

# 不可压缩流体三维 Rayleigh-Taylor 不稳定性的 大涡模拟\*

王丽丽<sup>①②</sup> 李家春<sup>①</sup> 谢正桐<sup>①</sup>

(<sup>①</sup>中国科学院力学研究所工程科学部、非线性力学国家重点实验室,北京 100080;

<sup>②</sup>西安交通大学建筑工程与力学学院,西安 710049)

**摘要** 对不可压缩流体三维 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题建立被动标量输运模型,用大涡模拟方法计算了正弦初始扰动和随机初始扰动下不稳定性发展各个阶段的瞬时速度场和标量场,以及混合过程中计算尺度和亚格子尺度上的平均湍流脉动能、平均剪切应力和被动标量通量;分析了界面形状、被动标量浓度分布的演化规律及气泡、尖钉速度和混合层宽度随时间的变化规律,计算结果与其他数值模拟和实验结果相吻合,验证了大涡模拟方法应用于该问题的可行性.

**关键词** Rayleigh-Taylor 不稳定性 大涡模拟 被动标量 湍流混合

在重力场或加速系统中发生的 Rayleigh-Taylor 不稳定性或冲击波通过界面时发生的 Richtmyer-Meshkov 不稳定性在各种工业流动和自然现象中广泛存在,不稳定性所诱发的湍流混合在惯性约束聚变(ICF)、超新星爆发、海洋混合层、高速碰撞、相变和燃烧等问题中具有尤其重要的意义.

Rayleigh-Taylor 不稳定性的发展可大致分为四个阶段<sup>[1]</sup>. 在第一阶段,扰动的幅值远小于扰动波长  $\lambda$ ,这时可用线性理论进行分析,界面的扰动按指数形式发展:

$$h(t) = h_0 e^{st},$$

其中  $h_0$  是初始时刻的扰动,  $s$  为扰动的指数增长率,它是密度差、黏性、表面张力的函数. 当界面扰动幅值超过  $0.1 \sim 0.4\lambda$  时,进入非线性发展阶段;轻流体向上发展为上钝的“气泡”(bubble),重流体向下发展为“尖钉”(spike). 该阶段界面的发展与三维效应和流体密度比有很大的关系;在第三阶段,非线性进一步加强,由于界面两端流体存在切向速度差,激发 Kelvin-Helmholtz 不稳定性,使尖钉的头部形成翻滚的蘑菇形状,蘑菇的伞或杆进而碎裂,形成复杂的界面形状. 此外,若存在多种尺度的扰动,不同尺度的气泡将发生竞争和吞并. 最后,由于扩散和卷挟作用,等浓度面相互交织与渗透,进入湍流混合阶段.

Rayleigh-Taylor 不稳定性具有非线性、非平稳、多尺度等多种复杂特性,各种解析和半解析方法仅能处理小变形阶段. 当界面扰动幅值发展到有限值时,主要借助实验和数值计算进行

2001-03-13 收稿,2001-05-25 收修改稿

\* 科学技术部“九五”攀登项目、国家自然科学基金(批准号:10176032)和博士后科学基金及王宽诚博士后奖励基金资助项目,计算物理实验室基金试点项目

研究. 在数值模拟方面近 20 年来发展了许多方法, 如涡量方法 (Baker, Meironh, Orszag 等<sup>[2]</sup>, Tryggvason<sup>[3]</sup>)、Level Set 方法 (Osher, Sethian 等<sup>[4,5]</sup>, Li<sup>[6,7]</sup>等)、Front Tracking 方法 (Holms, Grove, Glimm 等<sup>[8,9]</sup>)、Lattice-Boltzmann 方法 (He, Chen 等<sup>[10]</sup>)等. 但到目前为止, 即使对于最简单的不可压缩流体, 我们对这一物理现象的现象和规律也不是很清楚, 对于前 3 个阶段, 目前对其典型现象和基本规律有了一定的认识, 但缺乏定量描述的特征参数, 现有的工作集中在对正弦扰动下非线性阶段气泡的速度和随机扰动下混合层厚度的讨论; 对于湍流混合阶段则知之甚少. 数值模拟中的主要困难在于: 密度间断引起方程组出现奇异性, 容易导致格式的发散; 由于发展后期界面大变形甚至破碎, 计算中跟踪界面比较困难; 湍流混合阶段出现很小尺度的脉动分量, 数值模拟中难以精确地计算小尺度效应的影响. 除了 Lattice-Boltzmann 方法, 上述其他方法在处理湍流混合阶段均存在困难.

为了克服上述困难, 本文建立被动标量输运简化模型, 用被动标量在介质中的扩散和浓度分布来描述两层流体的混合和界面的发展. 这样处理无需跟踪流体界面, 可以有效地克服界面卷挟和破碎带来困难, 同时也符合实际上存在物质扩散的物理过程; 为了计算小尺度效应的影响, 利用大涡模拟算法, 同时考虑分子黏性作用, 采用湍动能亚格子模式, 使计算程序适合 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的各个发展阶段.

## 1 数学模型和大涡模拟算法

### 1.1 Boussinesq 近似和大涡模拟的基本方程

处于定常加速度场中的两层不同密度均匀流体, 当加速度由低密度层指向高密度层时, 即发生 Rayleigh-Taylor 不稳定性. 本文研究  $x, y$  方向无边界,  $z$  方向上下边界固定的三维 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题. 采用被动标量输运模型, 将两层流体简化为溶解或分布有稀释被动标量的单相介质, 认为流体中被动标量浓度的不同导致密度分层. 在密度差不大的情况下, 可以采用 Boussinesq 近似, 即将流体视为不可压缩, 仅在浮力项中计及密度的变化.

Rayleigh-Taylor 不稳定性发展到湍流混合阶段, 流动尺度非常小, 若采用直接数值模拟, 网格需要划分到 Kolmogoroff 尺度, 对计算机的速度和容量有太高的要求. 本文采用大涡模拟方法, 在控制方程中通过亚格子应力和亚格子被动标量通量来考虑小于网格尺度的流动的影响. 大涡模拟方法最早由气象学家 Smagorinsky (1963) 提出, 其基本思想是将比网格尺度大的大涡运动通过数值求解 N-S 方程直接计算出来, 而对于比网格尺度小的小涡对大涡的影响则通过建立模型来模拟. 作为直接数值模拟和模式理论的折衷, 大涡模拟既考虑了直接数值模拟中计算机速度和容量的限制, 同时由于小尺度涡运动受流动边界条件和大涡运动的影响小, 近似为各向同性, 所以模型的普适性相对而言较模式理论为好, 尤其是对无边界的 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题其优越性更为明显. 利用大涡模拟方法可以得到计算尺度下流场的瞬时脉动量, 是一种具有良好发展前景的数值计算方法.

采用 Leonard's 滤波方法对瞬时量  $F(x, t)$  进行空间滤波:

$$\bar{F}(x, t) = \int_D G(x - x') F(x', t) dx', \quad (1)$$

其中  $\bar{F}(x, t)$  为计算尺度下的瞬时量,  $D$  为整个流场区域, 本文水平方向滤波函数  $G(\cdot)$  取 Gauss 函数:

$$G(x - x') = \left( \sqrt{\frac{\gamma/\pi}{\Delta}} \right)^2 \exp[-(\sqrt{\gamma/\Delta})^2(x - x')^2]. \quad (2)$$

垂直方向取矩形函数:

$$G = \frac{1}{\Delta^3}, \quad (3)$$

其中  $\gamma$  为常数,  $\Delta$  为滤波器宽度. 滤波后得到的计算尺度下 Rayleigh-Taylor 不稳定性的控制方程如下:

连续性方程:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

动量方程:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \overline{\bar{v} \zeta_z} - \overline{\bar{w} \zeta_y} - \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \overline{\bar{w} \zeta_x} - \overline{\bar{u} \zeta_z} - \frac{\partial P^*}{\partial y} - \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = & \overline{\bar{u} \zeta_y} - \overline{\bar{v} \zeta_x} - \frac{a\bar{\rho}}{\rho_0} - \frac{\partial P^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \\ & - \left\langle \overline{\bar{u} \zeta_y} - \overline{\bar{v} \zeta_x} - \frac{a\bar{\rho}}{\rho_0} - \frac{\partial P^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\langle \rangle$  代表水平平均,  $a$  为加速度,  $\zeta_i$  为  $i$  方向的涡量分量,  $\rho$  为流体密度,  $\rho_0$  为两层流体的平均密度,  $\tau_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) 为亚格子雷诺应力分量, 即

$$\tau_{ij} = R_{ij} - R_{kk}\delta_{ij}/3, \quad (8)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j}, \quad (9)$$

$$P^* = \frac{\bar{p}}{\rho_0} + \frac{R_{kk}}{3} + \frac{(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_k})}{2}. \quad (10)$$

被动标量输运方程:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\overline{\bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}} - \overline{\bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}} - \overline{\bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\theta y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}. \quad (11)$$

在本问题中被动标量  $\theta$  即为流体密度  $\rho$ ,  $\tau_{\theta i}$  ( $i = x, y, z$ ) 为亚格子标量物通量.

亚格子湍流脉动能方程为

$$\frac{\partial \bar{e}'}{\partial t} = -\overline{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{e}'}{\partial x_i}} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{a}{\theta_0} \overline{w' \theta''} - \frac{\partial [\overline{u'_i (e' + p'/\rho_0)}]}{\partial x_i} - \epsilon, \quad (12)$$

其中  $\epsilon$  为湍流耗散率.

## 1.2 亚格子尺度应力模型

大涡模拟的关键是建立正确的亚格子尺度应力模型, 针对本文研究的浮力对流起主要作用的流动, 我们采用湍动能亚格子模式, 这种亚格子模式是一种梯度扩散模式, 认为涡黏性系数正比于亚格子速度尺度 ( $\bar{e}'^{1/2}$ ) 和某一个特征长度.

计及不稳定发展初始阶段分子黏性效应引起的动量、能量和质量分子扩散, 亚格子雷诺应

力和亚格子被动标量通量取为

$$\tau_{ij} = (K_M + \nu) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (13)$$

$$\tau_{\theta i} = (K_H + k) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i}, \quad (14)$$

其中运动黏性系数  $\nu$  和分子扩散系数  $k$  均取为  $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .  $K_M$  和  $K_H$  分别为动量涡黏性系数和被动标量涡黏性系数.

为了封闭方程 (12), 采用梯度扩散假定:

$$\overline{u'_i(e' + p'/\rho_0)} = -2K_M \frac{\partial \bar{e}'}{\partial x_i} \quad (15)$$

和 Kolmogoroff 理论

$$\epsilon = \frac{C \bar{e}'^{3/2}}{l}, \quad (16)$$

其中

$$C = 0.19 + \left( 0.51 \frac{l}{\Delta s} \right), \quad (17)$$

$$\Delta s = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}. \quad (18)$$

Deardorff 和 Moeng 亚格子模式认为涡黏性系数  $K_M$  和  $K_H$  分别为

$$K_M = 0.1l \bar{e}'^{1/2}, \quad (19)$$

$$K_H = \left[ 1 + 2 \frac{l}{\Delta s} \right] K_M. \quad (20)$$

根据 Deardorff<sup>[14]</sup> 的建议, 长度尺度取为

$$l = \min \left\{ \Delta s, 0.76 \bar{e}' \left( \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1/2} \right\}. \quad (21)$$

### 1.3 计算格式

本文计算模型为水平方向无边界、上下边界封闭的三维流体, 故水平方向采用周期边界条件, 垂直方向采用无滑移边界条件.  $\bar{w}$  布置在网格的上下边,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{e}'$  布置在网格的中心.

水平方向使用非交错网格的准谱方法, 将变量转换到 Fourier 空间, 求导后再经 Fourier 反变换转换到物理空间, 以第  $n$  点的  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$  为例, 有

$$\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_n = \sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} ik_m \hat{u}(k_m, y, z) \exp(ik_m x_n), \quad (22)$$

其中  $N$  为  $x$  方向网格数,  $k_m = \frac{2\pi m}{N\Delta x}$ ,  $\hat{u}$  是  $\bar{u}$  的 Fourier 变换:

$$\hat{u}(k_m, y, z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{u}(x_n, y, z) \exp(-ik_m x_n). \quad (23)$$

垂直方向采用交错网格, 二阶精度中心差分格式. 时间步进采用 Adams-Bashforth 格式.

三维区域网格划分为  $32 \times 32 \times 128$ , 两层不同密度流体各占计算区域的一半空间. 计算结果用无量纲量表示, 长度尺度取扰动波长  $\lambda$  无量纲化, 时间尺度取  $\sqrt{\lambda/a}$  无量纲化.

## 2 算法的验证

Rayleigh-Taylor 不稳定性的发展是一个过渡过程,经历了层流、失稳,最后才出现湍流混合,那么在整个过程中应用大涡模拟方法是否合理呢?如方程(13)和(14),本文在亚格子雷诺应力和亚格子被动标量通量中包括了两项:由于分子黏性产生的  $\nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$  和  $k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i}$ ,以及描述湍流效应的  $K_M \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$  和  $K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i}$ ,  $K_M$  和  $K_H$  与亚格子湍动能的均方值成正比.不稳定

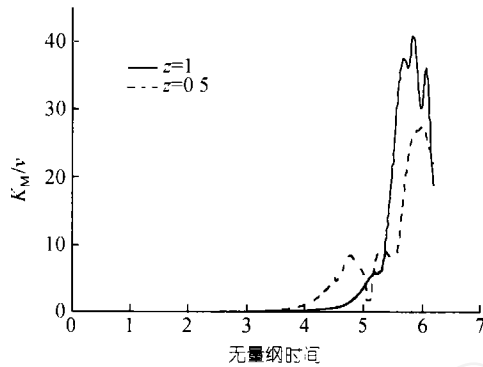


图 1  $K_M/\nu$  随时间的变化曲线

定发展初始,由于亚格子湍动能很小,如图 1 所示,有  $K_M \ll \nu, K_H \ll k$ , 即分子黏性占主要因素,  $K_M$  和  $K_H$  的作用可忽略不计.从该问题的物理机制看,此时尚未形成湍流,流动的尺度较大,网格尺寸已满足计算要求.

当不稳定性发展到湍流阶段,则有  $K_M \gg \nu, K_H \gg k$ , 这时湍流扩散占主导地位,  $K_M$  和  $K_H$  起主要作用.由此可见,本文的数学模型和计算程序可有效地处理从微小扰动到湍流混合的整个发展过程.计算结果(见下节)与其他文献的一致性也证实了本文模型和算法的可行性.

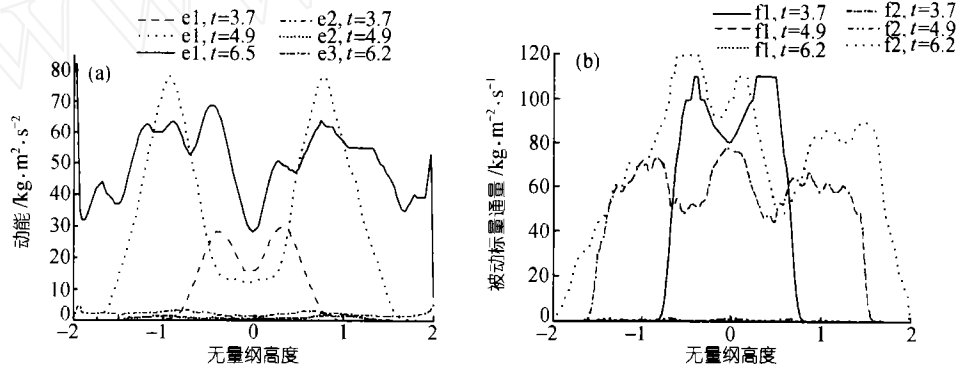


图 2 动能和被动标量通量沿高度的分布

(a) 大尺度动能(e1)和亚格子尺度动能(e2); (b) 大尺度被动标量通量(f1)和亚格子尺度被动标量通量(f2)

为了进一步考察计算程序的有效性,本文还分别计算了计算尺度和亚格子尺度下流场的动能和被动标量输运通量,并将两者进行了比较.图 2(a), (b)分别为几个时刻下动能和被动标量输运通量沿高度的分布,可以发现,计算尺度涡的瞬时速度场和瞬时标量场携带了大部分能量和输运通量,亚格子尺度涡上的相应物理量很小,即计算尺度流场捕捉到了流场的绝大部分动量和能量.

另外,为了考察算法的收敛性,本文还计算了网格划分为  $64 \times 64 \times 128$  的情况,与  $32 \times 32 \times 128$  的进行比较.如图 3 所示,网格加密后的计算结果显示, Kelvin-Helmholtz 不稳定性引起

的气泡和尖钉的翻卷程度更为明显,但不影响不稳定性发展的大尺度结构和混合的宏观特征,说明在所计算范围内本文的算法是收敛性的。

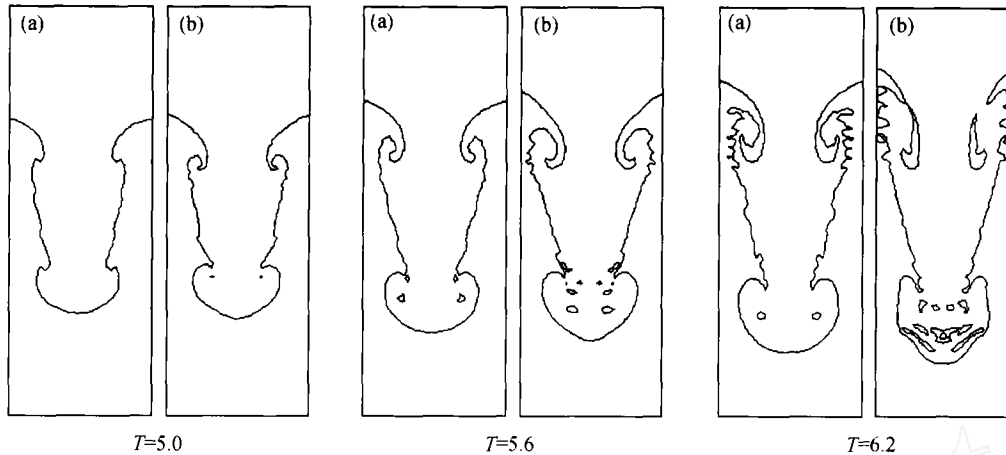


图 3 网格加密前后比较  
(a)  $32 \times 32 \times 128$ ; (b)  $64 \times 64 \times 128$

### 3 计算结果

影响 Rayleigh-Taylor 不稳定性发展的因素有两层流体的密度比、加速度、初始扰动、流体黏性和表面张力等。本文忽略表面张力的影响,控制参数取 Atwood 数  $\left( A = \frac{\rho_u - \rho_l}{\rho_u + \rho_l} \right)$  和加速度。

首先研究在二维和三维单模态正弦初始速度扰动下,界面演化和流体混合的基本规律。分别取如下二维和三维初始速度场:

二维扰动:

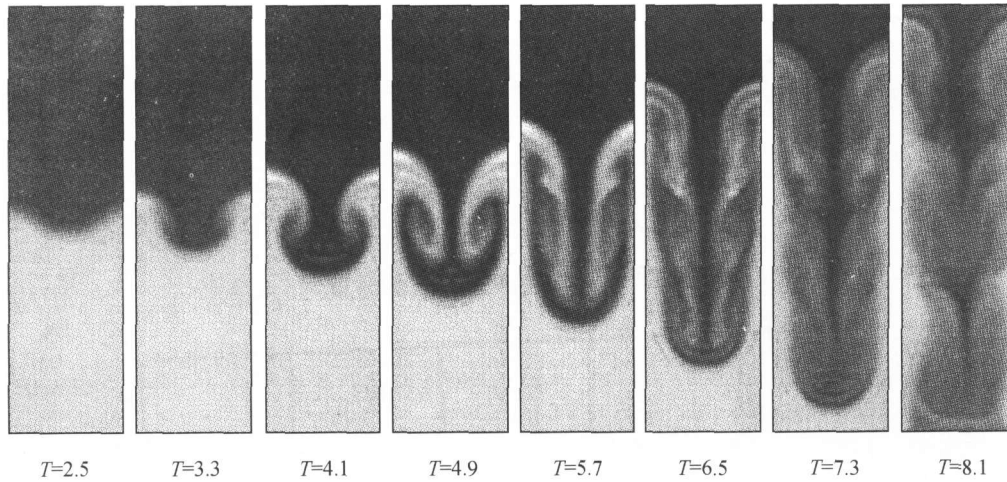
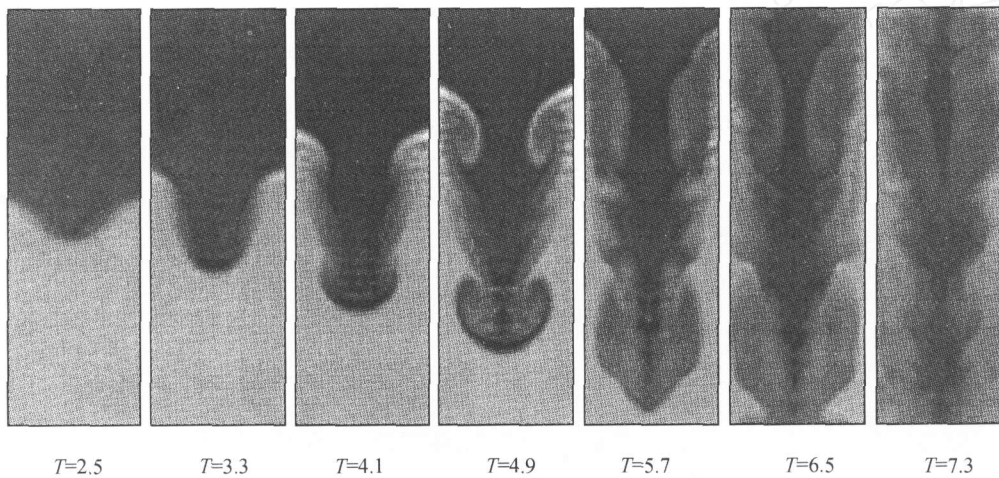
$$\begin{aligned} u_0 &= B \sin kx \cdot e^{-\alpha|z|} \cdot \text{sign}(z), \\ v_0 &= 0, \\ w_0 &= \frac{Bk}{\alpha} \cos kx \cdot e^{-\alpha|z|}. \end{aligned}$$

三维扰动:

$$\begin{aligned} u_0 &= B \sin kx \cdot e^{-\alpha|z|} \cdot \text{sign}(z), \\ v_0 &= B \sin ky \cdot e^{-\alpha|z|} \cdot \text{sign}(z), \\ w_0 &= \frac{Bk}{\alpha} (\cos kx + \cos ky) e^{-\alpha|z|}. \end{aligned}$$

初始速度场满足连续性方程。

被动标量的扩散过程分别见图 4 和图 5,其中图 4 是被动标量浓度场在  $x-z$  截面上的灰度图,图 5 是被动标量浓度场在  $x=y$  截面上的灰度图,两种情况下的其他控制参数相同,Atwood 数取为 0.1,加速度等于 10 倍的重力加速度。

图 4 二维初始正弦扰动下  $X-Z$  截面波动标量浓度场的发展图 5 三维初始正弦扰动下  $X=Y$  截面被动标量浓度场的发展

由于不考虑表面张力的作用,我们可提取被动标量浓度等于两层流体浓度均值的等值面来模拟两层流体的分界面,界面随时间的演化过程如图 6 和图 7 所示,在二维、三维初始扰动下都经历了线性发展、尖钉和气泡的形成、界面翻卷、破碎等阶段.以三维扰动情况为例,在  $t \leq 0.25$  时,属线性发展阶段,扰动幅值较小,界面保持正弦函数的形式;当  $t = 3.3$  时,已进入非线性发展阶段,轻流体向上发展形成气泡,重流体向下发展形成尖钉;当  $t = 4.1$  时,非线性进一步加强,由于界面两边存在切向速度差导致发生 Kelvin-Helmholtz 不稳定性,尖钉的头部翻卷成蘑菇形状,气泡和尖钉之间也出现一层翻卷;  $t = 4.9 \sim 5.7$  时尖钉、气泡继续发展,两层翻卷进一步加强,并且界面上出现了许多小尺度结构;  $t > 5.7$  之后界面开始破裂直至最后两层流体充分混合.进入非线性发展阶段后,二维、三维初始扰动下界面的发展有一些显著的差别,

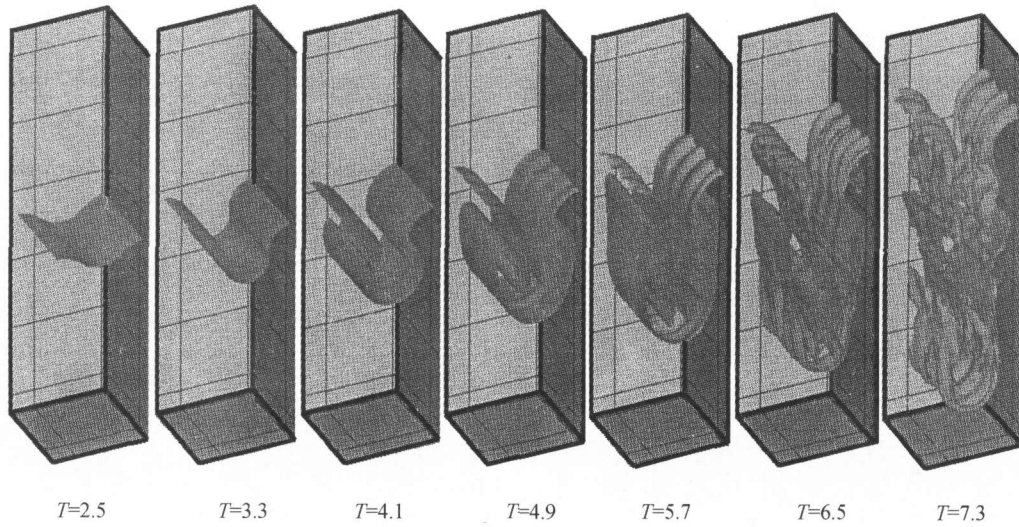


图 6 二维初始正弦扰动下界面的发展

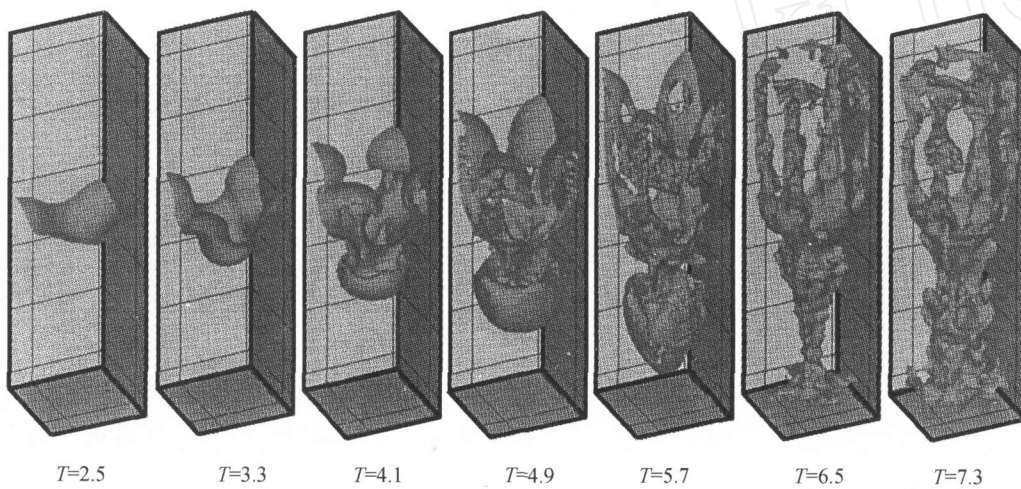


图 7 三维初始正弦扰动下界面的发展

主要表现在:

- (i) 三维初始扰动下界面发展速度更快一些;
- (ii) 二维初始扰动下由于 Kelvin-Helmholtz 不稳定性导致的尖钉翻卷现象更为明显;
- (iii) 区别于二维扰动, 三维扰动还会在气泡和尖钉之间的 4 个位置另外出现一层翻卷. 这与其他文献<sup>[10]</sup>利用数值方法得到的结论相同, 文献<sup>[10]</sup>将该位置称为鞍点. 气泡、尖钉和鞍点处的翻卷构成了三维扰动下 Rayleigh-Taylor 不稳定性发展的 3 个典型特征结构.
- (iv) 发展后期三维扰动下界面将出现更多小尺度结构, 形状更为复杂.

以上结果与用 LB 方法<sup>[10]</sup>和用 Level Set 等方法<sup>[6,7]</sup>求解 Euler 方程所得到的结果非常吻



合,并且得到了界面的细微结构. 相比这些方法,本文采用的模型和计算方法要简单得多,更重要的,由于采用大涡模拟算法,可处理湍流混合阶段.

图 8 是三维扰动下几个时刻的速度场,发展初期在原始界面附近左右对称出现两个涡,随着时间发展这两个涡逐渐拉长变形,在  $t=4.1$  时单个涡分裂为上下两个涡,同时在它们之间又逐渐形成一个较小尺度的涡,在  $t=6.5$  时,各个涡都逐渐开始扭曲变形. 随着时间的进一步增长,出现了更多更小尺度的涡结构,最后达到湍流混合.

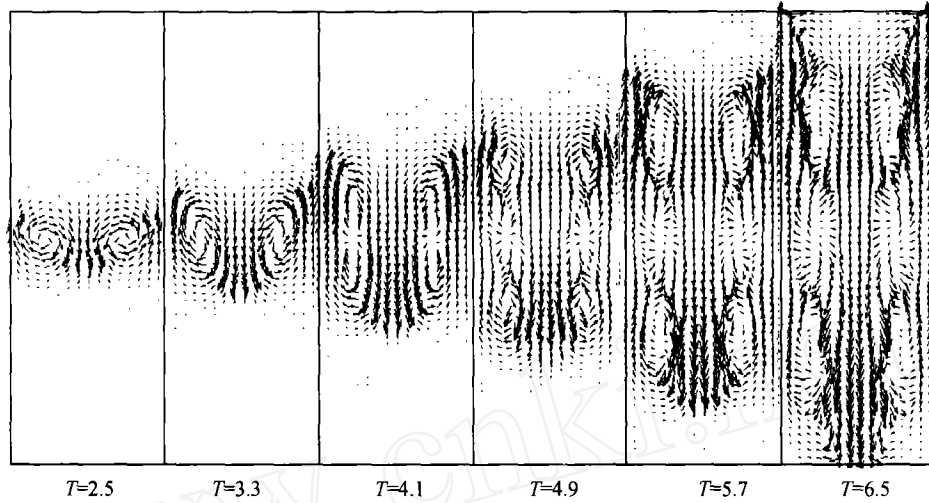


图 8 三维扰动下的速度场

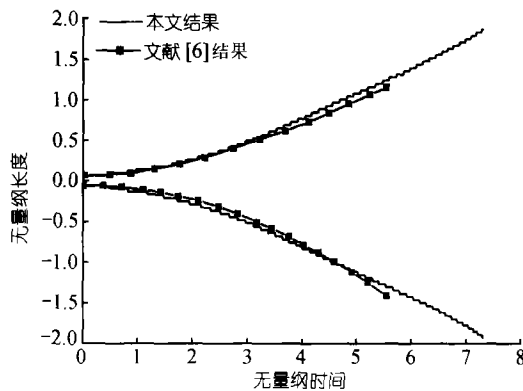


图 9 气泡和尖钉的前沿位置随时间的发展

目前对 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的认识还很不完善,有关的定量描述参数非常有限,气泡和尖钉的发展速度是人们主要讨论的问题. 图 9 为本文计算的三维扰动下尖钉、气泡前沿位置随时间的发展过程,初始阶段尖钉、气泡按指数发展,在非线性阶段气泡速度趋于常数, Taylor<sup>[11]</sup> 将非线性阶段气泡的稳定发展速度表示为

$$v_b = C \sqrt{g\lambda/2}, \quad (24)$$

其中  $C$  为常数. 对于三维扰动, Taylor 的实验表明,当 Atwood 数接近 1 时,  $C \approx 0.49$ . Li<sup>[6]</sup>,

He<sup>[10]</sup>, Abarzhi<sup>[12]</sup>, Glimm<sup>[9]</sup> 等利用不同数值方法在不同 Atwood 数等条件下计算得到的  $C$  在 0.32~0.63 之间变化,本文得到的  $C$  在 0.31~0.39 之间变化. 表 1 列出了本文与部分有关文献的结果,其中第 1 列为 Taylor<sup>[11]</sup> 的实验结果,第 2~4 列为 Li<sup>[6]</sup> 通过 Level Set 方法求解 Euler 方程得到的结果,第 5 列为 He<sup>[10]</sup> 利用 LB 方法计算出的结果,第 6~8 列为本文计算结果.

当 Atwood 数取为 0.33 时,本文结果与文献[6]在相同参数下的结果基本一致,由于采用了

表 1

$A$	1 (Taylor)	0.82 (Li)	0.67 (Li)	0.33 (Li)	0.5 (He)	0.33 (本文)	0.2 (本文)	0.1 (本文)
$C$	0.49	0.50	0.46	0.36	0.43	0.39	0.32	0.31
$C/\sqrt{A}$	0.49	0.55	0.56	0.63	0.61	0.67	0.71	0.98

Boussinesq 近似, 本文方法不适于计算大 Atwood 数的情况. 在小 Atwood 数情况下的计算结果表明,  $C$  随着 Atwood 数的减小而减小, 但  $C/\sqrt{A}$  并不是如文献[13]所认为的是一常数, 而是随着 Atwood 数的减小而增大, 这一结果与 Li<sup>[6]</sup>的结论一致. 另外, 数值结果显示尖钉的发展比气泡稍快, 这也与其他数值结果和实验观测相吻合.

实际情况下界面的初始扰动一般都是不规则的, 所以研究随机扰动下 Rayleigh-Taylor 不稳定性的发展规律具有更为重要的意义, 这方面的工作目前还非常初步, 主要用混合层厚度来描述其特征. Read<sup>[15]</sup>的实验和 Youngs 的数值计算<sup>[16,17]</sup>表明, 随机初始扰动下混合层厚度随着时间近似呈二次型增长, 可表示为

$$h_{AV}(t) = \alpha A g t^2, \quad (25)$$

其中  $h_{AV}$  为气泡前沿的平均位置到初始界面的高度. Read 和 Youngs 等人发现, 对于不可压缩流体, 在不同的流体和加速度值下,  $\alpha$  近似为一常数. Li<sup>[6]</sup>用 Level Set 方法采用并行程序对可压缩流体进行数值模拟, 也显示混合层厚度的增长与时间的平方成正比, 另外  $\alpha$  与流体的可压缩性有关.

本文如下定义混合层厚度  $H$ , 令混合层上下表面水平平均密度  $\bar{\rho}^+$  和  $\bar{\rho}^-$  分别为

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^+ &= \rho_u - 0.01(\rho_u - \rho_l), \\ \bar{\rho}^- &= \rho_u - 0.99(\rho_u - \rho_l). \end{aligned}$$

如下取初始速度场:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=1}^N B_k \cos kx \cdot \sin ky \cdot e^{-\alpha|z|} \cdot \text{sign}(z), \\ v_0 &= \sum_{k=1}^N B_k \sin kx \cdot \cos ky \cdot e^{-\alpha|z|} \cdot \text{sign}(z), \\ w_0 &= - \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{\alpha} \sin kx \cdot \sin ky \cdot e^{-\alpha|z|}, \end{aligned}$$

其中  $B_k$  为随机数,  $N$  取 4, 初始速度场满足连续性方程.

图 10 为随机初始扰动下的界面, 由于小尺度气泡在发展过程中被大尺度气泡吞并, 界面形状的尺度逐渐变大. 图 11 给出 Atwood 数取为 0.1 时混合层厚度随时间的变化曲线, 经曲线拟合, 有

$$H(t) = 0.165 A g t^2.$$

若用公式(25)表示, 有  $\alpha \approx 0.08$ . 文献[6]中两种不同可压缩性流体的计算结果分别为  $\alpha \approx 0.07$  和  $\alpha \approx 0.06$ .

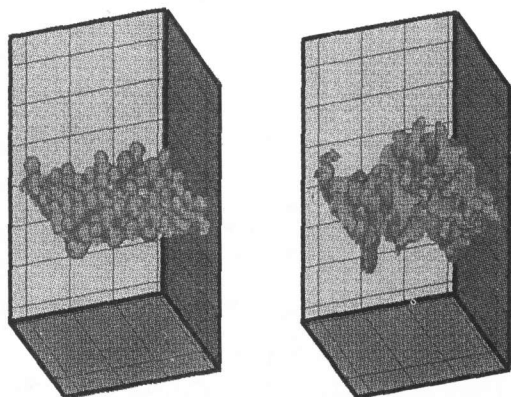


图 10 随机初始扰动下界面的发展

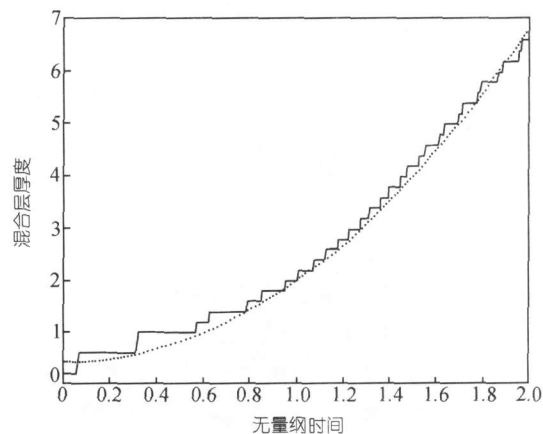


图 11 混合层厚度随时间的发展

## 4 结论

本文利用大涡模拟方法和被动标量输运模型,成功地捕获了三维 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题中计算尺度下流场的瞬态流动结构和绝大部分的二阶相关量(如动量、质量和能量通量),分析了正弦扰动和随机扰动下 Rayleigh-Taylor 不稳定性发展的典型特征和基本规律,计算结果与现有的实验和其他数值方法所得到的不稳定性发展规律及有关特征参数相吻合,说明所提出的简化模型和大涡模拟算法是合理和有效的。

在 Rayleigh-Taylor 不稳定性发展后期,由于界面的大变形、破裂直至两种流体发生湍流混合,除 LB 方法外的其他方法难以处理,一般只能计算到 Rayleigh-Taylor 问题的前 3 个阶段. 本文采用的被动标量输运模型,计算过程中无需追踪流体界面,不受界面大变形的限制,可直接由被动标量浓度场的等值线提取界面形状,结合大涡模拟算法,同时考虑不稳定发展初期分子黏性效应引起的动量、能量和质量分子扩散,可以有效地处理 Rayleigh-Taylor 不稳定性发展直至湍流混合的全过程. 另外计算模型简单,计算量、存储量小,算法稳定性好,避免了数值黏性对不稳定发展和湍流混合的影响. 与 LB 方法相比,本文的计算模型物理意义更为明确,且计算简单. 需要说明的是,本文提出的单相介质简化模型仅适用于两层流体密度相差很小的情况,尚需进一步改进以处理大密度比的情况. 另外亚格子模式也有待进一步完善。

**致谢** 感谢中国科学院力学研究所张子范和张强博士为本文提出了许多有益的意见和建议。

## 参 考 文 献

- 1 Sharp D H. An overview of Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, 1984, 12: 3 ~ 18
- 2 Baker G R, Meiron D I, Orszag S A. Vortex simulation of the Rayleigh-Taylor instability. *Phys Fluids*, 1980, 23: 1485 ~ 1490
- 3 Tryggvason G. Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability. *J Comput Phys* 1988, 75: 253 ~ 282

- 4 Mulder W, Osher S, Sethian J. Computing interface motion in compressible gas dynamics. *J Comput Phys*, 1992, 100: 209 ~ 228
- 5 Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J Comput Phys*, 1988, 79(1): 12 ~ 49
- 6 Li X L. Study of three-dimension-dimensional Rayleigh-Taylor instability in compressible fluids through level set method and parallel computation. *Phys Fluids*, 1993, 5(8): 1904 ~ 1913
- 7 Li X L, Jin B X, Glimm J. Numerical study for the three-dimensional Rayleigh-Taylor instability through the TVD/AC scheme and parallel computation. *J Comput Phys*, 1996, 126: 343 ~ 355
- 8 Holmes R L, Grove J W, Sharp D H. Numerical investigation of Richtmyer-Meshkov instability using front tracking. *J Fluid Mech*, 1995, 301: 51 ~ 64
- 9 Gardner C, Glimm J, McBryan O, et al. The dynamics of bubble growth for Rayleigh-Taylor unstable interfaces. *Phys Fluids*, 1988, 31: 447 ~ 465
- 10 He X Y, Chen S Y, Zhang R Y. A lattice Boltzmann scheme for incompressible multiphase flow and its application in simulation of Rayleigh-Taylor instability. *J Comput Phys*, 1999, 152: 642 ~ 663
- 11 Taylor G I. The stability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes I. *Proc Roy Soc A*, 1950, 201: 192 ~ 196
- 12 Abarzhi S I. Stable steady flow in the Rayleigh-Taylor instability. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 337 ~ 340
- 13 Zhang Q. The motion of single-mode Rayleigh-Taylor unstable interfaces. *Impact Comput Sci Eng*, 1991, 3: 277 ~ 289
- 14 Deardorff J W. Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model. *Boundary Layer Meteor*, 1980, 18: 295 ~ 527
- 15 Read K I. Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, 1984, 12: 45 ~ 58
- 16 Youngs D L. Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, 1984, 12: 32 ~ 44
- 17 Youngs D L. Modeling turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, 1989, 37: 270 ~ 287
- 18 Moeng G H. A large eddy simulation model for the study of planetary boundary layer turbulence. *J Atmos Sci*, 1984, 41(13): 2052 ~ 2062
- 19 Lesieur M, Metais O. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annu Rev Fluid Mech*, 1996, 28: 45 ~ 82
- 20 Metais O, Lesieur M. Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence. *J Fluid Mech*, 1992, 239: 157 ~ 194