

管 道 的 振 動

大型輸水管有時由於水泵中的壓力波動而發生強烈的振動。這種振動的特徵在於管壁的變形；例如，實際的觀察曾經指出，振動的形式在圓周方向可以包括六個正弦波。

水泵所產生的波動是周期性的。其基本頻率可以由簡單的計算確定。例如，就離心式水泵而言，基本頻率之值等於每秒鐘葉輪轉數與葉片數之乘積。

如果輸水管的自振頻率與水泵所產生的壓力波動頻率相接近，兩者之間便建立了共振的關係。振動的強烈程度將由水泵所產生的壓力波動的大小所決定。

從水管設計的一個角度來看，要求避免這種共振關係的形成。為此，必須知道如何計算管道的自振頻率。

本文討論管道振動的基本理論。在管內流速不大的情況下，自振頻率可由簡單的公式得出[公式(11)]。由於在大多數實際問題中，流速不大的假設可以成立，因此本文所得之結果將有助於管道之設計。

一 管壁的运动方程

令 w 為管壁在半徑方向的位移， R 為平均半徑， x, θ 為中曲面上的圓柱坐標。在小位移的假設下，Donnell^[1] (1933) 給出 w 所需滿足的运动方程式如下：

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 \left(p_t + N_\theta \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \quad (1)$$

其中 E = 楊氏模數；

ν = 波桑系數；

ρ = 管子密度；

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

N_θ = 平均水壓力在 θ 方向產生的薄膜“應力”，此系常數；

p_t = 水作用於管壁的擾動壓力。

我們略去水的黏性，因而除 p_t 而外，沒有其他的表面力（暫不考慮支座反力）。

推導(1)式的主要假設包括： w 大於在中曲面內的位移，運動頻率不高，撓度的波長較小於 R ，但遠大於 h 。

二 流体的影响与振动频率

管內全部為流体所充滿，設其平均流速 v 為一常數，由於振動而產生的擾動流速將視為小

量。如略去水的黏性及可壓縮性，於是便有与擾动流速相应的位势函数 $\varphi(B, \theta, x, t)$ ， r 为圆柱坐标系中的半径， φ 满足熟知的拉普拉斯方程式，即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

在管壁与流体的接触面上，必须有速度垂直分量的連續条件：經線性化后，此条件可以寫做

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n=R} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3)$$

根据伯努利定理，我們还有

$$\frac{p_t}{\rho_l} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{n=R}. \quad (4)$$

其中 ρ_l 为流体的密度。(1)–(4) 系本問題的基本方程組，在下面的討論中將先涉及在無限長圓筒上列波的傳播，因此在 $x = \pm \infty$ 处的条件無需規定。

三 正弦列波的傳播

今考慮一正弦列波

$$w = A \cos n\theta \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \quad (5)$$

其中 ω, k 为实数， n 为整数， A 为任意常数。自(1)式及(5)式，求得 p_t 之值为

$$p_t = \rho_l h (\omega_0^2 - \omega^2) w, \quad (6)$$

其中
$$\omega_0^2 = \rho_l h \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{n^2}{R^2} + k^2 \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \left(\frac{k^4}{\left(\frac{n^2}{R^2} + k^2 \right)^2} + \bar{N}_\theta \frac{n^2}{R^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

可以証明 $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 等於空筒的自振頻率，与其相应的振动形式为 $\cos n\theta \cdot \sin(kx + \alpha)$ ， α 为常数。

另一方面，边界条件(3)既由(5)式确定，(2)式的解便可得出，再代入(4)式，便求出 p_t 的另一表示式如下：

$$p_t = \rho_l (\omega - vk)^2 \frac{I_n(kR)}{k I_n'(kR)} w. \quad (8)$$

(6)及(8)式之右端必需相等，於是

$$\delta^2 (\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega - vk)^2, \quad (9)$$

其中

$$\delta^2 = k \frac{\rho_l h}{\rho_l} \frac{I_n'(kR)}{I_n(kR)} > 0. \quad (10)$$

解(9)式即得

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{kv \pm \delta \sqrt{(1 + \delta^2) \omega_0^2 - k^2 v^2}}{1 + \delta^2}. \quad (11)$$

以(5)式所表示的列波的相速度 $c = \frac{\omega}{k}$ 。因此對於指定了 k 与 n 的正弦波而言，有两个相速度；即

$$c_{\pm}^2 = \pm \frac{\delta \sqrt{(1 + \delta^2) \frac{\omega_0^2}{k^2} - v^2}}{1 + \delta^2} + \frac{v}{1 + \delta^2},$$

其平均相速为

$$\bar{c} = \frac{v}{1 + \delta^2}.$$

如果平方根中的量为負数,这样的列波便是不稳定的了,对应於不同的 k 及 n 的值必有一个最小的 v , 使平方根中的量等於零。这个 v 可以称为臨界流速。

四 小流速的情况

在有些实际問題中, v 的数值較小, 所以可以在(11)式中將其略去。这样, $\omega_1 = -\omega_2$, 於是(1)–(4)式便有如下的解:

$$w = A \cos n\theta \cdot \sin kx \cdot A \sin \omega, t. \quad (12)$$

这个解由(5)式所表示的列波組成, 而且只有在 $v=0$ 的情况下方才可能。

(12)所表示的解有固定的結点, 即在 $x = \frac{m\pi}{k}$ 处 ($m=1, 2, \dots$), $w=0$ 。因此这組解相当於一个在等間隔上($\Delta x = \frac{\pi}{k}$)以环筒支的無限長水管的几种特殊的自由振动形式, 可以証明, 若先确定 Δx , 則(11)式所給出的最低頻率將为全部頻率中之最低者。

五 理論的初步应用

第四節所得出的結果曾应用於下述的实际問題: 圖 1 所示的水泵屬离心式。依照叶輪的轉数及叶片数目計算所得之基本頻率為 23.5 週/秒, 水泵的流量約為 32.6 立方公尺/秒, AB 段系由鋼管組成, 其直徑為 3.66 公尺, 厚度為 1.11 公分, 在 B 端將水排入蓄水湖, 由於利用了部分的虹吸作用, B 端附近的水压小於大氣压。管道的前一段系鋼筋混凝土結構(直徑 = 3.66 公尺), 埋在山坡中, AB 段則在地面上。

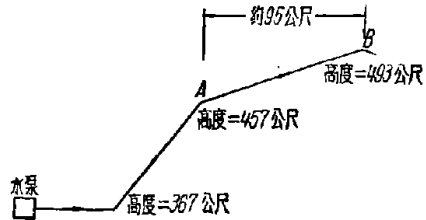


圖 1.

当水泵运行时, AB 段上發生了強烈的振动。据观察, 管壁撓度的波長在軸向約為 7.5—9 公尺, 在圓周方向約有 6 个全波, 而且振动形式不甚穩定。頻率与水泵的基本頻率相同, 說明是一种共鳴現象。

根据第四節的結果可以就各种不同类型的振动形式進行頻率的計算。

如果就观察所得的振动形式, 用理論求出的頻率接近 23.5 週/秒, 理論的可靠性便得到一定程度的驗證。

圖 2、3、4 是根据(11)式求得之頻率曲線, 其中 $\eta = \frac{2\pi R}{L}$, L 系波長。在計算的範圍內 v 的影响很小, 因而略去。圖中的水平線表示水泵的基本振动頻率(等於 23.5 週/秒)。 $L=7.5-9$ 公尺, 相当於 $\eta=1.54-1.28$ 。

圖 2、3、4 很明顯地指出, 在这个 η 区域内, 有多种的振动形式, 它們的頻率極其接近水泵的頻率, 其中包括 $n=6$ 。說明有多种振动形式与水泵發生共振。这是与实际观察一致的。

經過这样檢驗的理論, 可以在一定限度內指出补救的办法。進一步的分析可以發現, 對於一个在等間隔上环筒支的管道, 还有許多其他頻率曲線, 与圖 2、3、4 所示者非常接近, 然而都在后

者之上。因此減少 η (或增加支座間的距離 $\frac{L}{2}$) 是不安全的。圖 2、3、4 都各有一條明顯的包線。

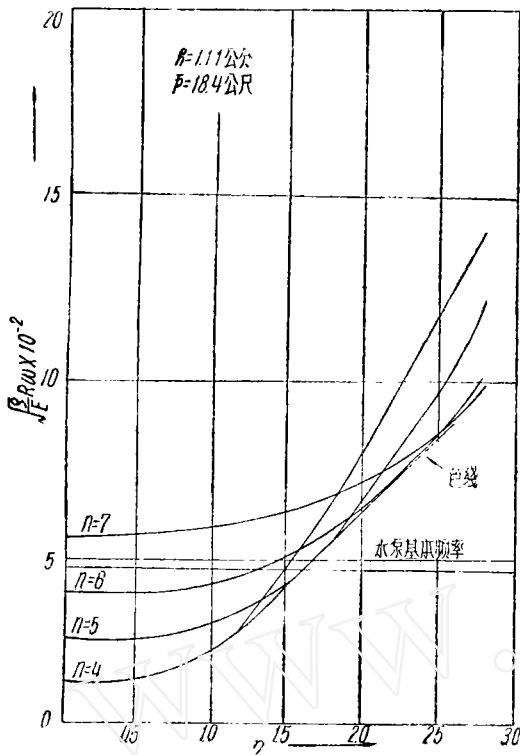


圖 2.

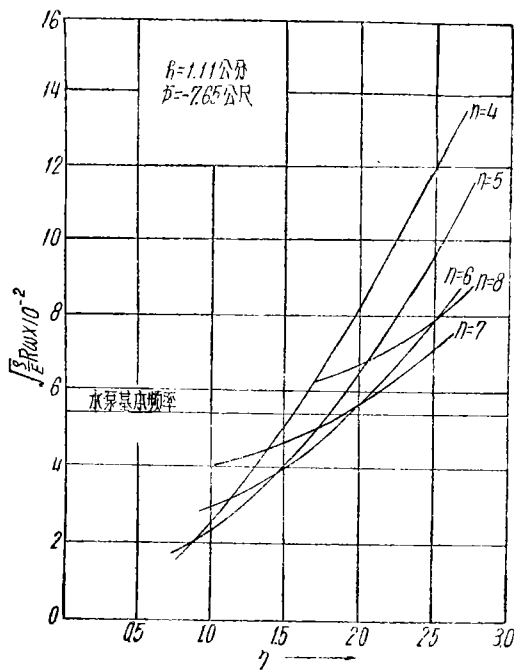


圖 4.

为了避免強烈的共振, 便須使以 $\eta = \frac{2\pi R}{L}$, 及水管頻率為橫坐标及縱坐标的点落於包線的右边。而且距后者有相當的距離。

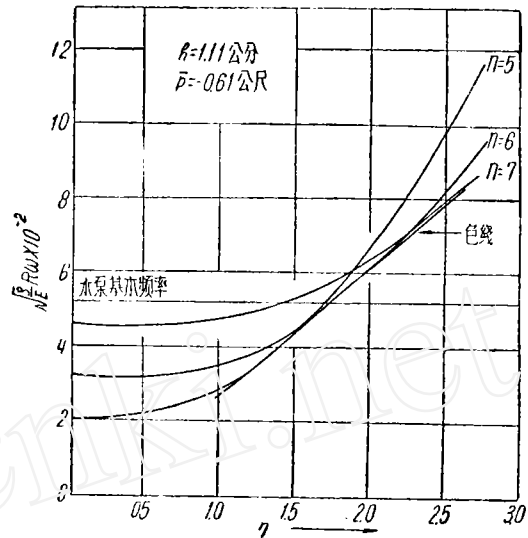


圖 3.

圖 5 繪出三條相當於靜水頭為 18.4, -0.61, -7.65 公尺的頻率包線。如果認為自振頻率與水泵頻率的比例 μ 不小於 1.32 是可以允許的, 那末支座間之距離 $(\frac{L}{2})$ 應各不大於 3.0, 2.5, 2.36 公尺。

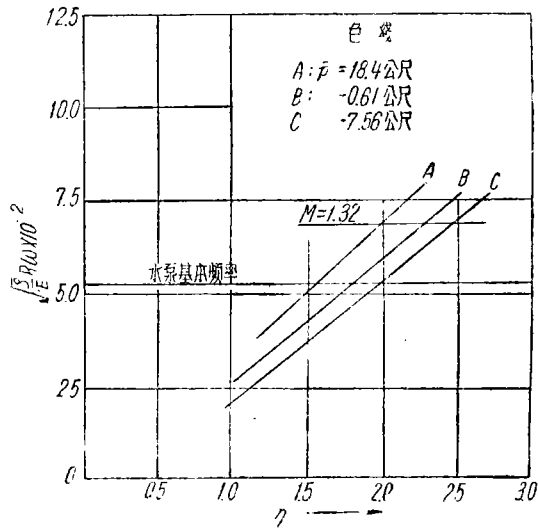


圖 5.

应当指出以上考慮的只是理想的簡支环,其寬度为零,而且絲毫沒有軸向的抗弯剛度。这是偏於过份簡化的。如果考慮了寬度及抗弯剛度,可以允許的支坐距离將有所增加。同时 μ 的選擇是否得当,还要看水泵產生的抗动压力的大小。

上述实际問題、經過叶片的修改及加勁环的裝置,得到了解決,加勁环間之距离約为 3.66 公尺,环寬約为 2.5 公分。

参 考 文 献

1. L. H. Donnell: Stability of Thin-walled Tubes under Torsion, NACA TM 473 (1933).

www.cnki.net

Analysis of Pipe Vibrations

Cheng Che-min

This paper presents some results on the analysis of coupled vibration of a thin cylindrical pipe containing a flowing fluid. A simple formula is obtained by means of which one can compute the lower natural frequencies of vibration when the flow velocity is sufficiently low.

www.cnki.net