

文章编号: 1000-4750(2008)10-0080-06

反分析确定金属薄膜与陶瓷间界面的力学性能参数

赵海峰

(1. 中国石油大学石油工程教育部重点实验室, 北京 102249; 2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘 要: 该文基于薄膜撕裂实验测量和反分析来确定铝膜与陶瓷基体之间界面的力学参数(指界面粘结功和分离强度), 薄膜是通过一层环氧树脂胶粘结到基体的。薄膜厚度 $20\ \mu\text{m}$ — $250\ \mu\text{m}$, 撕裂实验中撕裂角度取 90° 、 135° 和 180° 三种。嵌入粘聚力单元(cohesive zone elements)的有限元模型用于模拟撕裂过程, 反分析中有限元计算结果作为一个神经网络的训练数据。将撕裂实验结果输入训练后的网络, 可得界面粘结功和分离强度。

关键词: 撕裂实验; 界面韧性; 粘聚力模型; 反分析; 分离强度

中图分类号: TU318; O346 文献标识码: A

INVERSE ANALYSIS TO DETERMINE INTERFACIAL PROPERTIES BETWEEN METAL FILM AND CERAMIC SUBSTRATE WITH AN ADHESIVE LAYER

ZHAO Hai-feng

(1. MOE Key Laboratory of Petroleum Engineering in China University of Petroleum, Beijing 102249, China;

2. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The interfacial mechanical parameters for the Al film/ceramic system at an epoxy interface layer between film and ceramic are determined by peel test measurements and inverse analysis. In the present investigation, Al films with a series of thicknesses between 20 and 250 microns and three peel angles of 90, 135 and 180 degrees are considered. A finite element model (FEM) with the cohesive zone elements is used to simulate the peel test. The FEM results are taken as the training data of a neural network in the inverse analysis. The interfacial cohesive energy and the separation strength can be determined based on the inverse analysis and peel experimental results.

Key words: peel test; interface toughness; cohesive zone model; inverse analysis; separation strength

由于薄膜/基体体系在工程上的广泛应用, 研究该体系的强度、韧性和可靠性近年来引起了科技人员的兴趣。薄膜脱胶是该体系破坏失效的一个主要方式。薄膜脱胶可以用一个双参数准则刻画, 这两个参数分别是界面粘结功 Γ_0 和分离强度 $\hat{\sigma}$ [1-12]。通常如果脱胶的薄膜只发生弹性变形或小范围屈服, 粘结功(也叫断裂韧度) Γ_0 更受重视 [2-3, 11-16]。

但是如果塑性耗散不可忽略, 人们还必须考虑分离强度的影响。图 1 是薄膜撕裂实验示意图, 膜厚 t , 撕裂力 P , 撕裂角度 ϕ 。图 1 的右侧是粘聚力模型, 该模型中给出了界面参数 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$ 的定义 [3-5, 8-10, 16-17], 这两个界面参数也是粘聚力模型最重要的两个参数。对一个薄膜/基体体系确定界面参数 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$ 是开展撕裂实验的最重要目标。撕裂

收稿日期: 2007-05-01; 修改日期: 2007-09-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(10432050, 10672163)

作者简介: 赵海峰(1980—), 男, 安徽舒城人, 讲师, 博士, 从事固体力学及岩石力学研究(E-mail: zhaohf@vip.163.com)

实验中可测的量有撕裂力 P 和薄膜变形信息。在撕裂达到稳定状态, 由能量平衡可得能量释放率 $P(1 - \cos \Phi)$ 与断裂韧度 Γ_0 以及塑性耗散 Γ_p 的关系,

$$P(1 - \cos \Phi) = \Gamma_0 + \Gamma_p \quad (1)$$

多数情况下 Γ_p 占能量释放率 $P(1 - \cos \Phi)$ 的大部分, 此时难以直接测量 Γ_0 [1,3,8-10,15,18-23]。

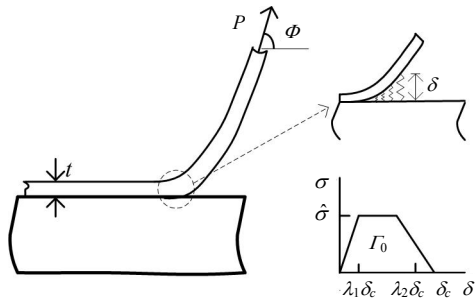


图1 薄膜撕裂和粘聚力模型示意图

Fig.1 Peel test configuration and sketch of the cohesive zone model

为了用撕裂实验确定 Γ_0 , 过去的方法是采用梁弯曲模型 [1,3,8-10,15,18-23] (该模型可得出 Γ_p 与裂尖薄膜弯曲曲率的关系)。然而, 梁弯曲模型只在薄膜厚度较大且界面粘结较弱的情况下适用 [21], 对于本文考虑的情况则失效。

本文将确定 Al 膜与 Al_2O_3 基体间界面参数, Al 膜厚度 $20\mu\text{m} - 250\mu\text{m}$, Al 膜通过一种环氧树脂胶粘结到基体。本文先进行薄膜撕裂实验, 之后提出基于人工神经网络的一般性反分析界面参数的方法。撕裂实验中考虑了 90° 、 135° 和 180° 三种撕裂角度以研究不同撕裂角度的影响。嵌入粘聚力单元 (cohesive zone elements) 的有限元模型用于模拟撕裂过程, 反分析中有限元计算结果作为一个神经网络的训练数据。将撕裂实验结果输入训练后的网络, 可得界面粘聚力和分离强度。

1 实验

1.1 概述

用作薄膜的铝箔是纯度 99.999% 的退火软铝, 厚度有 $20\mu\text{m}$ 、 $50\mu\text{m}$ 、 $80\mu\text{m}$ 、 $100\mu\text{m}$ 、 $200\mu\text{m}$ 、 $225\mu\text{m}$ 和 $250\mu\text{m}$ 共 7 种。基体是厚度 4.5mm 的 99 瓷 (Al_2O_3)。用作粘结剂的是实际工程中常用的环氧树脂 (Epoxy), 固化剂为聚酰亚胺树脂。调整环氧树脂与聚酰亚胺混合比例可以得到不同性质的粘结剂。本文采用的比例为 1.5 : 1, 该粘结剂在撕裂实验中表现出韧性。

实验证明胶层的厚度对稳定撕裂力的影响很

大, 所以在制备样品时控制粘结层的厚度至关重要。本文实验中在胶中添加少量玻璃 (SiO_2) 小球控制胶层厚度在 $20\mu\text{m}$, 如图 2 所示。

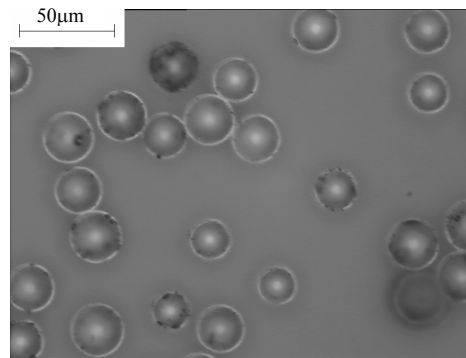


图2 用于控制胶层厚度的 SiO_2 小球

Fig.2 SiO_2 spheres used to control the adhesive layer thickness

所有撕裂实验在标准拉伸实验机上进行, 拉伸实验机配置了专为本文研究设计的小型夹具, 如图 3 所示, 通过该夹具可以很容易实现不同的撕裂角度。一台 Questar 长焦距光学测量系统用于实时观察撕裂过程中裂纹的扩展并拍照。薄膜很难直接固定到实验机上端的夹具中 (夹不紧且易损坏薄膜), 实验中采用胶带将薄膜末端与小块金属片连接, 一条细长尼龙线将金属片连接到实验机夹具, 有效保护了薄膜。尼龙线的长度约为 1m , 而实验中薄膜脱胶距离不超过 30mm , 这样撕裂过程中撕裂角的变化小于 $\arctg(0.03) \approx 1.5^\circ$, 基本可以认为撕裂角度恒定。

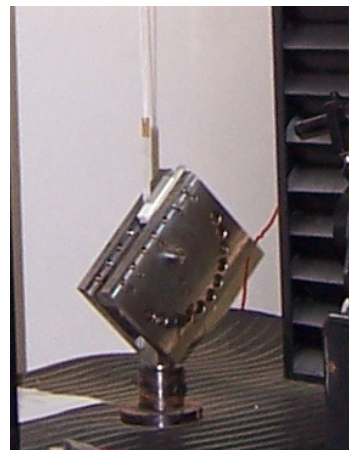


图3 专为本文研究设计的小型夹具

Fig.3 Peel test rig for the current research

为消除不同撕裂速率对实验结果的影响, 在实验中保持裂纹的稳定扩展速度一定, 即:

$$v/(1 - \cos \Phi) = v_{crack} = const \quad (2)$$

其中： v 是试验机横梁移动速度； Φ 为撕裂角度。

本文 $const=1\text{mm/min}$ 。

1.2 实验结果

1.2.1 材料参数

1) 薄膜。

对各种厚度薄膜进行单向拉伸实验，所得的应力-应变曲线采用如下的幂硬化关系式拟合，

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \sigma \leq \sigma_y \\ \frac{\sigma_y}{(\sigma_y/E)^n} \varepsilon^n, & \sigma \geq \sigma_y \end{cases} \quad (3)$$

n 为幂硬化指数。表 1 列出了拟合的材料参数。

表 1 各种厚度 Al 膜材料参数
Table 1 Material parameters of the Al films

膜厚/ μm	弹性模量* / GPa	泊松比*	屈服应力/ MPa	幂硬化指数
20	71	0.31	36.3	0.238
50	71	0.31	34.0	0.243
80	71	0.31	33.2	0.246
100	71	0.31	32.8	0.249
200	71	0.31	32.0	0.251
225	71	0.31	31.9	0.250
250	71	0.31	31.8	0.250

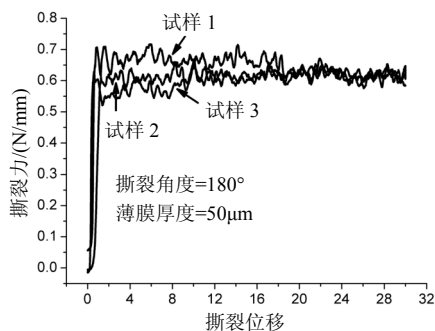
注：查自师昌绪等《材料科学与工程手册》(2004 版)

2) Al_2O_3 基体。

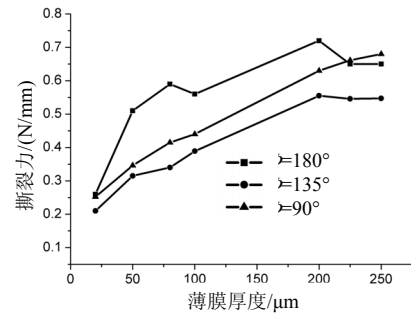
Al_2O_3 基体的弹性模量比 Al 膜约高 4 倍，在撕裂过程中变形非常小，可以当作弹性材料处理，其模量 $E=350\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu=0.3$ 。

1.2.2 撕裂实验结果

实验中记录撕裂力-夹头位移曲线，两条典型的曲线如图 4(a)所示。曲线初始的上升阶段是撕裂逐步达到稳定的过程，之后撕裂力稳定。本研究目的是获得界面参数，我们关心稳定状态的撕裂力和薄膜弯曲曲率，而并不关心夹头位移(包括尼龙线伸长)。



(a) 撕裂力 vs. 夹头位移曲线



(b) 稳定状态撕裂力 vs. 薄膜厚度曲线

图 4 撕裂力实验结果

Fig.4 Peel force from experiments

每种厚度的薄膜进行 3 个样品的撕裂实验，取平均得到稳定撕裂力随着薄膜厚度变化曲线，如图 4(b)所示。稳定撕裂力随着薄膜厚度增加而增加直到趋于某个稳定值。实验中所有脱胶发生在薄膜与胶层的界面间。

对于撕裂角度 180° ，用多点拟合测量裂尖处薄膜弯曲曲率半径，多次测量取平均得到图 5 所示结果。

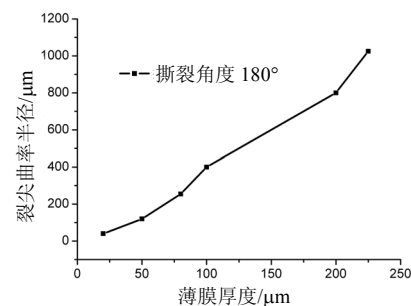


图 5 裂尖薄膜弯曲曲率半径

Fig.5 The curvature radius of the film at the crack tip

2 有限元模拟合神经网络反分析

2.1 有限元模型

由于撕裂实验中薄膜的宽度(10mm)远比厚度(20 μm —250 μm)大，可以将撕裂过程简化为一个平面应变问题。有限元模型在 ABAQUS6.5 中建立。式(3)用于描述薄膜的应力-应变关系，其中考虑弹性大变形、Mises 屈服准则以及等向强化。基体材料 Al_2O_3 在撕裂过程中变形非常小，可以当作弹性材料处理。

薄膜与基体间的粘结层用一层粘聚力单元代替^[3-5,8-10,15,17]，ABAQUS6.5 内置 COH2D4 单元可作为粘聚力单元连接薄膜和基体，但单元材料应通过编辑模型的关键词添加，以实现如图 1 所示的 $\sigma-\delta$ 曲线。COH2D4 单元的节点位移(非应变)用于控制界面分离过程，计算中 COH2D4 单元厚度取 1。

控制粘聚力单元行为的参数有界面断裂韧度 Γ_0 、分离强度 $\hat{\sigma}$ 、临界位移比 δ_n^c / δ_t^c 以及形状参数 λ_1 和 λ_2 。过去研究发现形状参数 λ_1 和 λ_2 对计算结果影响不大，最重要参数是 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$ [5]，本文取 $\lambda_1 = 0.15, \lambda_2 = 0.5$ 。正向与切向临界位移分量比 δ_n^c / δ_t^c 对研究复合型裂纹重要，但只要裂纹是 I 型主导的，结果对 δ_n^c / δ_t^c 也不敏感 [24]。本文考虑的撕裂角度为 90° 、 135° 和 180° ，裂纹是 I 型主导，正好符合上述情况。

在薄膜的自由端设置了一个刚体单元，其 UX、UY 自由度与薄膜单元耦合以方便实现加载，即先将薄膜的自由一端旋转一个撕裂角度，然后沿着撕裂方向进行位移加载。薄膜与基体都采用 4 节点 4 积分点线性矩形单元划分，薄膜在撕裂过程中发生大弯曲变形，沿薄膜厚度方向至少划分 4 个单元以较准确刻画弯曲变形。基体材料 Al_2O_3 的弹性模量远比薄膜以及粘结层模量高，近似刚体变形，故采用较为稀疏的网格以减小计算规模。有限元模型的典型网格划分如图 6 所示。

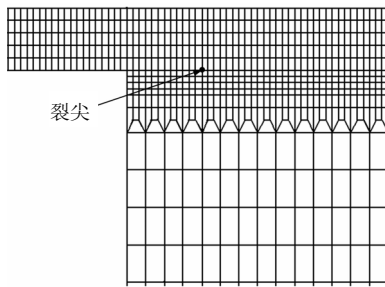


图 6 典型网格划分

Fig.6 A typical mesh of FE model

2.2 神经网络反分析获得 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$

对于薄膜厚度 $50\mu m$ 、撕裂角度 180° ，撕裂达到稳定状态的撕裂力 P 和薄膜在裂纹端部的曲率半径 r 将由 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$ 唯一确定，即存在函数，

$$\begin{aligned} P &= f_1(\Gamma_0, \hat{\sigma}), \\ r &= g_1(\Gamma_0, \hat{\sigma}) \end{aligned} \quad (4)$$

同样存在反函数，

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= f_2(P, r), \\ \hat{\sigma} &= g_2(P, r) \end{aligned} \quad (5)$$

f_2 和 g_2 的具体形式将由神经网络以数值形式给出。

反分析首先需要通过 2.1 节介绍的有限元模型计算大量的正问题解作为即将建立的神经网络的训练样本，即给出若干组参数 $(\Gamma_0^i, \hat{\sigma}^i)$ ，计算得出对应的若干组数值 (p^i, r^i) 。训练神经网络时， (p^i, r^i)

作为输入数据， $(\Gamma_0^i, \hat{\sigma}^i)$ 作为目标数据。由图 4 给出的实验结果我们判断真实 $\Gamma_0 < 0.2 N/mm$ ，所以 $(\Gamma_0^i, \hat{\sigma}^i)$ 参数组中 Γ_0 取区间 $(0.02, 0.2)$ 中的 10 个值，而 $\hat{\sigma}$ 取较大区间 $(5, 50)$ 中的 10 个值，通过计算得到 100 组 (p^i, r^i) 。

在 Matlab 7.0 神经网络工具箱中建立一个双层的 2 输入 2 输出 BP 网络，其中第 1 层 7 个神经元，传递函数 TANSIG，第 2 层 2 个神经元，传递函数为 PURELIN，网络的训练函数为 TRAINLM。神经网络的示意如图 7 所示，该网络可以模拟任何包含有限个不连续点的二维 2 元函数 [25]。

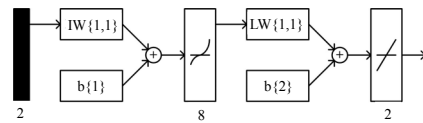


图 7 神经网络结构图

Fig.7 Sketch of the neural network

训练后的网络预测效果如图 8、图 9 所示。

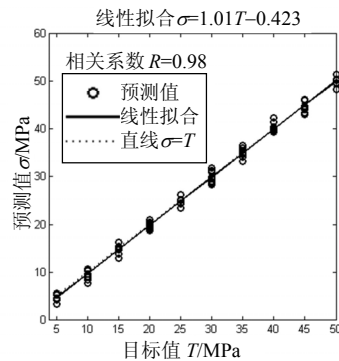


图 8 神经网络预测 $\hat{\sigma}$ 效果， σ 为以 (p^i, r^i) 作为输入数据神经网络预测值， T 为目标值， $R=0.998$ 为两者的相关系数
Fig.8 The effect of simulating g_2 . σ is predicted values by the network with the input data (p^i, r^i) . T is target values and $R=0.998$ is the correlation coefficient of σ and T

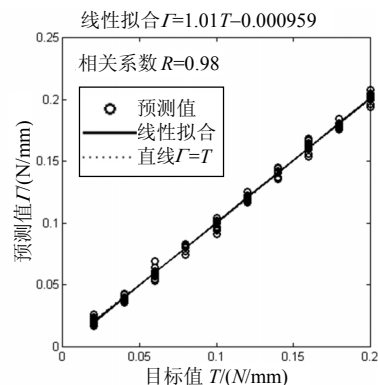


图 9 神经网络预测 Γ_0 效果， Γ 为以 (p^i, r^i) 作为输入数据神经网络预测值， T 为目标值， $R=0.998$ 为两者的相关系数
Fig.9 The effect of simulating f_2 . Γ is predicted values by the network with the input data (p^i, r^i) . T is target values and $R=0.998$ is the correlation coefficient of Γ and T

由图 8、图 9 可以看到经过训练的网络能够很好的根据输入数据(p^i, r^i)预测参数 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$, 实现式(5)的函数关系。将薄膜厚度 $50\mu\text{m}$ 、撕裂角度 180° 实验测量值($p=0.51\text{N/mm}$, $r=0.12\text{mm}$)作为网络输入, 得到目标参数 $\Gamma_0 = 0.13\text{N/mm}$, $\hat{\sigma} = 28\text{MPa}$ 。

2.3 验证神经网络预测结果

为验证 2.2 节中得到的界面参数, 2.1 节的有限元模型(取参数 $\Gamma_0 = 0.13\text{N/mm}$, $\hat{\sigma} = 28\text{MPa}$)用于预测其他撕裂角度和薄膜厚度的结果, 得到如图 10 所示撕裂力-薄膜厚度曲线, 作为比较, 图 10 中也给出了实验结果。由图 10 可以看到有限元模型(取参数 $\Gamma_0 = 0.13\text{N/mm}$, $\hat{\sigma} = 28\text{MPa}$)可以较好的预测各种撕裂角度和薄膜厚度的稳定撕裂力, 即对一种薄膜厚度($50\mu\text{m}$)和撕裂角度(180°)确定了 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$, 则这一组参数可以很好的预测其他薄膜厚度和撕裂角度的撕裂力, 从而可以认为 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$ 是界面固有参数, 与薄膜厚度和撕裂角度无关。

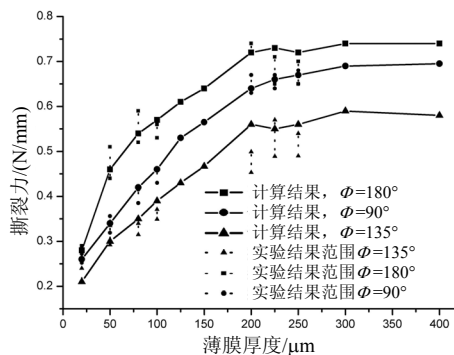
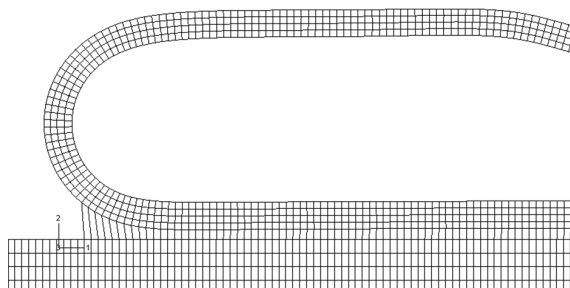


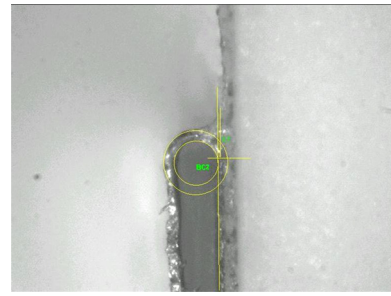
图 10 撕裂力-薄膜厚度曲线

Fig.10 The variation of the peel force as a function of the film thickness

如图 11 所示是实验观测的稳定撕裂状态下薄膜变形和有限元计算所得的薄膜变形。计算薄膜在裂纹端部曲率半径 $116\mu\text{m}$, 实验测量值为 $105\mu\text{m} - 125\mu\text{m}$ 。有限元计算准确地预测了稳定撕裂状态下薄膜的变形。



(a) 有限元计算薄膜变形



(b) 实验观测薄膜变形

图 11 裂尖薄膜变形, 膜厚 $50\mu\text{m}$, 撕裂角度 180°

Fig.11 Configuration of the film at the crack tip, film thickness= $50\mu\text{m}$, peel angle= 180°

3 结论

本文开展了不同撕裂角度和薄膜厚度下的 Al 膜沿着陶瓷基体脱胶的撕裂实验, 界面的断裂韧度和分离强度被确定。嵌入粘聚力单元(cohesive zone elements)的有限元模型用于模拟撕裂过程, 反分析中有限元计算结果作为一个神经网络的训练数据。将撕裂实验结果输入训练后的网络, 可得界面断裂韧度和分离强度。

对一种薄膜厚度($50\mu\text{m}$)和撕裂角度(180°)确定了 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$, 则这一组参数可以很好的预测其他薄膜厚度和撕裂角度的撕裂力, 从而可以认为 Γ_0 和 $\hat{\sigma}$ 是界面固有参数, 与薄膜厚度和撕裂角度无关。

参考文献:

- [1] Cotterell B, Hbaieb K, Williams J G, Hadavinia H, Tropsa V. The root rotation in double cantilever beam and peel tests [J]. *Mechanics of Materials*, 2006, 38(7): 571—580.
- [2] Hadavinia H, Kawashita L, Kinloch A J, Moore D R, Williams J G. A numerical analysis of the elastic-plastic peel test [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73(16): 2324—2335.
- [3] Pardoen T, Ferracin T, Landis C M, Delannay F. Constraint effects in adhesive joint fracture [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(9): 1951—1983.
- [4] Wei Y. Thin layer splitting along the elastic-plastic solid surface [J]. *International Journal of Fracture*, 2002, 113(3): 233—252.
- [5] Wei Y. Modeling nonlinear peeling of ductile thin films—Critical assessment of analytical bending models using FE simulations [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41(18): 5087—5104.
- [6] Cui J, Wang R, Sinclair A N, Spelt J K. A calibrated finite element model of adhesive peeling [J]. *International*

- Journal of Adhesion & Adhesives, 2003, 23(3): 199—206.
- [7] Song J Y, Jin Y. Analysis of the T-peel strength in a Cu/Cr/Polyimide system [J]. Acta Materialia, 2002, 50(16): 3985—3994.
- [8] Yang Q D, Thouless M D. Mixed-mode fracture analyses of plastically-deforming adhesive joints [J]. International Journal of Fracture, 2001, 110(2): 175—187.
- [9] Yang Q D, Thouless M D, Ward S M. Numerical simulations of adhesively-bonded beams failing with extensive plastic deformation [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999, 47(6): 1337—1353.
- [10] Yang Q D, Thouless M D, Ward S M. Elastic-plastic mode-II fracture of adhesive joints [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(18): 3251—3262.
- [11] Park I S, Jin Y. An X-ray study on the mechanical effects of the peel test in a Cu/Cr/polyimide system [J]. Acta Mater, 1998, 46(8): 2947—2953.
- [12] Park Y B, Park I S, Jin Y. Interfacial fracture energy measurement in the Cu/Cr/polyimide system [J]. Materials Science & Engineering A, 1999, 266(1): 261—266.
- [13] Asai H, Iwase N, Suga T. Influence of ceramic surface treatment on peel-off strength between aluminum nitride and epoxy-modified polyaminobismaleimide adhesive [J]. IEEE Transactions on Advanced Packaging, 2001, 24(1): 104—112.
- [14] Bundy K, Schlegel U, Rahn B, Geret V, Perren S. Improved peel test method for measurement of adhesion to biomaterials [J]. J Mater Sci: Mater in Med, 2000, 11(8): 517—521.
- [15] Dillard D A, Pocius A V. The mechanics of adhesion [M]. Amsterdam: Elsevier Press, 2002.
- [16] Ferracin T, Landis C M, Delannay F, Pardoën T. On the determination of the cohesive zone properties of an adhesive layer from the analysis of the wedge-peel test [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(11): 2889—2904.
- [17] Wei Y, Hutchinson J W. Interface strength, work of adhesion and plasticity in the peel test [J]. International Journal of Fracture, 1998, 93(1): 315—333.
- [18] Kim K S, Aravas N. Elasto-plastic analysis of the peel test [J]. International Journal of Solids and Structures, 1988, 24(4): 417—435.
- [19] Kinloch A J, Lau C C, Williams J G. The peeling of flexible laminates [J]. International Journal of Fracture, 1994, 66(1): 45—70.
- [20] Zhao H F, Wei Y G. Determination of interface properties between micron-thick metal film and ceramic substrate using peel test [J]. International Journal of Fracture, 2007, 144(2): 103—112.
- [21] Wei Y G, Zhao H F, Cao A J. Measurements and Simulations of interface behavior in metal thin film peeling along ceramic substrate [C]. IUTAM Symposium on Mechanical Behavior and Micro-mechanics of Nanostructured Materials. Netherlands Springer, 2007: 61—70.
- [22] Moidu A K, Sinclair A N, Spelt J K. Analysis of the peel test: Prediction of adherend plastic dissipation and extraction of fracture energy in metal-to-metal adhesive joints [J]. Journal of Testing and Evaluation, 1995, 23(4): 241—253.
- [23] Moidu A K, Sinclair A N, Spelt J K. On the determination of fracture energy using the peel test [J]. Journal of Testing and Evaluation, 1998, 26(3): 247—254.
- [24] Tvergaard V, Hutchinson J W. The influence of plasticity on mixed mode interface fracture [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1993, 41(6): 1119—1135.
- [25] MATLAB Inc. MATLAB Version 7.0 Documentation [CP]. MATLAB, 2004.

(上接第 79 页)

- [11] 王新志, 韩明君, 高武杰, 栗蕾. 扁球壳和扁锥壳静动态非线性基本方程[C]// 焦善庆. 数学·力学·物理·高新技术进展. 成都: 西南交通大学出版社, 2006(11): 147—150.
Wang Xinzhi, Han Mingjun, Gao Wujie, Li Lei. Static and dynamic nonlinear basic equations of shallow spherical and conical shells [C]// Jiao Shanqing. Mathematics, Mechanics, Physics, Development of High-technology. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2006(11): 147—150. (in Chinese)
- [12] 叶开沅, 王新志. 变厚度圆薄板大挠度理论的修正迭代法[J]. 甘肃工业大学学报, 1986, 12(3): 31—39.
Ye Kaiyuan, Wang Xinzhi. Modified iteration method in the large deflection Problem of thin circular plates with non-uniform thickness [J]. Journal of Gansu University of Technology, 1986, 12(3): 31—39. (in Chinese)
- [13] 谢应齐, 曹杰. 非线性动力学数学方法[M]. 北京: 气象出版社, 2001.
Xie Yingqi, Cao Jie. Mathematical method in nonlinear dynamics [M]. Beijing: China Meteorological Press, 2001. (in Chinese)