

# Euler 方程的双分布函数格子 Boltzmann Godunov 方法\*

阎广武

(中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 北京 100080)

胡守信 施卫平

(吉林大学数学系力学教研室, 长春 130023)

**摘 要** 应用双分布函数系统, 通过 Godunov 分解, 构造了一维 Euler 方程的格子 Boltzmann 算法。解决了传统格子气固有的 GC 问题与能量方程之间的矛盾, 实现了分布函数与宏观物理量之间的一一对应。

**关键词** Euler 方程 格子 Boltzmann 方法 双分布函数 Godunov 分解  
**中图分类号** O241 O354

## 0 引 言

格子 Boltzmann 方法是一种用虚拟气体的运动模拟流体力学方程的方法<sup>[1~3]</sup>, 虽然其自身带有压缩性质(本身是气体), 但却被限制在低 Mach 数流动的范围内。最近几年, 人们开始研究可压缩流动(特别是含有激波和接触间断问题)的格子 Boltzmann 方法<sup>[4~6]</sup>。然而用传统格子 Boltzmann 方法模拟可压缩的气体流动存在一些困难:

(1) 低速度限制, 可以消除压缩因子  $D_{ij}$ , 虽解除了限制, 但是对激波的捕获能力较低, 即此类模型仅适用于无激波的可压缩流动<sup>[7]</sup>。

(2) 所谓的 IC (Ideal Case) 问题限制<sup>[8]</sup>, 二阶矩自身的要求, 导致了比热比在一维时  $\gamma = 3$  (二维时  $\gamma = 2$ ) 的理想情况。通常我们研究的气体的比热比为 1.4, 无 IC 限制是构造可压缩模型的一个基本要求。

(3) GC (General Case) 问题的引入是通过定义第三个维度上的振动能量来实现的<sup>[8]</sup>, 然而却得到一个附加的关于该振动能的守恒方程。目前构造高精度高分辨的模型尚在研究之中。

(4) 从传统的格子 Boltzmann 方程到目前的几个可压缩模型, 均存在一个共同的问题, 即模型的精度与稳定性。从模型的构造上我们发现, 一般的精度是  $O(\epsilon^2, K^2)$ , 这里的  $K$  是 Knudsen 数, 其分析的基础是建立在下面的假设上: (a) 小的 Knudsen 数, (b) 低速度。在流体力学中我们采用如下的表达式  $K = M / Re$ , ( $M$  为 Mach 数,  $Re$  为 Reynolds 数), 当  $Re$  数不能

收稿日期: 1996-10-14; 修回日期: 1997-12-17

\* 中国科学院力学研究所 LNM 开放基金资助项目

阎广武 男 34 讲师 博士 中科院力学所 LNM 开放实验室(客座) 工作单位: 吉林大学

达到所要求的量级时,上面的(a),(b)是无法保证的,模型的稳定性也比较复杂的。

可以将可压格子 Boltzmann 方法分成两类(1)纯粹的格子 Boltzmann 方法(full lattice Boltzmann 方法<sup>[8-10]</sup>), (2)差分型的格子 Boltzmann 方法<sup>[11]</sup>。与文献[11]一样的方法,借助于宏观上的概念,构造 Euler 方程的差分方程,其在概念上与传统的格子气有所差别,模型的精度与稳定性分析是针对差分方程而言的。

本文着重介绍双分布函数系统的思想,将结点的分布函数与单元的分布函数分开,在宏观上是将密度、动量、能量与其相应的流分开,分别构造各自的对应关系,通过 Godunov 分解<sup>[12]</sup>,实现方程的求解。

文中思想可以很容易地推广到二维三维问题上,也可将其推广到其它格式上,我们将在后文中陆续给出。

### 1 双分布函数系统

对于一维的 Euler 方程,我们引入 5-Bit 的双分布函数系统。将一维的空间 $[a, b]$ 离散成  $m$  个等距的格子,  $x = (b - a) / m$ ,时间离散成  $t = n \Delta t$ ,这里  $n = 1, 2, \dots$ ,我们称每段为单元

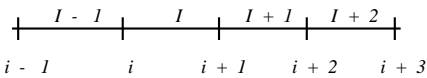


图 1 单元与结点坐标

Fig. 1 coordinate of elements and nodes

(记为  $D$ ),单元  $I$  与单元  $I+1$  的界面为结点  $i$ (或记为  $I+1/2$ ),则  $I = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, m+1$ (如图 1)。宏观量是定义在单元上的,而宏观量的流是定义在结点上的。其物理意义是明显的,结点上没有定义密度,动量,能量,而有这些量的流。单元量的变化来自两方面:(1)自身的非正常

性,(2)边界上流的存在。因此表征物理量的是单元;而表征流的是结点。

#### 1.1 5-Bit 单元分布函数

单元上的物理量为  $u, u^2/2 + e$ ,定义时刻  $n$ ,单元  $I$ ,方向  $\alpha$  的分布函数  $f_I^n(\alpha)$  满足

$$\sum_{\alpha} f_I^n(\alpha) = n \tag{1}$$

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} f_I^n(\alpha) = (u)_{\alpha}^n \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{2} |C_{\alpha}|^2 f_I^n(\alpha) = \frac{1}{2} (u^2)_{\alpha}^n + (e)_{\alpha}^n \tag{3}$$

其中  $C_0 = 0, C_1 = c, C_2 = -c, C_3 = kc, C_4 = -kc, k = 2$ ,我们取  $f_I^n(3) = f_I^n(4) = 0$  则从(1)~(3)式可以解出分布函数和宏观物理量(略去脚标  $I$  和  $n$ )

$$f(0) = -\frac{2}{c^2} (\frac{1}{2} u^2 + e) \tag{4}$$

$$f(1) = e \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{c^2} (\frac{1}{2} u^2 + e) + \frac{u}{c} \right] \tag{5}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{c^2} (\frac{1}{2} u^2 + e) - \frac{u}{c} \right]_{sc} \tag{6}$$

$$f(3) = f(4) = 0 \tag{7}$$

$$= f(0) + f(1) + f(2) \tag{8}$$

$$u = \frac{c(f(1) - f(2))}{f(0) + f(1) + f(2)} \quad (9)$$

$$e = \frac{c^2}{2} \frac{f(0)f(1) + f(0)f(2) + 4f(1)f(2)}{(f(0) + f(1) + f(2))^2} \quad (10)$$

## 1.2 结点的分布函数

结点的密度流、动量流、能流分别为  $RU, RU^2 + P, \frac{1}{2}RU^3 + REU + PU$ , 其中  $P = (k-1)RE$ 。定义结点分布函数  $F_i^n(\cdot)$ , 其中  $i=0,1,2,3,4$ ;  $F_i^n(\cdot)$  的定义为

$$\sum_C F_i^n(\cdot) = RU \quad (11)$$

$$\sum_C C F_i^n(\cdot) = RU^2 + P \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \sum_C C^2 F_i^n(\cdot) = \frac{1}{2}RU^3 + REU + PU \quad (13)$$

我们引入如下假设

$$F_i^n(0) = 0 \quad (14)$$

$$F(1) + F(2) = k[F(3) + F(4)] \quad (15)$$

(14) 式的物理意义是静止粒子不产生流, (15) 式的物理意义是速度大的与速度小的流在能级上是均分的。

(11), (12), (13), (15) 式组成的关于  $F_i^n(\cdot)$  的方程组, 其系数矩阵  $A$  的行列式为  $\det A = -4k^2(k^2 - 1)(k + 1)$ , 不难给出  $F_i^n(\cdot)$  的解

$$F(0) = 0 \quad (17)$$

$$F(1) = \frac{1}{2c^3(k^2 - 1)} [c^2 k^2 RU - (RU^3 + 2RUE + 2PU) + (k - 1)c(RU^2 + P)] \quad (18)$$

$$F(2) = \frac{1}{2c^3(k^2 - 1)} [-c^2 k^2 RU + (RU^3 + 2RUE + 2PU) + (k - 1)c(RU^2 + P)] \quad (19)$$

$$F(3) = \frac{1}{2kc^3(k^2 - 1)} [-c^2 RU + (RU^3 + 2RUE + 2PU) + (k - 1)c(RU^2 + P)] \quad (20)$$

$$F(4) = \frac{1}{2kc^3(k^2 - 1)} [c^2 RU - (RU^3 + 2RUE + 2PU) + (k - 1)c(RU^2 + P)] \quad (21)$$

## 1.3 双分布函数的性质

双分布函数模型是考虑到物理特点而引入的, 我们将物理量定义在单元上, 而流是结点上的, 不使用单元的量定义。当然两者存在联系, 这需在分解之后才得到。因此, 作为单元分布函数的定义不应包括结点上的流, 能量的定义与动量流也就不存在矛盾, 即无 IC 限制了。不需要引入静止粒子的振动能, 振动能的守恒方程不存在了。相对而言模型的约束少了, 更容易、更简单些。

该模型的单元分布函数与单元上的物理量是一一对应的, 从而将复杂的 Euler 方程的差分格式转化成简单的格子 Boltzmann 方程的运算。

## 2 迭代方程与 Godunov 分解

我们研究一维 Euler 方程是

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial (\frac{1}{2} u^2 + e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2} u^3 + pu + ue) = 0 \quad (24)$$

$$p = (-1) e \quad (25)$$

将上面方程在区域  $D = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$  上积分有

$$\int_D (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}) dx dt = 0 \quad (26)$$

$$\int_D [\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 + p)}{\partial x}] dx dt = 0 \quad (27)$$

$$\text{理意} \int_D [\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} u^2 + e) + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2} u^3 + pu + ue)] dx dt = 0 \quad (28)$$

应用 Green 公式将其化成环路积分有

$$\int_S dx - (u) dt = 0 \quad (29)$$

$$\int_S u dx - (u^2 + p) dt = 0 \quad (30)$$

$$\int_S (\frac{1}{2} u^2 + e) dx - (\frac{1}{2} u^3 + pu + ue) dt = 0 \quad (31)$$

应用中点公式, 并将单元量与结点量分开, 有

$$u_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(RU)_{i+1} - (RU)_i] \quad (31)$$

$$(u)_{i+1/2}^{n+1} = (u)_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(RU^2 + P)_{i+1} - (RU^2 + P)_i] \quad (32)$$

$$(\frac{1}{2} u^2 + e)_{i+1/2}^{n+1} = (\frac{1}{2} u^2 + e)_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\times [(\frac{1}{2} RU^3 + PU + RUE)_{i+1} - (\frac{1}{2} RU^3 + PU + RUE)_i] \quad (33)$$

于上面方程组等价的双分布函数的迭代方程为

$$f_{i+1/2}^{n+1}(\cdot) = f_{i+1/2}^n(\cdot) - C \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1}^n(\cdot) - F_i^n(\cdot)] \quad (34)$$

(34) 式是双分布函数系统的迭代方程, 通过 Godunov 分解<sup>[12]</sup>, 可以将  $F_i^n$  表示成单元分布函数的形式。

## 3 Sod 问题

作为算例, 我们计算了一维的 Sod 问题<sup>[13]</sup>, 其初条件在左、右两边数值为

$(L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$ ,  $-0.5 < x < 0$ ;  $(R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1)$ ,  $0 < x < 0.5$

图 2. (a) ~ (d) 给出了密度, 压力, 速度, 内能的计算结果与理论值的比较。从图中可看出激波和密度、温度的接触面, 它们的宽度与其它经典 Godunov 算法的结果相同, 激波位置与理论值一致。与经典的 Godunov 算法有一样的问题, 接触面的过渡区较宽。

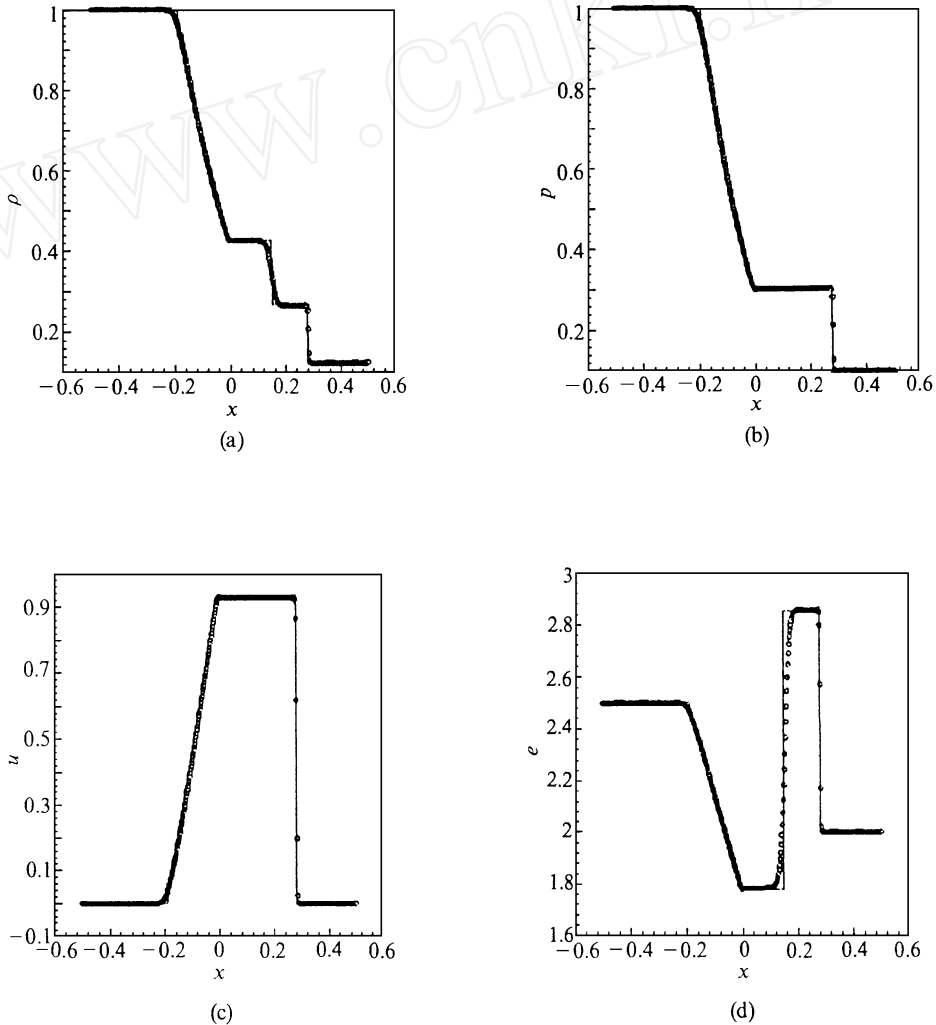


图 2 数值结果与理论结果的比较

$p, u$  和  $e$  的精确解 (实线), 格子 Boltzmann 方法计算结果 (圆), 横坐标均为位置  $x$ ; 网格为:  $N = 500$ . 时间为 200 步,  $t = 0.0008$ . 参数为:  $\gamma = 1.4$ ;  $c = 1$ ;  $k = 2.0$

Fig. 2 Comparisons between numerical and theoretical results

exact solution (line) and simulation results (circles) of  $p, u$  and  $e$  are shown. Horizontal coordinate axis are position  $x$ , Lattice size  $N = 500$ , output at 200 time steps. Parameters:  $\gamma = 1.4$ ;  $c = 1$ ;  $k = 2.0$

## 4 结论

(1) 为了得到宏观的 Euler 方程, 我们根据物理概念将分布函数分成两种, 即单元和单元边界的分布函数, 从而解决了微观与宏观的对应, 将 Euler 方程的求解转化成分布函数的求解。

(2) 我们采用了这样一个想法, 即分布函数满足 (34) 式, 而不是平衡态分布函数满足 (34) 式, 使 Euler 方程在差分的形式下很容易地得以恢复, 这种想法在文献 [11] 中也有所体现。

(3) 本文着重给出双分布函数的概念, 使用了一阶精度的 Godunov 格式, 这仅是一个初步的工作, 可以应用这种方法构造高阶精度高分辨格式。

致谢 在本文的研究过程中与金希卓教授进行了有益的讨论, 谨此致谢

### 参考文献

- 1 Frisch U, et al. *Phys Rev Lett*, 1986, **56**:1505 ~ 1508.
- 2 Qian Y H, d'humieres D and Lallemand P. *Europhys Lett*, 1992, **17**(6) :479 ~ 484.
- 3 Chen H D, Chen S Y and Matthaeus M H. *Phys Rev A*, 1992, **45**:5339 ~ 5342.
- 4 Alexander F J, Chen H D et al. *Phys Rev A*, 1992, **46**:1967 ~ 1970.
- 5 Qian Y H and Orszag S A. *Europhys Lett*, 1993, **21**(3) :255 ~ 259.
- 6 Qian Y H and Orszag S A. Numerical simulation of weakly compressible Kolmogorov flow with kinetic model. 1994:preprint.
- 7 阎广武, 胡守信, 施卫平. 用于模拟弱可压缩 N-S 方程的格子气模型. 吉林大学自然科学学报, 1997, **1**:1 - 6.
- 8 Ancona M G. *J Comput Phys*, 1994, **115**:107 ~ 120.
- 9 Hu Shouxin, Yan Guangwu, Shi Weiping, et al. A lattice Boltzmann model for compressible perfect gas. *Acta Mechanica Sinica(English Series)*, 1997, **3**:314 ~ 322.
- 10 阎广武, 陈耀松, 胡守信, 施卫平. 用格子 Boltzmann 方法模拟 Euler 方程. 现代力学与科技进步. 清华大学出版社, 1997, 568 ~ 572.
- 11 阎广武, 胡守信, 施卫平. 守恒型方程的差分型格子 Boltzmann 方法. 计算物理, 1997, **2**:194 ~ 197.
- 12 忻孝康, 刘儒勋, 蒋伯诚编著. 计算流体力学, 国防科技大学出版社, 1989.
- 13 Sod G A. *J Comput Phys*, 1978, **27**:1 ~ 31.

# AN EULER SOLVER BASED ON LATTICE BOLTZMANN GODUNOV METHOD WITH BI-DISTRIBUTION FUNCTIONS

Yan Guangwu

(LNM, Institute of Mechanics Academia Sinica, Beijing 100080)

Hu Shouxin Shi Weiping

(Department of Mathematics Jilin University, Changchun 130023)

**ABSTRACT** A new lattice Boltzmann method is proposed for constructing a 1 - D scheme by using bi-distribution functions and Godunov scheme of decomposition. The Ideal Case(IC) problem has been hence removed.

**KEY WORDS** Euler equations; lattice Boltzmann method; bi-distribution functions; Godunov scheme.