文章编号: 0258-1825(2004)03-0289-06

非结构同位网格 SIMPLE 类算法收敛性能比较

赖锡军[1],汪德爟[2],傅源方[3]

(1. 中国科学院南京地理与湖海研究所,江苏南京 210008;
2. 河海大学环境科学与工程学院,江苏南京 210098;3. 中国科学院力学所,北京 100080)

摘 要:以非结构网格的 SIMPLE 算法为基础,将算法扩展为 SIMPLEC 算法。利用 30°角的斜方腔流动计算成果,分析了非结构同位网格的 SIMPLE/SIMPLEC 算法的收敛性能;比较了因网格的非正交而引入的非正交项的取舍对该算法收敛性能的影响;并采用显式校正步法对 SIMPLEC 算法进行了显式校正。比较表明,在非结构同位网格 SIMPLEC 算法中可忽略非正交项,但有必要对压力作亚松弛。显式校正步法可显著地加速在非结构网格上求解 N-S 方程的收敛性能,而且在不同的松弛因子组合下,均有较好的收敛速率。

关键词: 非结构同位网格;SIMPLEC 算法;收敛性能;显式校正步法

中图分类号: V211.3 **文献标识码**: A

0 引 言

在采用原始变量法求解粘性不可压缩流体时,需要求解压力场,常用联立求解法;压力校正法;压力 Poisson 方程法;人为压缩法。其中压力校正法自 1972 年由 Patankar 与 Spalding 提出 SIMPLE 算法以来,得到了大量的应用和发展,随后又相继提出了 SIMPLER 与 SIMPLEC 等方法以及各类加速收敛技巧[1]。

处理复杂计算区域的一种有效的方法是采用非结构化网格(unstructured grids)。由于非结构网格可以采用任意形状的单元格,单元边的数目也无限制,使其能够很好地模拟自然几何边界。近年来,研究人员开始了将压力校正方法扩展到单元中心非结构有限体积法(cell-centered, unstructured finite volume)的研究[2~5]。非结构同位网格算法中大多数采用 SIMPLE 法,只在少量文献中采用 SIMPLEC 法。而且,对非结构同位网格上 SIMPLE 以及 SIMPLEC 算法的收敛性能没有进行过比较研究。大多数值经验主要集中于非正交同位网格上的研究成果[6~7]。由于在流体计算中压力场的计算费用在整个计算费用中占很大的比重。因此加速压力场的计算将是很值得的工作。

本文以非结构网格的 SIMPLE 算法为基础,将算法扩展为 SIMPLEC 算法。比较了因网格的非正交而引入的非正交项的取舍对算法收敛性能的影响;并采用显式校正步法(explicit correction step)对 SIMPLEC 算法进行了显式校正。

1 数值方法

1.1 控制方程

不可压缩流动的连续方程和动量方程为:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad (2)$$

1.2 通用方程离散

将求解方程写成通用微分方程的积分形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\phi \mathrm{d}V + \int \rho\phi \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}A = \int \Gamma \mathrm{grad}\,\phi\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}A + \int S_\phi \mathrm{d}V \qquad (3)$$

其中:ρ 为流体密度;ϕ 通用变量,如速度等;Γ 为扩散系数;S_ϕ 为源项。

如图 1,通过构造辅助点,利用有限体积法可对式(3)进行离散,具体过程可参见文献[8]。单元面"e"的各通量项的离散表达式分别描述如下:

对流通量 F_e^c 为

$$F_e^c = \int_e \rho\phi\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}A \approx (\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})_e A_e \phi_e \qquad (4)$$

* **收稿日期**: 2003-06-24; **修订日期**: 2003-11-19.
作者简介: 赖锡军(1977-),男,助理研究员,计算水利学专业.

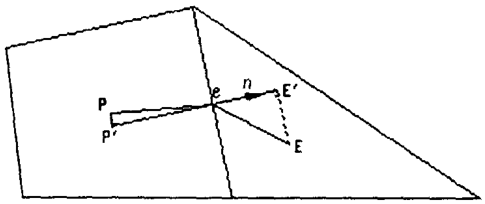


图 1 辅助点构造图

Fig. 1 Geometry of auxiliary points

式中,下标 e 表示该输运量取值的单元面位置; $\phi_e = (1-\omega)\phi_{P'} + \omega\phi_{E'}$ 为单元面中心‘e’点输运量的值,其中,定义插值系数 $\omega = L_{P'e}/L_{P'E'}$; A_e 为单元面面积(二维为边长)。扩散通量 F_e^d 为:

$$F_e^d \approx \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{L_{P'E'}} + \Gamma_e A_e \frac{(\mathrm{grad}\,\phi)_E \cdot (\mathrm{r}_{E'} - \mathrm{r}_E) - (\mathrm{grad}\,\phi)_P \cdot (\mathrm{r}_{P'} - \mathrm{r}_P)}{L_{P'E'}} \tag{5}$$

上式右端第一项按隐式处理,而第二项则作为显式计算。

对非常数源项,采用线性化处理:

$$Q_P^{\phi} = \int S_{\phi}\,\mathrm{d}V = \int (S_{\phi,c} + S_{\phi,P}\phi_P)\,\mathrm{d}V \approx (S_{\phi,c} + S_{\phi,P}\phi_P)\Delta V \tag{6}$$

其中, $S_{\phi,c}$ 源项的常数部分, $S_{\phi,P}$ 为 ϕ_P 的系数。源项随求解的方程变化而变化。

综合可得二阶精度格式通用方程的离散表达式:

$$a_P\phi_P^{n+1} + \sum_{j=1}^{m} a_j\phi_{P,j}^{n+1} = Q^{\phi} \tag{7}$$

其中,

$$a_P = \frac{\rho\Delta V}{\Delta t} + \sum_j (1-\omega)F_j^m + \sum_j \Gamma_j \frac{A_j}{L_{P'E'}} - S_{\phi,P}\Delta V;$$

$$a_j = \omega F_j^m - \Gamma_j \frac{A_j}{L_{P'E'}};$$

$$Q^{\phi} = \frac{\rho\Delta V}{\Delta t}\phi^n + S_c\Delta V + \sum_j \Gamma_j A_j \frac{(\mathrm{grad}\,\phi)_E \cdot (\mathrm{r}_{E'} - \mathrm{r}_E) - (\mathrm{grad}\,\phi)_P \cdot (\mathrm{r}_{P'} - \mathrm{r}_P)}{L_{P'E'}} - \sum_j F_j^m [(1-\omega)(\mathrm{grad}\,\phi)_P \cdot (\mathrm{r}_{P'} - \mathrm{r}_P) + \omega(\mathrm{grad}\,\phi)_E \cdot (\mathrm{r}_{E'} - \mathrm{r}_E)]$$

2 压力校正方程

2.1 单元面速度插值

利用动量插值法(momentum interpolation method)[9]可得单元面法向速度 $u_{n,e}^*$:

$$u_{n,e}^* = \overline{u}_{n,e}^* + \overline{\left(\frac{\Delta V}{a_P}\frac{\delta p}{\delta n}\right)}_e - \overline{\left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)}_e \left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)_e \tag{8}$$

其中,上标“ * ”代表压力校正之前的变量值,上划线“ —— ”表示由单元面两侧单元中心点值作线性插值。压力法向导数采用下式估算:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)_e = \frac{p_E - p_P}{L_{P'E'}} + \frac{(\mathrm{grad}\,p)_E \cdot (\mathrm{r}_{E'} - \mathrm{r}_E) - (\mathrm{grad}\,p)_P \cdot (\mathrm{r}_{P'} - \mathrm{r}_P)}{L_{P'E'}} \tag{9}$$

由式(8)估算的界面流速公式可以防止同位网格上的压力波动。而且,因为引入动量插值主要为了防止同位网格上的压力波动,所以式(9)右端第二项忽略不会影响计算结果。

2.2 压力校正方程

由 SIMPLE 算法可得:

$$u'_{n,e} = -\left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_e \left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)'_e \tag{10}$$

上标“ ′ ”代表校正值。将上式代入单元面导数近似公式,有:

$$u'_{n,e} = -\left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_e \cdot \left[\frac{p'_E - p'_P}{L_{P'E'}} + \frac{(\mathrm{grad}\,p')_E \cdot (\mathrm{r}_{E'} - \mathrm{r}_E) - (\mathrm{grad}\,p')_P \cdot (\mathrm{r}_{P'} - \mathrm{r}_P)}{L_{P'E'}}\right] \tag{11}$$

该式即为单元面速度校正值的计算式。

在按上述的速度校正公式进行计算时,对压力校正必须采用亚松弛技术,否则难以保证计算的稳定。此时,压力校正公式写成:

$$p = p^* + \alpha_p p' \tag{12}$$

式中, α_p 为压力松弛系数,若不考虑非正交项的影响,在网格正交性较差时,须采用很小的亚松弛技术, α_p 甚至取到 0.05[6]。松弛系数选择,将对计算的收敛速率产生很大的影响。

考虑到在上述的速度校正公式推导过程中,略去了邻点单元速度校正的影响,它虽然不影响计算的最后结果,但是影响中间结果,从而影响计算的收敛速率。为此,Van Doormal 和 Raithby[10]提出了考虑邻点单元速度校正影响的 SIMPLEC 算法,该算法由于其易于实现,得到了广泛的应用。由 SIMPLEC 算法:

$$u'_{n,e} = -\beta_e \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_e \left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)'_e \tag{13}$$

其中, $\frac{1}{\beta_e} = 1 + (1-\omega)\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} a_j}{a_P}\right)_P + \omega\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} a_j}{a_P}\right)_E$,而后代入单元面导数近似公式,有

$$u'_{n,e} = -\beta\left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_e \cdot \left[\frac{p'_E - p'_P}{L_{PE'}} + \frac{(\text{grad}\,p')_E \cdot (\mathrm{r}_{E'} - \mathrm{r}_E) - (\text{grad}\,p')_P \cdot (\mathrm{r}_{P'} - \mathrm{r}_P)}{L_{PE'}}\right] \tag{14}$$

该式即为单元面速度校正值的计算式。

由连续性条件,有:

$$\sum_j \rho_j u^*_{n,j} A_j + \sum_j \rho_j u'_{n,j} A_j = 0 \tag{15}$$

代入式(10)或(14),该连续性方程就转化为关于 p' 的代数方程,即压力校正方程。由于单元面导数近似引入了非正交项,压力校正方程不能直接采用隐式法求解。为此,可采用延迟校正技术将非正交项用前一时步值代入作近似计算(即按显式计算)或忽略非正交项。若忽略非正交项的的单元面插值速度和速度校正公式,可得到如下 SIMPLEC 算法的压力校正方程:

$$a^p_P p' + \sum_{j=1}^{m} a^p_j p'_{P,j} = Q_{p'} \tag{16}$$

其中,系数

$$a^p_j = \rho_j A_j \beta_j \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_j \frac{1}{(L_{PE'})_j};$$

$$Q_{p'} = \sum_j \rho_j u^*_{n,j} A_j;$$

$$a^p_P = -\sum_j a^p_j$$

求得 p' 后,可得校正后的压力场 $p = p^* + \alpha_p p'$ 及速度场 $\mathrm{u} = \mathrm{u}^* + \mathrm{u}'$。这里,单元中心点速度校正 u'_P 表达式为:

$$\mathrm{u}'_P = -\frac{\Delta V}{a_P}\left(\frac{\delta p}{\delta \mathrm{x}}\right)'_P \tag{17}$$

3　显式校正步法

为进一步加速非线性问题迭代的收敛速率,人们提出了各类加速算法。认识到在 SIMPLE(SIMPLEC)算法中,所获得的一个层次上的解 $\mathrm{u} = \mathrm{u}^* + \mathrm{u}'$ 是满足质量守恒,但是未必满足动量守恒,而数值计算过程则是不断更好地同时满足质量守恒与动量守恒的过程中趋于收敛的,文献[11]提出了显式校正步法。

在 N-S 方程的有限体积方法求解过程中,为了求解非线性的方程组,常须对速度等变量作亚松弛迭代。亚松弛迭代的松弛因子一般是组织到代数方程求解过程中的。设 α 为松弛因子,则实施亚松弛后的通用形式离散方程式(7)可写成:

$$\frac{a_P}{\alpha}\phi^{n+1}_P + \sum_{j=1}^{m} a_j \phi^{n+1}_{P,j} = Q^{\phi} + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_P \phi^n_P \tag{18}$$

引入时步倍率(time step multiple) E,使 $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{E}$,在获得新一层校正后的值之后,把它们代入式(18),并用 E 代替 α,得到本层次上速度的又一次改进值 u^{n+1}_P:

$$\mathrm{u}^{n+1}_P = \frac{E_\mathrm{u}}{1+E_\mathrm{u}} \frac{1}{a_P}\left(Q^{\mathrm{u}^*+\mathrm{u}'} - \sum_{j=1}^{m} a_j(\mathrm{u}^*_{P,j} + \mathrm{u}'_{P,j})\right) + \frac{1}{1+E_\mathrm{u}}(\mathrm{u}^*_P + \mathrm{u}'_P) \tag{19}$$

其中压力校正值反映在源项 $Q^{\mathrm{u}^*+\mathrm{u}'}$ 中。

4　结果分析

4.1　计算条件及精度分析

以流速场是否满足连续性方程为准,即取连续方程虚拟质量源的最大绝对值足够小:

$$R^m_{\max} = \max_k \left|\sum_j F^{m*}_j\right| \le \varepsilon,\ k = 1,2\cdots n \tag{20}$$

其中,k 为单元编号,n 为单元总数。本文 ε 取 1.0×10^{-8}。

选择 30°角的顶盖驱动流动作为数值算例。其示

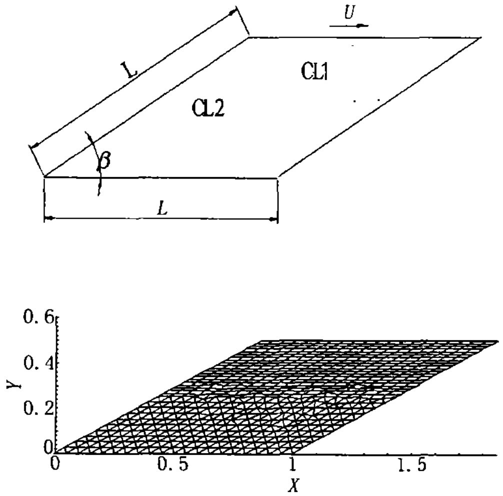
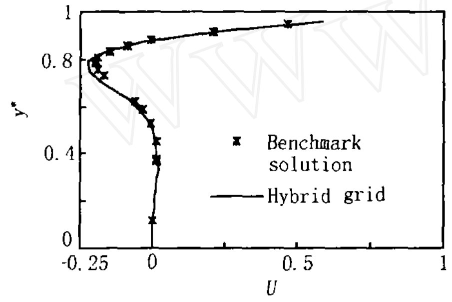


图 2　顶盖驱动流及其计算网格

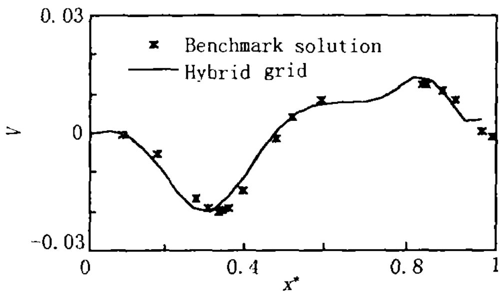
Fig. 2　Skewed driven cavity and computational grids

意图见图 2。其中斜方腔内流体密度 $\rho = 1$,边长 $L = 1$,倾斜角 $\beta = 30°$,顶盖的速度为 $U = 1.0$。CL1,CL2 为分别为斜向和横向的中心线。其余各边均为固体边壁。

选用底部加密处理后的三角形和四边形混合网格,共 651 个节点,800 个单元,并有意识的对 CL2 中心线附近的单元网格线进行了人为的扭曲化(见图 2)。分别计算了雷诺数为 100 和 1000 时的流动。并将雷诺数为 1000 的计算结果和 Demirdzic 等[12]的计算作为基准值进行了比较。沿中心线 CL1 方向上的 x 向流速 U 分布图和沿中心线 CL2 向上的 y 方向流速 V 分布见图 3,其中 x^*,y^*分别为沿中心线规范化后的距离。从图中可以看出,计算结果与基准值吻合地很好。



(a) 沿 CL1 的 x 向流速 U 分布



(b) 沿 CL2 的 y 向流速 V 分布

图 3 流速分布图

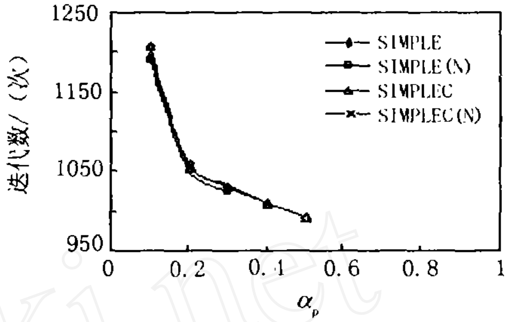
Fig. 3 Veloctiy profile ($Re = 1000$)

4.2 收敛性能分析

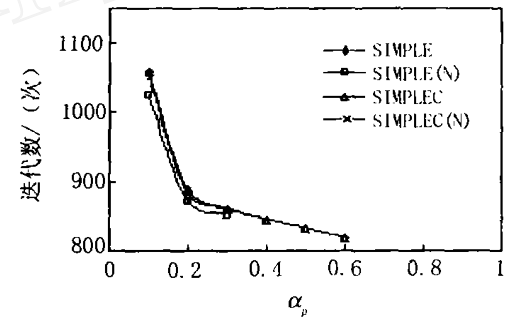
基于混合网格上 30°角斜方腔流动的计算,分析了忽略非正交项的 SIMPLE 和 SIMPLEC 算法以及考虑非正交项的 SIMPLE 和 SIMPLEC 算法(分别记为 SIMPLE(N)、SIMPLEC(N))的迭代收敛性能。同时,尝试采用显式校正法来改进收敛性能。在非结构网格中,由于网格的不规则性 SIMPLE 和 SIMPLEC 算法的收敛速率很难评估,因此在非结构同位网格的 SIMPLEC 算法中仍对压力作了亚松驰。在比较图上 SIMPLE 和 SIMPLEC 采用的松弛因子是相同的。

4.2.1 非正交项的影响

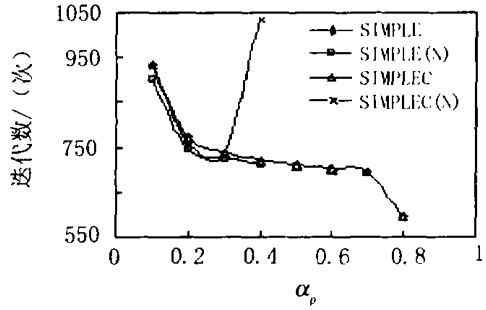
首先考察因计算网格非正交性引入的附加项对 SIMPLE 类算法收敛性能的影响。在不同的压力松弛因子 α_p 下,$Re = 1000$ 时迭代至收敛所需外迭代数的



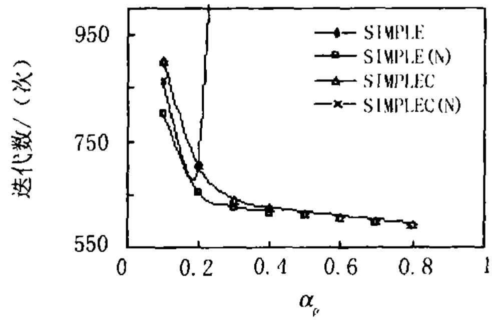
(a) $\alpha_u = 0.5$



(b) $\alpha_u = 0.6$



(c) $\alpha_u = 0.7$



(d) $\alpha_u = 0.8$

图 4 $Re = 1000$ 时收敛速率比较

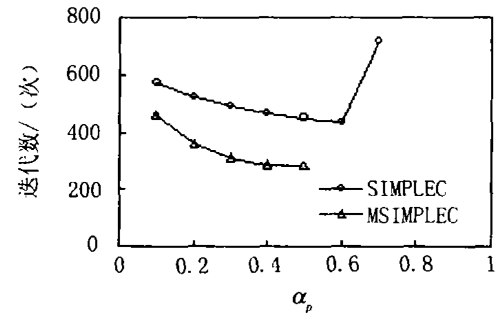
Fig. 4 Comparison of the convergence performance at $Re = 1000$

比较见图 4。

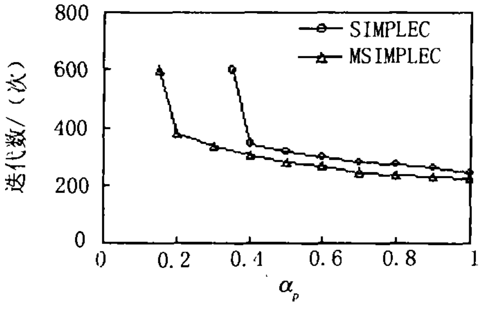
从上图可知,如果松弛因子选取适当,SIMPLE/ SIMPLE(N)/ SIMPLEC/ SIMPLEC(N)算法均能取得较好的收敛速率。但是,在考虑非正交项影响后,算法的收敛速率没有明显改善。而且算法对松弛因子的选择依赖性增强,当速度松弛因子 α_u 增大时,其取值范围减小。

4.2.2　显式校正步法

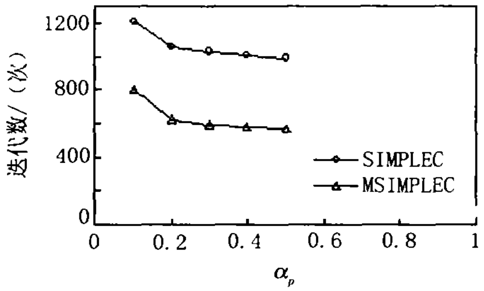
作者对各类松弛因子的组合作了收敛速率的比较,计算结果表明,在采用显式校正步法之后,收敛速率有了明显地改进;而且,即使采用小的速度亚松弛因子,具有显式校正步的算法都能获得较好的收敛速率。因为非正交项不能有效地改进 SIMPLEC 算法的收敛性能,所以在考察显式校正步法对收敛性能的影响时,只在文中列出忽略非正交项的 SIMPLEC 算法的计算结果作分析。图 5(a)、(b)、(c)、(d)分别为在 $\alpha_u = 0.8$ 和 $\alpha_u = 0.5$ 时的 SIMPLEC 和进行了显式校正的 SIMPLEC,记为 MSIMPLEC。由图 5 可知,显式校正步法整体地改善了求解 N-S 方程的收敛速率;在使用小的 α_u 时,即使 SIMPLEC 所需迭代步数有明显增加,但是经显式校正后,仍能达到较好的收敛速率,只是 α_p 的选择范围与原始的 SIMPLEC 相比没有改善。



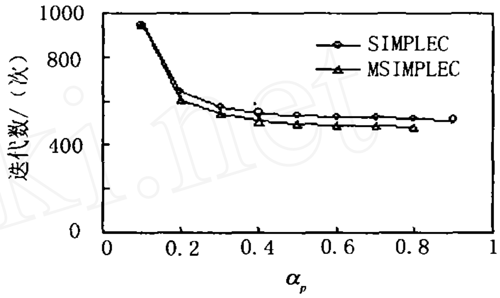
(a)　$Re = 100$, $\alpha_u = 0.5$



(b)　$Re = 100$, $\alpha_u = 0.8$



(c)　$Re = 1000$, $\alpha_u = 0.5$



(d)　$Re = 1000$, $\alpha_u = 0.8$

图 5　显式校正步法加速收敛

Fig. 5　Acceleration of convergence using explicit correction step

为了进一步说明显式校正步法的优点,在不同时步倍率 E_u 下对 $Re = 1000$ 的流动采用 SIMPLEC 算法作了收敛速率的比较计算,结果如图 6 所示。从图中可以看出,MSIMPLEC 明显改善了收敛性能。

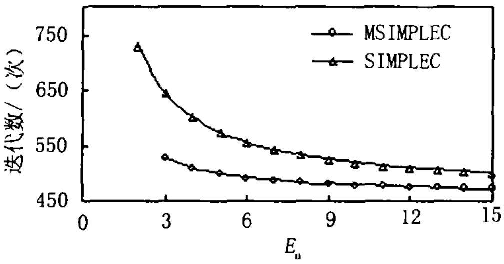


图 6　不同时步倍率的收敛速率比较

Fig. 6　Comparison of convergence rate at different E_u

5　结　论

利用 30°角的斜方腔流动计算成果,分析了非结构同位网格的 SIMPLE/ SIMPLEC 算法的收敛性能。得到如下结论:

(1) 如果松弛因子选取适当,SIMPLE/ SIMPLE(N)/ SIMPLEC/ SIMPLEC(N)算法均能取得较好的收敛速率。但是,在考虑非正交项影响后,算法的收敛速率没有明显的改善。而且算法对松弛因子的选择

依赖性增强,当 α_u 增大时,其取值范围减小。为了简化计算,可忽略非正交项。

(2) 显式校正步法能明显地改进求解 N - S 方程收敛速率;在使用小的 α_u 时,即使 SIMPLEC 所需迭代步数有明显增加,但是经显式校正后,仍能达到较好的收敛速率。而且,α_p 的选择范围与原始的 SIMPLEC 相近。

参 考 文 献:

[1] 陶文铨著.计算传热学的近代发展[M],北京:科学出版社.2000.

[2] JIANG Y, PRZEKWAS A. Implicit, pressured based incompressible Navier-Stokes equations solver for unstructured meshes [R]. AIAA Paper 94-0305, 1994.

[3] DAVIDSON L. A pressure correction method for unstructured meshes with arbitrary control volumes [J]. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1996, 22: 265-281.

[4] MATHUR S R, MURTHY J Y. A pressure based method for unstructured meshes [J], *Numer. Heat Transfer*, Part B, 1997, 31: 195-216.

[5] LIEN F S. A pressure-based unstructured grid method for all-speed flows [J]. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2000, 33: 355-374.

[6] FERZIGER, PERIC M. Computational methods for fluids dynamics [M]. Springer, 1999.

[7] WANG Y, KOMORI S. Comparison of using cartesian and covariant velocity components on non-orthogonal collocated grids [J] *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1999, 31: 1265-1280.

[8] LAI X J, WANG D G, CHEN Y. Pressure correction method on unstructured Grids [J]. *J. Hydrodynamics*, 2004, 16(3): 316-324.

[9] RHIE C M, CHOW W L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with training-edge separation [J]. *AIAA J*. 1983, 21: 1525-1532.

[10] VAN DOORMAAL J P, RAITHBY G D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows [J]. *Numer. Heat Transf*. 1984, 7, 147-163.

[11] YAN R H, LIU C H, Enhancement of the SIMPLE algorithm by an additional explicit step [J]. *Numer. Heat Transfer, Part B*, 1990, 17: 63-82.

[12] DEMIRDZIC I, LILEK Z, PERIC M. Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: Bench-mark solutions [J]. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1992, 15: 329-354.

Convergence performance of SIMPLE-like algorithm on unstructured grids

LAI Xi-jun[1], WANG De-guan[2], FU Yuan-fang[3]

(1. *Nanjing Institute of Geography & Limnology, CAS, Nanjing* 210008, *China*;

2. *College of environmental science and engineering, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*;

3. *Institute of mechanics, Chinese academy of sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract: SIMPLEC algorithm was implemented on cell-centered, unstructured finite volume. By the case of skewed cavity flow with 30-degree angle, the convergence performance of SIMPLE/SIMPLEC algorithm was analyzed on unstructured grids and the influence of accepting or rejecting non-orthogonal terms was compared. If the under-relaxation is selected properly, SIMPLE/SIMPLEC has excellent performance. To simplify, non-orthogonal terms can be omitted. Then, explicit correction step was adopted to accelerate the convergence rate. It remarkably hastened the convergence rate of solving Navier-Stokes equation and good convergence can be obtained even if different sets of under-relaxation coefficient are selected.

Key words: unstructured collocated grids; SIMPLEC algorithm; convergence performance; explicit correction step