

# Sine - Gordon 方程的截断系统的同宿轨道<sup>1)</sup>

徐振源 刘曾荣\*

(无锡轻工业大学数学物理研究所, 无锡 214036)

\*(中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 苏州大学数学科学学院, 苏州 215006)

**摘要** 研究 Sine-Gordon 方程的广义渐近惯性流形上的常微分方程组,证实了在一定参数条件下存在 Wiggins<sup>[1]</sup>意义下的同宿轨道. 计算表明,与 Bishop<sup>[2]</sup>用数值计算得到的 Sine-Gordon 方程产生混沌的参数值尚有差别,考虑到同宿出现参数值往往低于混沌出现参数值,故结果在定性上正确,而且改进了文[1]中的结果.

**关键词** 无穷维动力系统, 广义渐近惯性流形, 同宿轨道, 混沌

## 引言

讨论时空系统的动力学行为是非线性科学面临的一个重大挑战. 对于以耗散偏微分方程为代表的无穷维动力系统, R. Temám 等提出了一种研究方向<sup>[3]</sup>. 他们的主要思想是利用耗散性把无穷维系统约化为有限维系统,然后用动力系统理论和方法进行研究<sup>[4]</sup>. 虽然从理论上已经证明了这个想法是成立的,但由于给不出约化系统形式,因而无法对其动力学行为进行深入研究.

Sine-Gordon 方程是一个典型的非线性偏微分方程. 文[2]详细数值研究了如下方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = (-u_t + \cos t) \quad (1)$$

$$u(x = L/2, t) = u(x = -L/2, t), u(x, t) = u(-x, t) \quad (2)$$

把  $t$  作为可变参数,其它参数固定. 结果表明,在  $L$  很大范围内空间结构是由前两模态决定,时间演化上可以出现锁频于  $\cos t$  的周期解和混沌. 为此,文[2]提出了一个两模截断系统进行分析,但尚不能对混沌产生机理作出解释. Wiggins 在文[1]中给出了一种讨论四维问题中同宿轨道理论并用此对文[2]中两模截断系统进行了分析,为了得到同宿轨道的存在,他不得不人为地加上一项阻尼项,并假定(1)中  $\cos t$  为负值,这样得到的理论结果当然与事实是不合的. 换句话至今尚没有办法用低维混沌产生来说明 Sine-Gordon 方程混沌解的产生.

我们曾对(1)和(2)作过讨论. 首先推广渐近惯性流形概念,提出了广义渐近惯性流形<sup>[5]</sup>,然后导出了(1)和(2)在广义渐近惯性流形上的常微分方程组形式,证明了前两模构成一个不变子空间,在这两个模上的常微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 c}{dt^2} + \mu^2 \frac{dc}{dt} + c - \frac{1}{3!} \left[ c^3 \operatorname{th} \frac{3cb_1^2}{2} \right] &= \mu^2 \cos t \\ \frac{d^2 b_1}{dt^2} + \mu_a^2 c \frac{db_1}{dt} + \gamma \left[ 1 + \left( \frac{2c}{L} \right)^2 \right] b_1 - \frac{1}{3!} \left[ 3c^2 b_1 + \frac{3b_1^3}{4} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>1)</sup>国家自然科学基金资助项目

1996 - 12 - 16 收到第一稿,1997 - 11 - 10 收到修改稿.

其中  $\mu^2 = \dots$  . 进一步用数值方法证实了(3)具有与文[2]相同的时空结构(除时间上混沌外), 且发生分叉的参数值是一致的<sup>[6~8]</sup>.

本文在上述工作基础上, 借助于文[1]的方法讨论了(3)出现同宿轨道的可能性, 并与文[2]的结果进行比较, 结果发现同宿轨道出现参数值与文[2]中混沌解出现参数值尚有差别. 考虑到同宿轨道与混沌解之间区别, 这种差别是合理的. 同时我们的结果显然比文[1]合理, 而且似乎是第一个解释这种现象的理论结果.

### 1 式(3)的类作用 ——角变换

设  $t = \tau, 1 = \mu^2 + \mu^2 \tau, 1 + \left( \frac{2}{L} \tau^2 = \mu^2 + \mu^2 \tau, < 1, \tilde{\tau} = \tau / \mu, \right.$  并假定在解形式为

$$\left. \begin{aligned} c &= \mu B_0(\tau) e^{i\tau} + c.c \\ b_1 &= \mu B_1(\tau) e^{i\tau} + c.c \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 c.c 代表共轭项. 把(4)代入(3), 可得到方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial \tau} &= i \left[ \frac{1}{2} i B_0 + \frac{0}{2} B_0 - \frac{1}{4} \left( B_0^2 \bar{B}_0 + \frac{1}{\mu} \bar{B}_0 B_1^2 + B_0 B_1 \bar{B}_1 - \frac{i}{4} \right) \right] \\ \frac{\partial B_1}{\partial \tau} &= i \left[ \frac{1}{2} i B_1 + \frac{1}{2} B_1 - \frac{3}{4} \left( B_0^2 \bar{B}_1 + 2 B_0 \bar{B}_0 B_1 + \frac{3}{4} B_1^2 \bar{B}_1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

把(5)改写为 Hamilton 系统的扰动形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial \tau} &= i \left[ \frac{1}{2} i B_0 + \frac{0}{2} B_0 - \frac{1}{4} B_0^2 \bar{B}_0 - \frac{3}{16} \bar{B}_0 B_1^2 - \frac{3}{8} B_1 \bar{B}_1 B_0 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} B_1 \bar{B}_1 B_0 + \frac{2}{4} \bar{B}_0 B_1^2 \right] - \frac{i}{4} \tilde{\tau} \\ \frac{\partial B_1}{\partial \tau} &= i \left[ \frac{1}{2} i B_1 + \frac{1}{2} B_1 - \frac{3}{8} B_1 B_0 \bar{B}_0 - \frac{3}{16} \bar{B}_1 B_0^2 - \frac{3}{16} B_1^2 \bar{B}_1 + \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{4} \bar{B}_1 B_0^2 + \frac{4}{4} B_1 B_0 \bar{B}_0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $\tau_1 = \frac{1}{8}, \tau_2 = \frac{1}{16}, \tau_3 = -\frac{1}{16}, \tau_4 = -\frac{1}{8}, \wedge = \dots, \wedge = \tilde{\tau}$ . 将(6)右边的带的项作扰动项, 去掉这些扰动项后(6)为一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{16} B_0^2 \bar{B}_0^2 + \frac{3}{16} B_1 \bar{B}_1 B_0 \bar{B}_0 + \frac{3}{16} B_1^2 \bar{B}_1^2 + \\ &\quad \frac{3}{64} (B_1^2 \bar{B}_0^2 + \bar{B}_1^2 B_0^2) - \frac{1}{4} B_1 \bar{B}_1 - \frac{0}{4} B_0 \bar{B}_0 \end{aligned} \quad (7)$$

### 作类作用 ——角变换

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= |B_0| e^{i\tau}, \quad B_1 = (x + iy) e^{i\tau} \\ I &= \frac{1}{2} (|B_0|^2 + |B_1|^2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hamilton 量(7)成为

$$H_0 = \frac{1}{4} I^2 + \frac{1}{8} (x^2 + y^2) I - \frac{5}{64} (x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{16} I(x^2 - y^2) -$$

$$\frac{3}{32}(x^4 - y^4) - \frac{1}{4}(1 - \alpha)(x^2 + y^2) - \frac{0I}{2} \quad (9)$$

对应于(9)的 Hamilton 运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_0}{\partial y} = -\frac{I}{8}y - \frac{5}{16}y(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}y^3 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)y \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x} = -\frac{5I}{8}x + \frac{5}{16}x(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}x^3 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)x \\ \dot{r} &= \frac{\partial H_0}{\partial r} = 0 \\ \dot{I} &= -\frac{\partial H_0}{\partial I} = -\frac{I}{2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{2}0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

通过冗长计算,得到对应于式(6)在新变量下的形式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial y} + (1 + 2)x^2y + (1 - 2)y^3 + \\ &\quad 3y(2I - x^2 - y^2) - 4y(2I - x^2 - y^2) - \frac{\wedge}{2}x \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x} - (1 + 2)x^3 - (1 - 2)y^2x + \\ &\quad 3x(2I - x^2 - y^2) + 4x(2I - x^2 - y^2) - \frac{\wedge}{2}y \\ \dot{r} &= -\frac{\partial H_0}{\partial I} - \frac{\partial H_1}{\partial I} + (1 + 2)x^2 + (1 - 2)y^2 \\ \dot{I} &= \frac{\partial H_1}{\partial r} - I^\wedge - 22xy(2I - x^2 - y^2) + 32xy(2I - x^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中

$$H_1 = \frac{1}{4} \sqrt{2I - x^2 - y^2} \cos r$$

## 2 系统式(11)的分析

先分析式(10)的不变流形结构. 由于  $\dot{I} = 0$ , 故  $x$  和  $y$  方程解耦可独立讨论

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{I}{8}y - \frac{5}{16}y(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}y^3 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)y \\ \dot{y} &= -\frac{5I}{8}x + \frac{5}{16}x(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}x^3 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)的奇点为

$$(0, 0), (0, \pm \sqrt{2I + 8(1 - \alpha)}), \left( \pm \sqrt{\frac{1}{11}[10I - 8(1 - \alpha)]}, 0 \right)$$

另一组满足  $x^2 + y^2 = 2I$  的奇点, 由于不满足文[2]中所讨论参数条件, 故这儿不必考虑.

用线性化分析方法得到  $(0, 0)$  为鞍点的条件是

$$I > \frac{4}{5}(1 - \alpha) \text{ 或 } I < -4(1 - \alpha) \quad (13)$$

注意到  $\mu_1 > 0$ , 应取条件

$$I > \frac{4}{5} (\mu_1 - \mu_0) \tag{14}$$

在此条件下, 可判定其余 4 个奇点为中心.

另外注意到过  $(0, 0)$  的  $H_0 = \frac{1}{4} I^2 - \frac{\mu_0 I}{2}$ ,  $H_0$  关于  $x$  轴和  $y$  轴对称, 因而对应于  $h = \frac{1}{4} I^2 - \frac{\mu_0 I}{2}$ , 还存在一对连结  $(0, 0)$  的同宿轨道, 于是可得到 (12) 的相图为图 1.

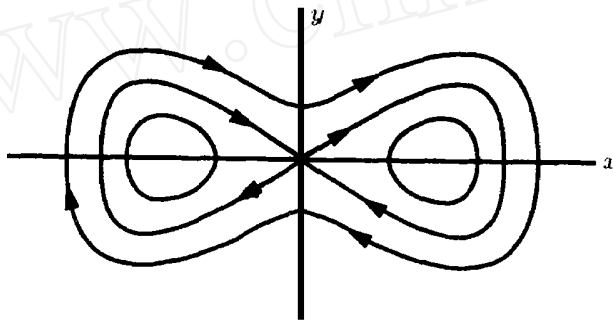


图 1

Fig. 1

这样对于四维系统 (10) 存在正规双曲不变流形

$$\mu = \left\{ (x, y, I, r) \mid x = y = 0, I > \frac{4}{5} (\mu_1 - \mu_0) \right\} \tag{15}$$

记  ${}^s(\mu)$  和  ${}^u(\mu)$  为  $\mu$  的稳定和不稳定流形, 则  $\mu$  在四维空间存在三维同宿轨道构成不变集

$${}^s(\mu) \quad {}^u(\mu) = \left\{ (x, y, I, r) \mid H_0(x, y, I) - H_0(0, 0, I) = 0, I > \frac{4}{5} (\mu_1 - \mu_0) \right\} \tag{16}$$

为了计算  ${}^s(\mu)$   ${}^u(\mu)$  上同宿轨, 令

$$x + iy = \sqrt{2} B e^i \tag{17}$$

把  $(x, y, I, r)$  系统化为  $(B, \theta, I, r)$  系统, 经过一系列计算得到同宿轨道解为

$$\left. \begin{aligned} B &= I + \frac{-I - 8(\mu_1 - \mu_0)}{5 + 6\cos 2\theta} \\ \text{tg } \theta &= \frac{\sqrt{5a - k^2}}{\sqrt{a + k^2}} \text{th} \left[ (\sqrt{a + k^2} \cdot \sqrt{5a - k^2}) J \right] \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

其中  $k^2 = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_0)$ ,  $a = \frac{I}{8}$ . 利用 (17) 和 (18) 就可得到在  $x, y$  坐标下的同宿轨道解.

对于式 (11), 在充分小情况下, 可选取开集

$$U = \{ (x, y, I, r) \mid |x| < \epsilon, |y| < \epsilon, \tilde{I}_1 \leq I \leq \tilde{I}_2 \} \tag{19}$$

其中  $\frac{4}{5} (\mu_1 - \mu_0) < \tilde{I}_1 \leq I \leq \tilde{I}_2$ , 且  $I_r = 0$   $[\tilde{I}_1, \tilde{I}_2]$ , 文 [2] 已经证明 (11) 也存在不变的正规双曲不变集

$$\mu = \left\{ (x, y, I, r) \mid \begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} x_1(I, r) \\ y_1(I, r) \end{cases} + O(\epsilon^2), \tilde{I}_1 \leq I \leq \tilde{I}_2 \right\} \tag{20}$$

它有与  $s_{loc}(\mu)$  和  $u_{loc}(\mu)$  充分接近的局部稳定流形和局部不稳定流形.

### 3 共振区附近的动力学行为

在  $s(\mu)$   $u(\mu)$  上关于  $r$  的方程为

$$\dot{r} = -\frac{I}{2} + \frac{0}{2} \tag{21}$$

因而在  $I = I_r = 0$  处要产生共振, 对应于此共振值的  $B$  和 的解为

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{96 \ 0 \ 1 - 54 \ 0^2 - 32 \ 1^2}{(24 \ 1 - 21 \ 0) \text{ch}2 + (20 \ 1 - 12 \ 0)} \\ \text{tg} &= F_1 \text{th} \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

其中

$$F_1^2 = (9 \ 0 - 4 \ 1) / (4 \ 1 - 3 \ 0), \quad = \frac{\sqrt{4 \ 1 - 3 \ 0}}{8} \cdot \frac{\sqrt{9 \ 0 - 4 \ 1}}{8}$$

在  $I = I_r$  附近定义一个环域

$$A = \left\{ (x, y, h, r), \left[ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right] \text{系统} \left[ \begin{array}{l} x_1(I_r + \sqrt{h}) \\ y_1(I_r + \sqrt{h}) \end{array} \right] + O(\epsilon^2), |h| < c \right\} \tag{23}$$

其中  $c > 0$  为常数.  $A$  的三维稳定和不稳定流形为  $s(A)$  和  $u(A)$  与  $s(\mu)$  和  $u(\mu)$  的子集. 由于  $A$  上的动力学相对于横截于  $A$  上动力学的变化来得慢, 因而进一步引入时间尺度

$$= \sqrt{\epsilon} \tag{24}$$

这样可以导出  $A$  上的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{h} &= -\epsilon^0 \wedge - \frac{\sqrt{2} \ 0}{4} \wedge \sin r - \sqrt{\epsilon} \left\{ \wedge + \frac{1}{4} \frac{\wedge}{\sqrt{2} \ 0} \sin r \right. \\ \dot{r} &= -\frac{h}{2} - \sqrt{\epsilon} \frac{\wedge}{4} \frac{1}{\sqrt{2} \ 0} \cos r \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

其中“ $\wedge$ ”表示对  $\epsilon$  求导.

当(25)右端带 $\sqrt{\epsilon}$ 的项去掉时, (25)成为

$$\left. \begin{aligned} h &= -\epsilon^0 \wedge - \frac{\sqrt{2} \ 0}{4} \wedge \sin r \\ r &= -\frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

式(26)为一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H = \frac{1}{4} h^2 + \frac{\sqrt{2} \ 0}{4} \wedge \cos r - \epsilon^0 r \wedge \tag{27}$$

对(26)进行定性分析, 利用(27)表达式, 得到相图见图 2. 图 2 中  $p_0$  为中心,  $q_0$  为鞍点, 它们的位置分别为

$$q_0: \left( 0, -\arcsin \frac{4 \wedge \sqrt{0}}{\sqrt{2} \ \wedge} \right) \quad p_0: \left( 0, \quad +\arcsin \frac{4 \wedge \sqrt{0}}{\sqrt{2} \ \wedge} \right)$$

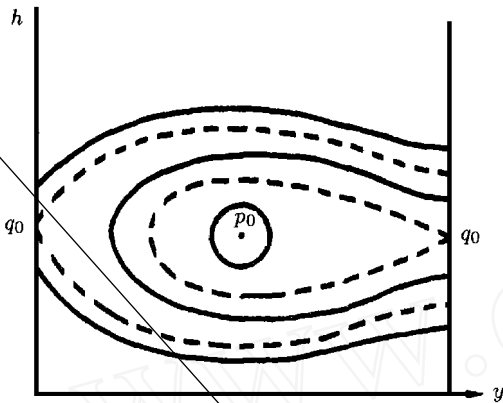


图 2  
Fig. 2

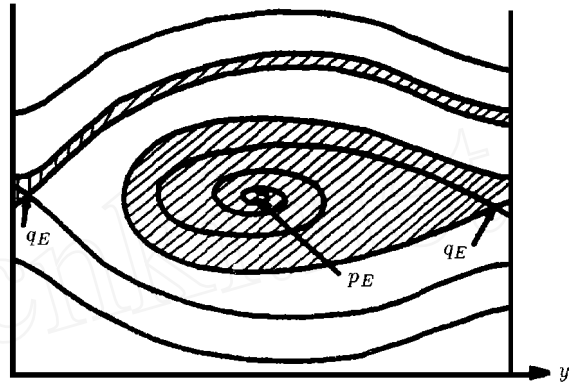


图 3  
Fig. 3

考虑扰动方程(25),当充分小情况时,(25)的相图为图 3,其中  $q, p$  为  $q_0, p_0$  小扰动的结果.

### 4 同宿轨道的存在性

以图 3 为底空间,考虑整个四维空间  $(x, y, h, r)$  中是否存在同宿轨道,可以通过判别如下的 Melnikov 函数是否有简单零点来决定.

$$M(I_r) = \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} - \left[ \frac{\partial H_0}{\partial I} (x, y, I) - \frac{\partial H_0}{\partial I} (0, 0, I) \right] \frac{\partial H_1}{\partial I} + \right.$$

$$\text{中 } \frac{\wedge}{2} \left[ x \frac{\partial H_0}{\partial x} + y \frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\partial H_0}{\partial x} [ (1 + 2) x^2 y + (1 - 2) y^3 + 3y(2I - x^2 - y^2) - 4y(2I - x^2 - y^2) ] + \right.$$

$$\left. \frac{\partial H_0}{\partial y} [ - (1 + 2) y^3 - (1 - 2) y^2 x + 3x(2I - x^2 - y^2) + 4x(2I - x^2 - y^2) - \right.$$

$$\text{其中 } \left. \left[ \frac{\partial H_0}{\partial I} (x, y, I) - \frac{\partial H_0}{\partial I} (0, 0, I) \right] [ I^{\wedge} + 2 \ 2xy(2I - x^2 - y^2) - 2 \ 3xy(2I - x^2 - y^2) ] \right\} d \quad (28)$$

计算(28)时,注意  $I = I_r = 0$ ,  $x$  和  $y$  取(22)中有关表达式,利用函数奇偶性,经过复杂的计算,最后得到

$$M(I_r) = - H_1 |_{.} - \frac{\wedge}{2} I_0 + \wedge_0 r \quad (29)$$

其中

$$- H_1 |_{.} = - \frac{1}{4} \wedge \sqrt{2} \ 0 [ \cos r(-) (\cos r - 1) - \sin r(-) \sin r$$

$$\cos(-) = \sqrt{\frac{2 \wedge^2 - 16 \wedge^2 \ 2}{2 \wedge^2}}$$

$$\sin(-) = \frac{-4 \wedge}{\sqrt{2} \wedge}$$

$$I_0 = \frac{7 \ 0 - 8 \ 1}{\sqrt{11}} \ln \left| \frac{\sqrt{11} \text{tg} + 11}{\sqrt{11} \text{tg} - 11} \right| \Bigg|_{(.)}^{(+)} + 2 \ 0$$

$$r = r(+\epsilon) - r(-\epsilon) = \dots \quad \text{且} \quad \frac{dr}{d\epsilon} = \frac{-2 - 3\cos}{8} B d$$

如果我们取文[2]中给出的参数值:  $\epsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.87$ ,  $L = 12$ , 具体计算(29)式,得到

$$M(I_r) = -0.1912 \sqrt{2\epsilon^2 - 294.3\epsilon + 12.19} + 0.827\epsilon - 12.67 \quad (30)$$

由  $M(I_r) = 0$  得到

$$\epsilon = 12.19 \quad (31)$$

即(31)成立时,系统(3)有同宿轨道,也就是(1)和(2)的广义渐近惯性流形上的常微分方程组存在同宿轨道.

## 5 讨论

根据上述分析结果,可以作如下讨论:

1) 考虑到文[2]中取  $\epsilon = 0.04$ , 由(31)可得  $\epsilon = 0.04880$  时存在同宿轨道,由于这类同宿轨道实质上已有 Smale 马蹄意义下混沌不变集,从而导致时间混沌. 而文[2]中数值给出  $\epsilon = 0.070$  出现空间二模态、时间上为混沌的解,与我们结果有一定差别. 事实上,我们知道, Melnikov 方法判定的混沌不变集与真实混沌反映的奇怪吸引子出现是有差别的,后者值往往比前者高,因而我们的结果在定性上是合理的.

2) 正如 Wiggins 自己在文[1]中指出他的理论在讨论文[2]中给出两模截断系统的同宿轨道时遇到了很大困难. 我们认为主要是该两模截断系统并没有严格理论保证,故没有充分考虑非线性项作用,导致了在讨论混沌运动中失效. 这从一个侧面反映用无穷维动力系统理论建立正确有效的有限维约化系统的重要性.

3) 本文工作和我们以前工作反映出 Sine - Gordon 方程的广义渐近惯性流形上的常微分方程组在很大的参数范围内能正确反映原系统动力学行为. 这就使我们相信无穷维动力系统理论和非线性动力学相结合方法是研究时空系统动力学行为的一个有效方法.

## 参 考 文 献

- 1 Kovaviv G, Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances, with an application to chaos in a model of the forced and damped Sine - Gordon equation, *Physica*, 1992, D59, 185 ~ 225
- 2 Bishop AR, Flesch R, Forest MG, Correlations between chaos in a perturbed Sine - Gordon equation and a truncated model system. *SIAM J Math Anal*, 1990, 21:1511 ~ 1536
- 3 Tem am R. Infinite - dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer - Verlag, 1988
- 4 刘曾荣, 徐振源, 谢惠民. 无穷维动力系统中惯性流形和吸引子, 力学进展. 1991, 21(4): 421 ~ 429 (Liu Zengrong, Xu Zhenyuan, Xie Heiming, *Adv. Mech.*, 1991, 21(4): 421 ~ 429 (in Chinese))
- 5 Foias C, Tem am R. Inertial manifolds form nonlinear evolutionary equations. *J Diff Equa*, 1988, 73: 309 ~ 353
- 6 徐振源, 刘曾荣. Sine - Gordon 方程在广义渐近惯性流形上的常微分方程. 科学通报, 1993, 38(19): 1750 ~ 1753 (Xu Zhenyuan, Liu Zengrong, Ordinary differential equation on the generalized asymptotic inertial manifold of the Sine - Gordon equation, *KeXue TongBao*, 1993, 38(19):1750 ~ 1753 (in Chinese))
- 7 Liu Zengrong, Xu Zhenyuan. A new method of studing the dynamical behavior of the Sine - Gordon equation. *Physics Letter A*, 1995, 204: 343 ~ 346
- 8 刘曾荣, 徐振源, 凌国平, 王冠香. Sine - Gordon 方程的动力学行为讨论. 非线性动力学学报, 1995 2(1): 12 ~ 30 (Liu

Zengrong, Xu Zhenyuan, Ling Guoping, Wang Guanxing. Discussion of the dynamical behaviour of the Sine - Gordon equation, *J Nonlin Dyn*, 1995, 2(1): 12 ~ 30 (inChinese)

## HOMOCLINIC ORBITS OF THE TRUNCATED SYSTEMS OF SINE - GORDON EQUATION<sup>1)</sup>

Xu Zhenyuan

( *Mathematics and Physics Institute, Wuxi Light Industry University, Wuxi 214036, China* )

Liu Zengrong

( *LNM Institute of Mechanics, Academia Sinica; Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, China* )

**Abstract** In this paper the existence of the homoclinic orbits defined by Wiggins<sup>[1]</sup> is proved, by use of ODE on the generalized asymptotic inertial manifold for the Sine-Gordon equation. We give explicit conditions (in terms of the system parameters) for the model to possess a symmetric pair of homoclinic orbits to a fixed of saddle-focus type, chaotic dynamics follow from a theorem of Silnikov. This provides a mechanism for chaotic dynamics geometrically similar to that observed by Bishop et al., namely, a random "jumping" between two spatially dependent states with an intermediate passage through a spatially independent state.

It is showed that our parameters values are little different to Bishop's values, since the parameter values for homoclinic values always smaller than the parameter values for chaos, our results are right on qualitative analysis and correct the results of (1).

**Key words** Infinite dimensional dynamical systems, generalized asymptotic, inertial manifolds, homoclinic orbits, chaos

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 16 December 1996, revised 10 November 1997.