}{A}\right) \left(y + \frac{1}{3} \frac{G_y}{A} t\right) t^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta v_y &= v_y + \frac{G_y}{A} = \frac{G_y}{A} \frac{a}{\sqrt{\pi \nu t}}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

我們再来求出按照一般的簡單假定来得到沉降位置所引起的誤差。我們先看泥沙从初始时刻到沉降到达水底所需要的时间 t_1 。我們知道泥沙沉降到达水底也就是泥沙質点的縱坐标 y 等于 $-h$, 因此从(38)式的第二个公式,我們有

$$t_1 = \frac{h + y_0}{\frac{G_y}{A}}. \quad (41)$$

我們知道沉降位置的誤差的表达式为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 - \int_0^{t_1} U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dt = \\ &= -\frac{G_x}{A} t_1 + \frac{4U_m}{h^2} \frac{B}{A} \left(-\frac{G_y}{A}\right) \left(\frac{2}{3} y_0 - \frac{4}{15} \frac{G_y}{A} t_1\right) t_1^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (42)$$

把(41)式代入(42)式,經過化簡以后得到

$$\Delta x = h \left(1 + \frac{y_0}{h}\right) \left[\frac{k - \frac{7}{4}}{k - 1} \tan \alpha + (\text{Re} \tan \alpha)^{\frac{1}{2}} \frac{8}{5} \sqrt{\frac{1}{\pi(k-1)}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y_0}{h}\right) \left(1 + \frac{y_0}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (42')$$

式中 $k = \frac{\rho_s}{\rho}$ 为泥沙的比重; $\text{Re} = \frac{U_m h}{\nu} = \frac{g h^3 \sin \alpha}{2\nu^2}$ 为雷諾数。

最后討論由于泥沙淤积所引起的泥沙池底部的升高。我們在水底上任意取一点 P , P 的坐标为 (x_b, y_b, z_b) ; 由于泥沙的淤积 y_b 逐渐改变, 因此 y_b 是坐标 x_b, z_b 和时间 t 的函数。在 P 点的周圍取一塊面积元素 ΔB , 并且按照圖 2(a) 所画出的那样作出一个以 ΔB 为底的柱体, 柱体的高度为 $\left(\frac{\partial y_b}{\partial t} - v_y\right) \Delta t$ 。我們用 s_b 来表示單位体积的水底淤泥里泥沙所占的体积, 并且假定 s_b 是一个常数。現在来考虑在時間間隔 Δt 以后上面所作出的柱体中的泥沙的运动情况。可以看出,在柱体頂上的一層泥沙在 Δt 的最后一瞬間剛好到达升高后的底面, 而在柱体中間的泥沙都已經先后碰到水底沉淀在底面积为 ΔB 高度为 $\frac{\partial y_b}{\partial t} \Delta t$ 的圓柱中間了, 就像圖 2(b) 上所画的那样。按照質量守恒定律, 可以看出圖 2(b) 中的柱体里所包含的泥沙的質量正好等于圖 2(a) 中的柱体里所包含的泥沙的質量。因此我們得到关系式

$$\rho_s s \left(\frac{\partial y_b}{\partial t} - v_y\right) \Delta B \Delta t = \rho_s s_b \frac{\partial y_b}{\partial t} \Delta B \Delta t.$$

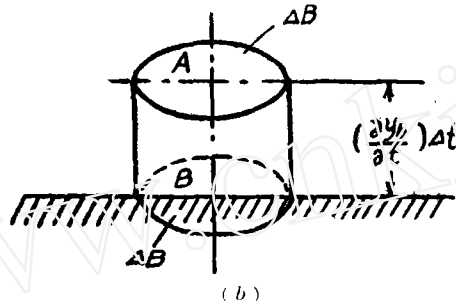
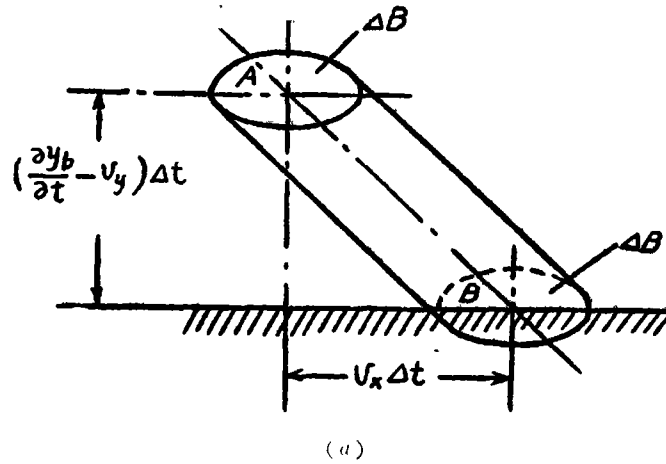


圖 2.

消去因子 $\rho_s \Delta B \Delta t$, 得到

$$s \left(\frac{\partial y_b}{\partial t} - v_y \right) = s_b \frac{\partial y_b}{\partial t}. \quad (43)$$

方程式(43)为规定底部升高的偏微分方程。

对初始时刻泥沙为均匀分布的情形, s 是一个常数; 因此我们得到微分方程

$$\frac{dy_b}{dt} = \frac{-sv_y}{s_b - s}. \quad (44)$$

对时间 t 积分以后, 我们得到

$$y_b = -h - \frac{s}{s_b - s} \int_0^t v_y dt. \quad (45)$$

在 t 很大的时候, 我们得到下列的渐近展开式:

$$y_b = -h + \frac{s}{s_b - s} \frac{G_y}{A} \left(t - \frac{2B}{A} \sqrt{t} \right). \quad (46)$$

四. 結論和討論

在第二节里, 我们利用圆球在流体中运动时候的阻力公式得出了在层流中泥沙运

动的一般方程,但是我们只考虑了含沙浓度一次的各项,因此不能应用到高浓度的情形上去。而在我国北方的河流、渠道或泥沙池里,水流含沙的浓度一般都很高,所以进一步考虑浓度的影响是非常迫切需要解决的问题。但是考虑高浓度含沙水流的运动有一系列的困难,就像泥沙的应力究竟应该如何计算这样一个问题就需要化很大力气仔细加以研究才能获得解决,类似的其他问题还很多,因此目前还不可能很快解决问题。

从第三节的计算里我们可以看出,泥沙在速度分布为抛物线形的水流中沉淀的时候,水和泥沙的相对速度不仅垂直于水流有一分量,而且沿着水流方向也有一个分量。一般来说,沿着水流这一分量不一定比垂直水流这一个分量来得小,因此一般假定水和泥沙的相对速度为常数并不正确。

同时我们可以看出,按照一般假定所得出来的沉淀位置的误差是和水深 h 成正比例的,而和泥沙粒径无关;并且这一个差数在有些情形里不一定是一个可以略去的数值。最后我衷心地感谢我的老师周培源教授给了我这个题目和在工作期间对我亲切的指导。

参 考 文 献

- [1] Великанов, М. А., Динамика Ручьевых Потокков, том II, стр. 168.
- [2] 蔡树棠,物理学报, 13 (1957), 389—399.
- [3] 周培源,中国物理学报, 7 (1947), 96—101.
- [4] Баренблатт, Г. И., ИММ 17 (1953), 261—274.
- [5] Einstein, A., *Annalen der Physik* 19 (1906), 289.
Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Механика сплошных сред (1953), 98—100.
- [6] Tchen Chan-mou (陈善谟), Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid (1947), 72—81, 'The Hagul Martinus Nijhoff.
- [7] 蔡树棠,物理学报, 12 (1956), 400—418.

SEDIMENTATION MOTION OF SAND PARTICLES IN MOVING WATER (II)

SEDIMENTATION OF SAND PARTICLES IN LAMINAR FLOW

TSAI SHU-TANG

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In dealing with the problem of sand particles moving relative to the surrounding water, Stokes' formula of resistance has usually been used to render the velocity of sedimentation of the particles. But such an approach has not been proved rigorously, and its accuracy must be carefully examined. In the previous paper, we gave the resistance acting on a sphere moving in a non-uniform flow field. In this paper, we assume the concentration of sand particles to be very small, and using the previously obtained formula for the resistance, we establish the general equations of motion of laminar flow of sand particles and water. Then, we discuss the sedimentation motion of sand particles for laminar flow in an open channel. Finally, we find that the component of relative velocity parallel to the main stream is not equal to zero. Thereby, we obtain the error in the position of sedimentation as calculated by means of the usual simplified assumption. This error in position is proportional to the depth of water, and is independent of the size of sand particles. In general, it is not a negligible quantity.