第 20 卷 第 3 期
2003 年 08 月

工 程 数 学 学 报

JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 20 No. 3
Aug. 2003

文章编号:1005-3085(2003)03-0070-05

单参数极小连续流的两个充分条件*

李明军[1,2], 黄艾香[3]
(1-中国科学院力学所,北京 100080; 2-中国海洋大学海洋环境学院,青岛 266003;
3-西安交通大学理学院,西安 710049)

摘 要: 讨论了单参数连续流的基本性质,并给出了关于单参数连续流为极小流和单参数连续半流为极小流的充分条件。

关键词: 单参数连续流;单参数连续半流

分类号: AMS(2000) 37C65 **中图分类号**: O177.92 **文献标识码**: A

最近,在讨论微分动力系统的结构稳定性理论中,伪轨跟踪性质被广泛的应用和研究(文[1～4])。文[5]得到了 Distal 流为极小流的充分条件。对于动力系统的极小性特别是流的极小性研究,已经有大量的文献。文[6]证明只有在 f(0) = 0, f(1) = 1 时,Lorenz 吸引子才具有(有限)伪轨跟踪性。Mai 研究了具有伪轨跟踪性质的逐点回归动力系统,并证明链连通空间上具有伪轨跟踪性质任意逐点回归 C^0-流是极小流,也就是说,整个空间一定是 f 的一个(唯一的)极小集(参见文[7])。

本文主要研究单参数连续流和单参数连续半流的极小性,并得到两个充分性条件。

1 单参数连续流的极小性

本文假设 X 为度量空间,其度量为 d, $\phi^t(x): X\times\mathbf{R}\to X$ 为单参数连续流,满足

i) $\phi^{s+t} = \phi^s\cdot\phi^t$,对任意 $s,t\in\mathbf{R}$;

ii) $\phi^0(x) = x$,对任意 $x\in X$;

iii) ϕ 关于 x 和 t 均连续。

显然,对任意 $t\in\mathbf{R}$, ϕ^t 是 X 上的同胚,通常记为 (X,ϕ)。对任意 $x\in X$, $t\in\mathbf{R}$,记 $x\cdot t = \phi^t(x)$。给定 $x\in X$,以 $O_\phi(x) = \{\phi(x,t): t\in\mathbf{R}\}$, $O^+_\phi(x) = \{\phi(x,t): t\in[0,+\mathbf{R})\}$ 和 $O^-_\phi(x) = \{\phi(x,t): t\in(-\mathbf{R},0)\}$ 分别称为在 x 处 ϕ 的轨道, ϕ 的正半轨和 ϕ 的负半轨。

对任意子集 $A\subset X$ 和 $J\subset\mathbf{R}$,记

* **收稿日期**:2001-09-13. **作者简介**:李明军(1968 年 8 月生),男,博士,副教授.
基金项目:中国科学院力学所 LHD 实验室开放课题和 NSFC(10001028)资助.

$$A \cdot J = \{ x \cdot t : x \in A , t \in J \}$$

ϕ的非游荡集定义为

$$\Omega(\phi) = \{ x \in X : \text{对 } x \text{ 任意开邻域 } U \text{ 和任意 } T > 0 , U \cap (U \cdot [T, \infty)) \neq \phi \}$$

显然,$\Omega(\phi)$ 是 ϕ的一个不变闭子集,满足 $\Omega(\phi) = \Omega(\phi) \cdot t$,对任意 $t \in \mathbf{R}$。而且,$\Omega(\phi)$ 不依赖于距离 d 的选取。一个无穷(δ, a) - 伪轨是一个二重的无穷序列$(\{ x_n\}_{-\infty}^{\infty},\{ t_n\}_{-\infty}^{\infty})$ 满足 $t_n \geq a$ 且对任意 $n \in Z$,有 $d(\phi(x_n, t_n), t_{n+1})$。对任意给定无穷$(\delta, T)$ - 伪轨$\{ x_n\}_{-\infty}^{\infty}$,$\{ t_n\}_{-\infty}^{\infty})$,记

$$S_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} t_i , & \text{当 } i > 0 \text{ 时} \\ 0 , & \text{当 } i = 0 \text{ 时} \\ - \sum_{j=i}^{-1} t_i , & \text{当 } i < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

以 $x * t$ 表示关于(δ, T) - 伪轨的从 x_0 出发的单位时间为 t 的一个点。具体地,对任意 $t \in \mathbf{R}$,定义

$$x_0 * t = x_i \cdot (t - S_i) ,\text{如果 } S_i \leq t < S_{i+1} , i \in Z$$

定义1.1　设(X,ϕ) 单参数连续流。集合 $M \subset X$ 称为是极小的,如果 M 是ϕ的非空,闭的,不变子集,且不存在 M 的真子集为非空,闭的,不变子集。

如果 X 本身是极小的,即 X 为ϕ的非空,闭的,不变子集,且不存在 X 的真子集为非空,闭的,不变子集,则称 ϕ是极小的。

下述定理给出了极小集的一个重要且有用的表示。

定理1.3[7]　设(X,ϕ) 单参数连续流。一个非空集合 $M \subset X$ 为极小集的充分必要条件是对任意 $x \in M$,有 $O_\phi(x) = M$。

定义1.4　以MIH($\mathbf{R}$) 表示从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的所有单调递增同胚构成的集合。定义

$$Rep = \{ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : g \in \mathrm{MIH}(\mathbf{R}) , g(0) = 0\}$$

Rep 中的每一个元素称为一个重新参数化。

定义1.5　称任意给定 ϕ的无穷(δ, T) - 伪轨$(\{ x_n\}_{-\infty}^{\infty},\{ t_n\}_{-\infty}^{\infty})$ 被一点 $x \in X$ 的轨道ε跟踪,如果存在一个重新参数化 $g \in Rep$ 使得

$$d(x_0 * t , x \cdot g(t)) \leq \varepsilon \text{ 对任意 } t \in \mathbf{R}$$

定义1.6　称单参数连续流(X,ϕ) 具有伪轨跟踪性质,如果对任意正数 $\varepsilon > 0$,存在正数 $\delta > 0$, $T > 0$,使得 ϕ的任意(δ, T) - 伪轨都能被 X 中的某点的轨道ε 跟踪。

注记1.2　满足公理 A 的流在其非游荡集上的限制具有伪轨跟踪性质(参见文[1:定理2.2])。

定义1.7　设 $x, y \in X$,正数 $\varepsilon > 0$,$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是 X 中的有限点列,$n \geq 1$。如果 $x_0 = x$, $y = x_n$,且对任意 $1 \leq i \leq n$,有 $d(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon$,则称$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为 X 中的从 x 到 y 的ε 链。

X 称为链连通的,如果对任意 $x, y \in X$,正数 $\varepsilon > 0$,存在 X 中从 x 到 y 的ε 链。易知,连通的空间一定是链连通的。反之,链连通的空间不一定是连通的。例如,设 ϕ 为环面 T^2 上的单参数流,去掉 ϕ的有限条轨道,余下部分仍然是链连通的,但不是连通的。因此,链连通概念是连通概念的一个推广。

定义1.8　度量空间 X 的每一个最大的链连通子空间称为 X 的一个链连通分支。

定义1.9 设(X,ϕ)是一个具有伪轨跟踪性质的单参数连续流。如果X是链连通的且X中每一个点都是非游荡点,那么,(X,ϕ)是极小流。

证明 假设(X,ϕ)不是极小流,那么,存在一点$x\in X$,使得x的轨道的闭包$O_\phi(x)\neq\phi$。从而,存在$y\in X\setminus O_\phi(x)$,$\varepsilon_0=d(y,O_\phi(x))/3>0$。

由于(X,ϕ)是一个具有伪轨跟踪性质的单参数流,故存在$\delta_0>0$, $T_0>0$,使得ϕ的任意(δ_0,T_0) - 伪轨将被X中某点的轨道ε_0 - 跟踪。因为X是链连通的,故存在X中从x到y的一个$(\delta_0/3)$ - 链$(x_0,x_1,\cdots,x_n)$。又因为X中每一个点都是非游荡点,故对任意$i=0,1,\cdots,n-1$,存在$\tau_i>T_0$,使得$d(\phi(x_i,t_i),x_i)<\delta_0/3$。$(x_0,x_1,\cdots,x_m)$是一个$(\delta_0/3)$ - 链$(x_0,x_1,\cdots,x_n)$。又因为X中每一个点都是非游荡点,故对任意$i=0,1,\cdots,n-1$,存在$\tau_i>T_0$,使得$d(\phi(x_i,t_i),x_i)<\delta_0/3$。$(x_0,x_1,\cdots,x_m)$是一个$(\delta_0/3)$ - 链,故对任意$i=0,1,\cdots,m-1$,有$d(x_i,x_{i+1})<\delta_0/3$,从而,$d(\phi(x_i,\tau_i),x_{i+1})<2\delta_0/3$。对任意$i\in Z$,定义

$$x_i=\begin{cases}x_0\cdot(iT_0), & \text{令 } t_i=T_0,\ i\le 0\text{ 时}\\ x_i, & \text{令 } t_i=\tau_i,\ i=0,1,\cdots,m\text{ 时}\\ x_n\cdot((i-m)T_0), & \text{令 } t_i=T_0,\ i\ge m\text{ 时}\end{cases}$$

那么,$H=(\{x_n\}_{-\infty}^{\infty},\{t_n\}_{-\infty}^{\infty})$是$\phi$的一个$(\delta_0,T_0)$ - 伪轨。由于(X,ϕ)是一个具有伪轨跟踪性质的单参数连续流,故H将被X中某点$w\in X$的轨道ε_0 - 跟踪。即就是说,存在一个重新参数化$g\in Rep$,使得

$$d(x_0*t,w\cdot g(t))\le\varepsilon_0,\text{对任意 } t\in\mathbf{R}$$

当$t=0$时,$d(x_0*t,w\cdot g(t))=d(y,w)\le\varepsilon_0$。注意到$x=x_m$时,有

$$\limsup_{t\to\infty}d(O_\phi(x),w\cdot g(t))\le\limsup_{t\to\infty}d(O_\psi^+(x),w\cdot g(t_n))\le\varepsilon_0$$

由于$d(y,O(x))=3\varepsilon_0$且$g\in Rep$,故可推出w到w的ω - 极限集的距离不会小于ε_0。这就表明w不是非游荡点,这与定理条件矛盾。

2 连续半流的逆极限流

本节讨论连续半流的逆极限流的伪轨跟踪性质。

定义2.1 设(X,d)为紧致度量空间,度量为d。$\phi^t(x):X\times R^+\to X$为单参数半流,若满足

i) $\phi^{s+t}=\phi^s\cdot\phi^t$,对任意$s,t\in R^+$;

ii) $\phi^0(x)=x$,对任意$x\in X$;

iii) ϕ关于x和t均连续。

定义2.2 设(X,ϕ)单参数连续半流。集合$M\subset X$称为是极小的,如果M是ϕ的非空,闭的,正向不变子集,且不存在M的真子集为非空,闭的,正向不变子集。

如果X本身是极小的,即X为ϕ的非空的,闭的,正向不变子集,且不存在X的真子集为非空,闭的,正向不变子集,则称ϕ是极小的。

和定理1.2类似,下述定理给出了级小集的一个有用的表示。

定理2.3[7] 设(X,ϕ)单参数连续半流。一个非空集合$M\subset X$为极小集的充分必要条件是对任意$x\in M$,有$O_\phi^+(x)=M$。

X和定理1.9的证明类似,可以证明

定理 2.4　设 (X,ϕ) 是一个具有伪轨跟踪性质的单参数连续半流。如果 X 是链连通的且 X 中每一个点都是非游荡点。那么,(X,ϕ) 是极小半流。

定义紧致度量空间 X_ϕ 为

$$X_\phi = \{ x = (x^s)_{s\geq 0} : x^s = \phi^{t-s}(x^t), t \geq s \geq 0\}$$

其上的距离为

$$d(x,y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} d(x^t, y^t)\,\mathrm{d}t$$

对任意 $x, y \in X_\phi$。定义移位映射为

$$\sigma^t(x) = (\phi^t(x^s))_{s\geq 0} \in X_\phi, \text{对任意 } t \geq 0。$$

那么,(X_ϕ, σ) 也是一个单参数半流,记为 $\varprojlim (X,\phi)$,称为半流 (X,ϕ) 的逆极限流。

命题 2.5　设 $\varprojlim (X,\phi)$ 时半流 (X,ϕ) 的逆极限流,σ 为 $\varprojlim (X,\phi)$ 上的移位映射。那么,σ 具有伪轨跟踪性质当且仅当 (X,ϕ) 具有 N 伪轨跟踪性质。

引理 2.6　设 (X,ϕ) 为单参数半流,$\varprojlim (X,\phi)$ 为 (X,ϕ) 的逆极限流,σ 为移位映射。如果 X 为紧致链连通的度量空间,那么,X_ϕ 也为紧致链连通的度量空间。

引理 2.7　设 (X,ϕ) 为单参数半流,$\varprojlim (X,\phi)$ 为 (X,ϕ) 的逆极限流,σ 为移位映射。那么,$\varprojlim (\Omega(\phi),\phi) = \Omega(\sigma)$。

证明　首先证明 $\varprojlim (\Omega(\phi),\phi) \subset \Omega(\sigma)$。以 D 表示 X 的直径,任取 $x = (x^s)_{s\geq 0} \in \varprojlim (\Omega(\phi),\phi)$。设 $T > 0$ 使得

$$D\int_T^\infty \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = D\mathrm{e}^{-T} < \frac{\varepsilon}{4}$$

由于 $x^T \in \Omega(\phi)$,ϕ 为连续流,故存在 $y^T \in \Omega(\phi)$,使得

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-t} d(\phi^t(x^T), \phi^t(y^T))\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4}$$

以及存在 $k > 0$,使得

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-t} d(\phi^t(x^T), \phi^{t+k}(y^T))\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4}$$

又因为 ϕ 在 $\Omega(\phi)$ 上的限制 $\phi|_{\Omega(\phi)} : \Omega(\phi) \to \Omega(\phi)$ 为满映射,故存在 $y = (y^s) \in \varprojlim (\Omega(\phi),\phi)$ 满足 $y^T = y^T$,以及 $z = (z^s)_{s\geq 0}$ 满足 $z^T = \phi^k(y^T)$,从而

$$d(x,y) = \int_0^T \mathrm{e}^{-s} d(x^s, y^s)\,\mathrm{d}s + \int_T^\infty \mathrm{e}^{-s} d(x^s, y^s)\,\mathrm{d}s$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + D\int_0^T \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

类似地,有 $d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2}$。易知

$$\sigma^k(y) = (\phi^k(y^s)_{s\geq 0}) = (y^{(s+k)})_{s\geq 0}$$

从而

$$d(\sigma^k(y), z) = \int_T^\infty \mathrm{e}^{-s} d(\phi^k(y^s), z^s)\,\mathrm{d}s \frac{\varepsilon}{4}$$

因此

$$d(\sigma^k(y), x) \leq d(\sigma^k(y), z) + d(z, x)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon$$

这就表明，$x \in \Omega(\sigma)$。类似地，如果 $x \in \Omega(\sigma)$，那么，$x \in \underleftarrow{\lim}(\Omega(\sigma), \sigma)$。至此，引理证明完毕。

定理 2.8 设 (X, Φ) 是一个具有 N 伪轨跟踪性质的单参数连续半流。如果 X 是链连通的且 X 中每一个点都是非游荡点，那么，$\underleftarrow{\lim}(X, \Phi)$ 是极小流。

证明 命题 2.5，引理 2.6，引理 2.7 以及定理 1.5 即可得证。

参考文献：

[1] Bhatia N P, Szego G P. Stability theory of dynamical systems[J]. Grundlehren Math Wissenschaften Band Springer-Verlag, 1970; 161

[2] 何连法，王在洪. 具有伪轨跟踪性的 Distal 流[J]. 科学学报，1994; 39(21): 1936 - 1938

[3] Athanssopoulos K. The folw near non-trivial minimal sets on 2-manifolds[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1990; 108: 596 - 573

[4] Athanssopoulos K. A characterization of denjoy flows[J]. Bull London Math Soc, 1992; 24: 83 - 86

[5] Bowen R. Periodic orbits for hyperbolic flows[J]. Amer J Math, 1972; 94: 1 - 30

[6] Komuro M. Lorenz attrators do not have the pseudo-orrbit tracing property[J]. J Math Soc Japan, 1985; 37: 489 - 514

[7] Mai J H. Pointwise recurrent dynamical systems with Psedo-orbit Tracing Property[J]. Northeast Math J, 1996; 12: 73 - 78

Two Sufficient Conditions of One-parameter Continuous Flow over Minimal

LI Ming-jun[1,2] HUANG Ai-xiang[3]

(1- Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080;

2- Department of Phy & Enviren Oceanogr, University of China, Qingdao 266003;

3- Science College, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: We discuss the basic properties of an one-parameter continuous flow and an one-parameter continuous semi-flow, and give the sufficient conditions such that an one-parameter continuous flow and an one-parameter continuous semi-flow are minimal.

Keywords: one-parameter continuous folw; one-parameter continuous semi-flow