物 理 學 報
第 12 卷 第 4 期 1956 年 7 月

論聖維南問題中的位移以及彎曲中心與扭轉中心*

胡 海 昌
(中國科學院力學研究所)

一. 引 言

彈性柱體的平衡問題在實用上是十分重要的. 但是它的嚴格的數學解法却十分困難. 在 1855 年,聖維南[1] 放鬆一部分邊界條件,簡化了原來的問題,爲數學處理開闢了廣大的可能性. 一般人爲紀念他的功績,就把簡化後的問題叫做聖維南問題.

但是聖維南問題除了不能滿足柱體原有的全部應力邊界條件以外,尚有另外一個缺點. 這就是按照聖維南的方法不能決定柱體內各點的絕對位移. 一般作者在討論懸臂梁的彎曲問題時寫道:"梁的一端夾住,另一端負担一個橫向載荷." 但是究竟什麽叫夾住却沒有加以說明. 嚴格地說,夾住的意義應當是 (u, v, w 是該截面上各點的位移):

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0. \tag{1}$$

但是這個意義却和聖維南問題不相容,因爲在聖維南問題中不能適合這麽多的邊界條件. 這樣便產生了一個問題:怎樣來明確並合理地規定"夾住"的意義?

現在還少有人來全面地討論聖維南問題中的位移問題. 但是由於實用上的需要,已有不少學者研究過扭轉問題中的扭轉中心和彎曲問題中的彎曲中心(或稱切力中心)的位置問題. 但是由於不從全面地考慮位移問題出發,把本來有密切聯系的問題隔離開來,因此有不少作者在規定扭轉中心與彎曲中心的位置時便帶有或多或少的隨意性. 杜康、依立斯、斯克魯頓[2]曾經以爲扭轉中心與彎曲中心的位置只能參照不同的具體情况隨意規定. 鐵木辛柯和哥笛爾[3] 則至今還以爲扭轉中心沒有固定的位置; 列賓松[4]、鐵木辛柯和哥笛爾[3]、索柯涅柯夫[5]、斯蒂芬孫[6] 等人規定彎曲中心爲這樣的一

*1956 年 2 月 8 日收到.

點，假如外界載荷的合力經過這一點，那末截面的平均局部轉動等於零，卽

$$\iint_S \omega_z\, dx\, dy = \iint_S \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\, dy = 0\,. \tag{2}$$

但是這個定義是不能令人滿意的，因爲人們要問：爲什麽取無權平均而不取某種有權平均呢？同時這個定義的實用價値也是可疑的，因爲平均局部轉動等於零，並不表示柱體內部便沒有扭轉作用.

在 1935 年，屈萊弗茨[7] 從應變能可叠加的條件出發，證明扭轉中心與彎曲中心是同一點，它的坐標是（其中 φ 是扭曲函數）：

$$x_0 = \frac{1}{I_x}\iint_S y\,\varphi\, dx\, dy, \quad y_0 = -\frac{1}{I_y}\iint_S x\,\varphi\, dx\, dy\,. \tag{3}$$

作者認爲屈萊弗茨的結果是合理的．但是或許由於屈萊弗茨的說理不能令人信服，因此以後同意他的見解的人很少．到 1947 年，威恩斯坦[8]曾經根據雪加拉 (P. Cicala) 的想法來說明屈萊弗茨的公式．威恩斯坦證明，公式 (3) 也可由下列條件求得：

$$\iint_S w^2\, dx\, dy = \min\,. \tag{4}$$

但是威恩斯坦的說明不但無助於公式 (3) 的理解，反而教人更遠離扭轉中心與彎曲中心的物理意義.

彈性薄壁桿件的扭轉中心和彎曲中心的位置，在以前也曾有很多不同的見解．在 1936 年，符拉索夫[9] 建立了彈性薄壁桿件的約束扭轉的一般理論，從而合理地規定了扭轉中心與彎曲中心的位置．符拉索夫所得的公式也是 (3) 式．雖然符拉索夫所得的公式與屈萊弗茨的相同，但是前者在薄壁桿件方面的說理是十分令人信服的.

本文不是個別地來討論扭轉中心與彎曲中心的問題，而是把聖維南的六個問題（卽軸向伸縮、兩個方向的純彎曲、扭轉、兩個方向上的彎曲等六個問題）當作一個整體，而來討論問題中的絕對位移．我們首先規定了"梁的一端夾住"這句話中夾住二字的意義．於是進一步明確地規定了任一截面在三個方向上的移動和轉動的意義．最後我們根據這些定義規定了扭轉中心與彎曲中心的位置，證明兩者是同一點．本文求得的扭轉中心與彎曲中心的坐標的公式，與屈萊弗茨和符拉索夫的相同.

本文的說理可以直接地推廣到各向異性的和不均匀的彈性柱體的聖維南問題中去．這些問題的扭轉中心和彎曲中心還很少經人研究.

二. 懸臂梁被夾住的意義

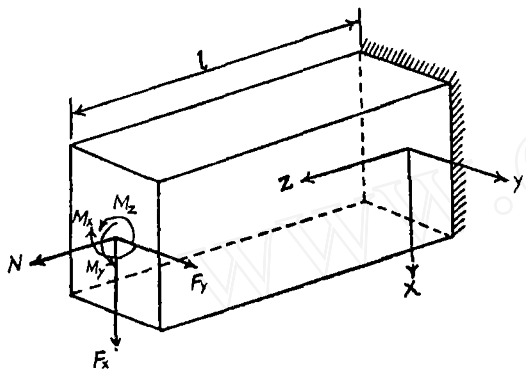

圖 1

今設有彈性柱形懸臂梁，它的一端夾住，側面懸空不受外力作用，在它的另一端截面上負担分佈載荷．取一直角坐標系 x, y, z，如圖 1 所示，使 xy 平面與夾住端截面相重，z 軸指向柱體的內部，取 x, y 軸使它們與截面的中心主軸相重．若依照彈性體力學來嚴格地建立這個問題，那末問題是找尋柱體內各點的應力和位移，使它們適合平衡方程和連續條件以外，再適合下列邊界條件：

在側面上：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x \cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)=0,\\&\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)=0,\\&\tau_{xz}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)=0;\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在受力端截面上 ($z=l$)：

$$\tau_{xz}=T_x(x,y),\quad \tau_{yz}=T_y(x,y),\quad \sigma_z=\Sigma(x,y); \tag{6}$$

在夾住端上 ($z=0$)：

$$u=0,\qquad v=0,\qquad w=0. \tag{7}$$

如果依照聖維南的方法來建立這個問題，那末相當於在上述嚴格的問題中放鬆(6)、(7) 兩個邊界條件，而代之以下面的一組假設和一組邊界條件[10]：

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0, \tag{8}$$

在受力端截面上 ($z=l$)：

$$\begin{aligned}&\iint_S \tau_{xz}\,dx\,dy=F_x=\iint_S T_x\,dx\,dy,\\&\iint_S \tau_{yz}\,dx\,dy=F_y=\iint_S T_y\,dx\,dy,\\&\iint_S \sigma_z\,dx\,dy=N=\iint_S \Sigma\,dx\,dy,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\iint_S y\,\sigma_z\,dx\,dy &= M_x = \iint_S y\sum dx\,dy,\\ \iint_S x\,\sigma_z\,dx\,dy &= -M_y = \iint_S x\sum dx\,dy,\\ \iint_S (x\,\tau_{yz} - y\,\tau_{xz})\,dx\,dy &= M_z = \iint_S (x\,T_y - y\,T_x)\,dx\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

根據聖維南建立的問題來求解，那末柱體內各點的應力有而且只有一個解答；這個解答的形式如下：

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{N}{A} - \frac{M_y + F_x(l-z)}{I_y}\,x + \frac{M_x - F_y(l-z)}{I_x}\,y,\\ \tau_{xz} &= F_x\,\tau^1_{xz} + F_y\,\tau^2_{xz} + M_z\,\tau^3_{xz},\\ \tau_{yz} &= F_x\,\tau^1_{yz} + F_y\,\tau^2_{yz} + M_z\,\tau^3_{yz}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 A 爲截面的面積，I_x, I_y 爲截面的中心主慣性矩，τ^1_{xz}, τ^2_{xz}, $\cdots$, τ^3_{yz} 等六個函數只與 x, y 有關而與 z 無關，並且只與截面的形狀有關而與載荷的情況無關.

在聖維南問題的提法中沒有涉及到位移，因此根據 (10)、(11) 兩式給出的應力來求位移，位移是不能完全確定的. 其中不確定的部分是柱體整體的一個運動，共包含六個未定常數. 因此爲了決定位移，必須在夾住端上建立六個有關位移的條件，以表明該端係夾住的. 這個放鬆了的夾住的意義應和人們的常識和已有的夾住的意義不相衝突.

嚴格的夾住條件 (7) 也可以用另一種形式表述如下：不論在何種載荷情況下，在夾住端截面上

$$\iint_S (u\,\tau_{xz} + v\,\tau_{yz} + w\,\sigma_z)\,dx\,dy = 0. \tag{12}$$

因爲在嚴格地建立的問題中，$(\tau_{xz})_{z=0}$, $(\tau_{yz})_{z=0}$, $(\sigma_z)_{z=0}$ 可能有任意的數值，因此從 (12) 式可以推導出 (7) 式. 但是 (12) 式所規定的夾住的意義，可以順利地應用於聖維南問題. 在聖維南問題中，$(\tau_{xz})_{z=0}$, $(\tau_{yz})_{z=0}$, $(\sigma_z)_{z=0}$ 並不可能取任意數值，其中可以任意變化的只有 $F_x, F_y, \cdots, M_z$ 等六量. 因此將一般的解答形式 (11) 代入 (12) 式，然後命 $F_x, F_y, \cdots, M_z$ 等六量的係數等於零，我們得到聖維南問題中夾住的意義如下：

在夾住端上：

$$\left.\begin{aligned}&\iint_S w\,dx\,dy=0,\quad \iint_S xw\,dx\,dy=0,\quad \iint_S yw\,dx\,dy=0,\\&\iint_S (u\,\tau_{xz}^1+v\,\tau_{yz}^1)\,dx\,dy=0,\\&\iint_S (u\,\tau_{xz}^2+v\,\tau_{yz}^2)\,dx\,dy=0,\\&\iint_S (u\,\tau_{xz}^3+v\,\tau_{yz}^3)\,dx\,dy=0.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

這六個條件恰恰足以決定位移中的六個未定常數.

三. 橫截面的移動和轉動

懸臂梁負担外界載荷後,各點都有了位移. 一般講來形變前原在同一横截面上的各點,在形變後落於某一曲面上. 所以嚴格地說來,横截面的變動不能用移動和轉動(卽剛體運動)來表示的. 但是在聖維南的問題中,我們可以合理地規定横截面的移動和轉動的意義,使它不與常識及已有的意義衝突並具有一定的實用意義.

在聖維南問題中,合力和合力矩是首先規定的東西. 有了力要求對應的位移,一般可用下面的定義:

$$廣義力 \times 廣義位移 = 所作之功.\tag{14}$$

應用這個定義來決定某横截面 $z=k$ 的移動和轉動,可先作一截面 $z=k$ 將其中的應力顯露出來(所得的情况與圖 1 相同,只要將圖中的 l 改爲 k),於是該截面的位移和轉動便可規定如下:

$$\left.\begin{aligned}&截面上的合力 \times 截面的移動 = 合力所作之功,\\&截面上的合力矩 \times 截面的轉動 = 合力矩所作之功.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

例如設 U 爲横截面沿 x 軸向的移動. 因爲截面上 x 軸向的合力是 F_x, 而它所作之功是

$$\iint_S F_x(u\,\tau_{xz}^1+v\,\tau_{yz}^1)\,dx\,dy.$$

所以根據 (15) 式便得到

$$U=\iint_S (u\,\tau_{xz}^1+v\,\tau_{yz}^1)\,dx\,dy.\tag{16}$$

同様可以證明,根據 (15) 式所決定的截面沿 y, z 軸的移動 V, W 以及繞 x, y, z, 三軸的轉動 ψ_x, ψ_y, θ 各爲

$$
\left.
\begin{aligned}
V &= \iint_S (u\,\tau_{xz}^2 + v\,\tau_{yz}^2)\,dx\,dy,\\
W &= \frac{1}{A}\iint_S w\,dx\,dy,\\
\psi_x &= \frac{1}{I_x}\iint_S yw\,dx\,dy,\\
\psi_y &= -\frac{1}{I_y}\iint_S xw\,dx\,dy,\\
\theta &= \iint_S (u\,\tau_{xz}^3 + v\,\tau_{yz}^3)\,dx\,dy.
\end{aligned}
\right\}
\tag{17}
$$

這些定義與上節所規定的夾住的意義是完全一致的．根據（13）及（16）、（17）三式可知，所謂夾住便是指橫截面沒有移動和轉動．同時可以驗證，這個定義與常識及已有的意義不相衝突．例如當某一橫截面變動後仍爲一平面時，不難證明由（16），（17）式規定的移動和轉動就是平常所了解的移動和轉動．

設 $U^0, V^0, \cdots, \theta^0$ 爲受力端的位移和轉動．於是根據定義外力所作之功爲

$$
E = \frac{1}{2}\left(F_x U^0 + F_y V^0 + NW^0 + M_x \psi_x^0 + M_y \psi_y^0 + M_z \theta^0\right). \tag{18}
$$

根據能量守恆定理可知上式也就是柱體的應變能．

四．扭轉問題中的位移和扭轉中心

今設懸臂梁在受力端只承受一個扭轉力矩 M_z，其他各合力和合力矩都等於零．這個問題的聖維南解答是人所熟知的．柱體各點的應力和位移可用一個扭曲函數 $\varphi(x,y)$ 表示如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,\\
&\tau_{xz} = \frac{M_z}{D}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \quad \tau_{yz} = \frac{M_z}{D}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right),\\
&u = -\frac{M_z}{GD}(y - y_0)\,z, \quad v = \frac{M_z}{GD}(x - x_0)\,z,\\
&w = \frac{M_z}{GD}(\varphi - w_0 - y_0 x + x_0 y).
\end{aligned}
\right\}
\tag{19}
$$

式中 G 是柱體的剪切彈性模數，D 是柱體的抗扭剛度，而 x_0, y_0, w_0 爲在原問題中無法決定的常數；其中 x_0, y_0 是扭轉中心的坐標．這三個常數可以用本文提出的夾住條件（13）來決定．將（19）式代入（13）式，可見後面三個條件已經滿足而前面三個條件化爲

$$
\left.\begin{aligned}
&\iint_S (\varphi - w_0 - x_0 y + y_0 x)\, dx\, dy = 0\,. \\
&\iint_S x(\varphi - w_0 - x_0 y + y_0 x)\, dx\, dy = 0\,, \\
&\iint_S y(\varphi - w_0 - x_0 y + y_0 x)\, dx\, dy = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

注意到 x, y 軸是截面的中心主軸,從上式卽可求得

$$
w_0 = \frac{1}{A}\iint_S \varphi\, dx\, dy\,, \quad x_0 = \frac{1}{I_x}\iint_S y\varphi\, dx\, dy\,, \quad y_0 = -\frac{1}{I_y}\iint_S x\varphi\, dx\, dy\,. \tag{21}
$$

求得了 x_0, y_0, w_0 三量之後,便完全確定了各點的位移. 容易看到本文給出的扭轉中心的坐標與屈萊弗茨給出的相同.

注意到抗扭剛度 D 由下列公式給出:

$$
D = \iint_S \left\{x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) - y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\right\} dx\, dy\,, \tag{22}
$$

我們便可求得任一橫截面的三個移動和三個轉動如下:

$$
\left.\begin{aligned}
&U = \frac{M_z}{GD} y_0 z, \qquad V = -\frac{M_z}{GD} x_0 z, \qquad W = 0\,, \\
&\psi_x = 0\,, \qquad \psi_y = 0\,, \qquad \theta = \frac{M_z}{GD} z\,.
\end{aligned}\right\} \tag{23}
$$

所以柱體被扭轉後,各橫截面有繞 z 軸的轉動和沿 x, y 兩軸的移動.

五. 懸臂梁的彎曲中心

今設圖 1 中的懸臂梁在它的受力端同時負担橫向載荷 F_x, F_y 和扭轉力矩 M_z,但沒有其他的載荷. 在這三種載荷作用下,端截面便有沿 x, y 軸的移動 U^0, V^0 和繞 z 軸的轉動 θ^0. U^0, V^0, θ^0 三量都必須是 F_x, F_y, M_z 的線性函數,因此可以寫成爲 [參考公式 (23)]:

$$
\left.\begin{aligned}
&U^0 = U^1 F_x + U^2 F_y + \frac{y_0 l}{GD} M_z\,, \\
&V^0 = V^1 F_x + V^2 F_y - \frac{x_0 l}{GD} M_z\,, \\
&\theta^0 = \theta^1 F_x + \theta^2 F_y + \frac{l}{GD} M_z\,.
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

現在我們來決定 θ^1 和 θ^2.

依照 (18) 式,本問題中柱體的應變能,卽外力所作之功爲

$$E=\frac{1}{2}\left\{F_x\left(U^1F_x+U^2F_y+\frac{y_0 l}{GD}M_z\right)+F_y\left(V^1F_x+V^2F_y-\frac{x_0 l}{GD}M_z\right)+\right.$$
$$\left.+M_z\left(\theta^1F_x+\theta^2F_y+\frac{l}{GD}M_z\right)\right\}. \tag{25}$$

然而彈性體中的應變能跟外力作用的次序無關，因此我們可以想像在懸臂梁的受力端，先加上橫向載荷 F_x 和 F_y，然後再加上扭轉力矩 M_z. 這樣先加 F_x 和 F_y 時，外力所作之功爲

$$E_1=\frac{1}{2}\left\{F_x(U^1F_x+U^2F_y)+F_y(V^1F_x+V^2F_y)\right\}. \tag{26}$$

然後再加 M_z 時，外力所作之功爲

$$E_2=\frac{1}{2}M_z\cdot\frac{l}{GD}M_z+F_x\frac{y_0 l}{GD}M_z-F_y\frac{x_0 l}{GD}M_z. \tag{27}$$

因此梁中的應變能也等於

$$E=\frac{1}{2}\left\{F_x(U^1F_x+U^2F_y)+F_y(V^1F_x+V^2F_y)+\frac{l}{GD}M_z^2\right\}+$$
$$+F_x\frac{y_0 l}{GD}M_z-F_y\frac{x_0 l}{GD}M_z. \tag{28}$$

比較 (25),(28) 兩式可知、

$$M_z(\theta^1F_x+\theta^2F_y)=F_x\frac{y_0 l}{GD}M_z-F_y\frac{x_0 l}{GD}M_z. \tag{29}$$

這個等式是不論 F_x, F_y, M_z 等於何值時都是成立的，因此必有

$$\theta^1=\frac{y_0 l}{GD},\qquad \theta^2=-\frac{x_0 l}{GD}. \tag{30}$$

所以端截面繞 z 軸的轉動爲

$$\theta^0=\frac{y_0 l}{GD}F_x-\frac{x_0 l}{GD}F_y+\frac{l}{GD}M_z. \tag{31}$$

從這公式可以看到，當

$$M_z=x_0F_y-y_0F_x \tag{32}$$

時，截面便無繞 z 軸的轉動. 條件 (32) 表示外界載荷的合力經過 (x_0, y_0) 點. 由此可知 (x_0, y_0) 便是彎曲中心.

從上面的說明得到下列結論：彎曲中心與扭轉中心是同一點，它的坐標是 $x=x_0$, $y=y_0$.

應當指出，我們所以能够證明扭轉中心與彎曲中心相重，是因爲規定橫截面的移動

和轉動的意義時，係根據力和功的關係，以致可以利用能量守恆定律，導得（31）式．事實上（30）式是彈性體力學中有名的馬氏互等定理．

但是如果採用其他方式來規定横截面的移動和轉動的意義，那末便不能應用能量守恆定律，得不到馬氏互等定理． 因此卽使仍可規定扭轉中心與彎曲中心的位置，但是兩者便不一定相重了．

將（30）式代入應變能的算式（25）中，稍加整理後得到

$$E=\frac{1}{2}\left\{\left(U^1-\frac{y_0 l}{GD}\right)F_x^2+(U^2+V^1)F_xF_y+\left(V^2-\frac{x_0 l}{GD}\right)F_y^2+\right.$$
$$\left.+\frac{l}{GD}(M_z-x_0F_y+y_0F_x)^2\right\}. \qquad (33)$$

從此式可以看到，如果維持載荷的合力和方向不變（卽 F_x, F_y 不變）而變更合力的位置（卽變更 M_z），那末當合力通過彎曲中心時柱體中的應變能達最小値． 應變能可以用來表示物體中各點應力的平均強度，因此當外力通過彎曲中心時，柱體中的平均應力強度達最小値． 所以依照本文方法决定的彎曲中心，不但具有明確的幾何意義，並且還與柱體的平均應力強度有密切聯系．

參 考 文 獻

[1] Saint-Venant, B., Mémoire sur la Torsion des Prismes, avec des considerations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, *Mémoires des Savants étrangers*. **14** (1855).

[2] Ducan, W. J., Ellis, D. L. and Scruton, C., Flexural center and center of twist of an elastic cylinder, *Phil. Mag.* **16** (1933), 201—235.

[3] Timoshenko, S. and Goodier, J. N., Theory of elasticity, 1951.

[4] Лейбензон, Л. С., Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

[5] Sokolnikoff, I. S., Mathematical theory of elasticity, 1946.

[6] Stevenson, A. S., Flexure with shear and the associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross sections, *Philo. Trans. Roy. Soc. London*, A **237** (1938); 161—299.

[7] Trefftz, E., Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, *Zeit. angew. Math. Mech.* **15** (1935), 220—225.

[8] Weinstein, A., The center of shear and the center of twist, *Quart. Appl. Math.* **5** (1947), 97—99.

[9] B. З. 符拉索夫，材料力學、結構力學與彈性力學的若干問題． 中國科學院出版，1954 年．

[10] 錢偉長，聖維南扭轉問題的物理假定． 物理學報，**9** (1953)，215—219.

ON THE DISPLACEMENTS IN THE PROBLEMS OF SAINT-VENANT, AND THE CENTER OF SHEAR AND THE CENTER OF TWIST

HU HAI-CHANG

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Consider the equilibrium of an elastic cylinder fixed at one end and loaded at the other end. The solution of this problem according to Saint-Venant is well known. This solution gives a uniquely determined stress system, but the corresponding displacement contains an arbitrary rigid body motion. In this paper, we first relax the boundary conditions at the fixed end to six conditions by an energy consideration. These conditions determine the arbitrary rigid body motion in Saint-Venant's solution uniquely. Then the translations and rotations of any transverse cross section is defined by a similar energy consideration. The center of twist is defined as the point which remains fixed during the twist of the cylinder. The center of shear is defined as such a point that when the resultant of transverse loads passes through it, transverse cross sections have no rotations about the longitudinal axis. It is shown that these two centers have identical coordinates

$$x_0 = \frac{1}{I_x} \iint_S y\varphi \, dx \, dy, \qquad y_0 = -\frac{1}{I_y} \iint_S x\varphi \, dx \, dy, \tag{21}$$

where φ is the warping function in the problem of torsion, and I_x, I_y are the principal moments of inertia of the cross section. It is proved that for constant transverse loads with parallel directions, the one which passes through the center of shear produces minimum strain energy in the cylinder.