

文章编号: 1000-3851(2001)01-0001-06

复合材料薄壁梁力学特性分析

邓忠民¹, 诸德超²

(1. 中国科学院力学所非线性连续介质开放实验室(LNM), 北京 100080;

2. 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

摘要: 综述了人们在建立研究复合材料薄壁梁力学特性的非线性梁理论及分析结构剖面特性, 确立结构算子参数等方面所做的工作以及这些研究工作的特点。同时, 结合作者的工作, 介绍了近年来各国学者在复合材料薄壁梁力学特性研究上的进展。

关键词: 复合材料; 薄壁梁; 力学特性

中图分类号: TB 330.1 **文献标识码:** A

ANALYSIS ON MECHANICAL CHARACTERISTICS OF COMPOSITE THIN-WALLED BEAMS

DENG Zhong-min¹, ZHU De-chao²

(1. Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media (LNM), Institute of Mechanics,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

2. Solid Research Institute, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The composite thin-walled beams are widely used in industry because of their good mechanical properties. In this paper, the research work for the composite thin-walled beams about nonlinear beam theory and analysis of the beam cross-section characteristics are surveyed. Dealing with warping displacement, the composite thin-walled work can be divided into six classes: (1) free warping model; (2) one-order warping theory; (3) high-order warping theory; (4) axial warping distribution model; (5) eigen-warping model; (6) the other models. With respect to the mechanical characteristics of the composite thin-walled beams, the recent progresses including the authors' work which considers the laminate warping effect for composite thin-walled beams are introduced.

Key words: composite; thin-walled beams; mechanical characteristics

复合材料薄壁梁由于其具有高比强度, 高比模量和质量轻的特性而被广泛应用于工程结构, 尤其航空航天结构上。如现代直升机旋翼系统的桨叶采用复合材料薄壁梁, 不仅可改善桨叶的气动弹性稳定性和响应性能, 最大地挖掘气动剪裁潜力, 而且合理利用复合材料的刚度和阻尼特性, 设计成结构简单、使用和维修方便的无铰旋翼, 使直升机的机动性和加速性以及使用寿命都能得到改善。随着复合材料薄壁梁的应用越来越广泛, 近年来, 研究复合材料薄壁梁的力学行为, 准确地反映复合材料薄壁梁的力学规律, 已成为力学工作者的一个重要研究方向。

由于复合材料薄壁梁在实际工程应用中的受力

状态和变形都很复杂, 存在着载荷耦合, 结构弹性耦合、非线性的大变形大挠度等力学行为, 如直升机旋翼桨叶的受载和变形就非常复杂。近年来, 力学工作者们对旋翼桨叶这种薄壁梁的研究, 主要是从两个角度进行: (1) 从研究复合材料梁本身的非线性运动学出发, 分析薄壁梁大变形等力学规律; (2) 从薄壁梁本身的物理特点薄壁出发, 考虑如横剖面特性, 横剖面各种翘曲、剪切变形耦合等对薄壁梁力学特性的影响。

1 复合材料非线性梁理论

复合材料梁剖面常为叠层结构, 抗剪刚度较低,

收稿日期: 1999-07-15; 收修改稿日期: 1999-09-29

作者简介: 邓忠民(1968), 男, 博士, 中科院力学所LNM 室博士后, 研究方向: 复合材料力学, 计算结构力学, 材料强化设计。

尤其是薄壁叠层梁更是如此,而且在变形过程中存在着拉伸-扭转、弯曲-扭转的耦合效应。结构在变形后固有平面外的翘曲变形比较大,经典的 Euler-Bernouli 梁及 Timoshenko 梁理论已不能准确地描述复合材料梁的变形行为,此外大变形大挠度的几何非线性因素又困扰着对薄壁梁静动力特性的研究。因此建立一套能够合理、准确地刻划梁的变形行为,且为实际工程计算所接受的复合材料梁的非线性理论是研究复合材料薄壁梁的一个重要方向。

从 50 年代开始就有学者致力于各向异性、非均匀梁的非线性理论研究。到目前为止在这方面已有很多的工作,可大体分为五类^[1]: (1) 特定的工程梁理论; (2) 显高阶工程梁理论; (3) 隐高阶方程理论; (4) 渐近及映射梁理论; (5) 准梁理论。其中前三种为工程化或技术理论,而后两种为较严格的数学理论。无论是工程化的非线性梁理论还是数学化非线性梁理论,核心问题都是给出形式简洁,可以合理描述梁剖面内外的翘曲、有限应变、转动等非线性因素的应变定义。这些非线性梁理论以及基于这些理论的复合材料旋翼桨叶的分析方法,出发点是梁本身非线性运动学,而对结构的薄壁特性,材料各向异性对结构算子参数的影响,处理的一般比较简单。对复合材料薄壁梁来说,其横剖面的薄壁特性也是非常重要的结构特征。本文作者对从薄壁梁特点出发,介绍了复合材料薄壁梁力学特性的研究进展。

2 复合材料薄壁梁理论研究现状

薄壁梁特征在于梁厚度方向尺寸与剖面其它方向的尺寸相比很小,由此引起薄壁梁剖面的剪应力和剪应变比一般实心梁要大,一般会引起薄壁梁受载时产生翘曲位移较大,而翘曲变形又能形成翘曲正应力和翘曲剪应力反作用于结构剖面,使得薄壁梁剖面的力学分析相对于实心梁要复杂得多。

薄壁梁(图 1)剖面坐标系如图 2。其中 xy 为固定直角坐标系, A 为剖面周线上任意一点, n, s 为沿剖面周线变化的流动直角坐标系, n 为点 A 处剖面周线的法线方向, s 为周线切线方向, θ 为剖面周线切线 s 与 x 轴正向夹角。

各向同性薄壁梁力学特性的研究早在十九世纪就已进行^[2]。当时, Navier 基于著名的平剖面假设对薄壁梁的弯曲特性进行分析。考虑对象为简单的对称剖面,认为通过结构剖面形心的横向荷载和支撑反力的合力,只产生弯曲,而通过剖面形心的轴向荷

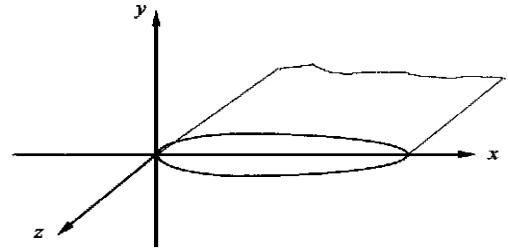


图 1 薄壁梁的固定坐标系

Fig 1 Fixed coordinate system for thin-walled beam s

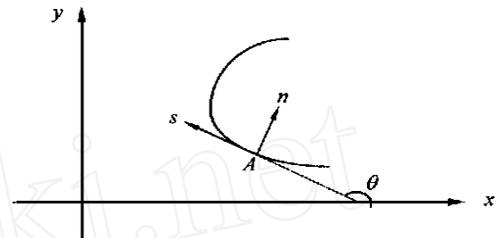


图 2 周线流动坐标系

Fig 2 Current coordinate system along contours

载,只产生拉伸和压缩,梁中的剪应力则采用 D. J. Jourawski 在十九世纪五十年代发表的公式计算。对薄壁梁扭转的研究, St Venant 也在十九世纪五十年代提出了薄壁梁自由扭转理论。圣维南理论的关键在于扭转时杆件剖面可自由变形而偏离平面截面,即所谓剖面自由翘曲。

二十世纪随着薄壁梁在飞机上的广泛应用,薄壁梁弯曲与扭转理论得到了迅速的发展和应^[3,8]。其中著名的有 Vlasov-乌曼斯基理论^[3-5],逐步翘曲修正模型^[6],本征翘曲函数法^[7,8]等。所谓弹性薄壁梁的弯曲与扭转理论,都是为了满足工程目的而创造的一种近似理论,因而它必然建立在一定的简化假设基础上,存在着一定的使用范围。象 Navier 弯曲理论一样,没有考虑与弯曲有关的剪切变形,而 St Venant 扭转理论,包含了与扭转有关的剪切变形,却不包括任何剪滞效应等。

对于复合材料薄壁梁力学特性的研究,随着近年来复合材料薄壁梁在航空工程上的应用越来越广泛,一批学者也已在这方面做了大量细致的工作。

立足于分析复合材料薄壁梁剖面特性,确定结构算子参数,建立的复合材料薄壁梁理论现已有许多种。这些理论研究的薄壁梁对象多种多样,如从薄壁梁剖面形状来分:有开室剖面薄壁梁理论,有盒式梁,单闭室薄壁梁或多闭室薄壁梁理论等;从结构材料特性来分类,或只考虑横观各向同性材料,或仅考

虑正交各向异性材料, 也有研究一般各向异性材料的; 从结构受载状态来分, 或只分析复合材料薄壁梁静力特征, 或只分析结构自由振动固有特性, 也有的分析直升机悬停、前飞等任务下复合材料薄壁梁——旋翼桨叶的动力特性。从分析方法来分, 一般分为直接进行理论分析和基于有限元法的数值分析^[9]及实验分析。

直接分析法是通过封闭形式的简洁明了的数学公式及简单的近似, 直接得到复合材料薄壁梁的剖面特性, 以了解耦合的弹性结构机理, 即解析法研究, 直接用解析法来分析复合材料薄壁梁的力学特性有利于对薄壁梁变形实质的认识和理解, 但解析法应用的缺点是它对于不同剖面形式与材料特征的适用性较差。

自从特纳首次将有限元法用于飞机结构分析后, 有限元法作为一个较好的数值计算方法被广泛应用于工程分析计算上, 复合材料薄壁梁剖面特性的分析也不例外。有限元法的通用性和模型分析的灵活性是直接理论分析难以比拟的, 能计算出任意形状剖面的翘曲函数, 剪切中心和弹性特性。

对复合材料薄壁梁力学特性的研究若按分析模型对薄壁梁主要特点——剖面翘曲的处理来分, 可大略分为下面六大类。

(1) 自由扭转模型。该模型的关键在于受载时结构截面可自由变形而偏离平面截面, 即所谓剖面自由翘曲。自由扭转模型的分析方法一般采用直接分析法, Hegen ir 和 Nair^[10]对横观各向同性的非均质扭转梁进行分析, 文中将非均质横剖面的复合材料梁的自由扭转分解成几个均质剖面梁的自由扭转(圣维南解)叠加。分割剖面的不协调条件由翘曲函数来满足, 该方法用于开口复合材料薄壁梁研究比较适宜。文中的叠加原理在复合材料薄壁梁有限元分析法中应用更为广泛。Vasilan^[11]解决了各向异性材料的薄壁梁自由扭转问题, 其模型的主要特点是假设结构受载时, 横剖面在固有平面内不变形, 轴向应力和翘曲度为零。

(2) 一次翘曲理论。一次翘曲理论是指翘曲位移采用一次翘曲函数展开, 且形函数是表示翘曲位移沿剖面周线的分布趋势。Vlasov-乌曼斯基理论就是典型的一次翘曲理论。二十年代Vlasov^[3]发展了开口薄壁杆件的扭转与弯曲相结合的综合理论。其基本假设是固有平面内完全刚性, 固有平面外完全柔性。薄壁杆件中面无剪切变形。乌曼斯基

Gjelsvik^[4]结合圣维南原理假设闭室薄壁梁中面剪切变形的分布与圣维南分布一样, 建立了与开式剖面形式一致的闭室薄壁梁扭转综合理论。Vlasov-乌曼斯基理论实质是将剖面二维应力位移场简化为一维应力应变场, 即假设翘曲位移可分解为

$$W^w = S(z) Q(s)$$

其中: $S(z)$ 为纵轴翘曲函数, $Q(s)$ 为周线翘曲函数, 函数 $Q(s)$ 已知且由结构的自由翘曲得到。六个一般梁的位移由板壳位移通过几何考虑而决定, 一般力和平衡方程由虚功原理得到。在Vlasov-乌曼斯基理论基础上近来发展了大量的复合材料薄壁梁理论。

Bauld 和 Tzeng^[12]在Vlasov理论基础上提出了开口复合材料薄壁梁理论。薄壁梁由一组对称的层合板叠合而成。采用Vlasov假设, 如梁的剖面形状内不变形, 不考虑面内变形影响, 周线 s 方向上的法向(图2中 n 方向)应变 ϵ_n 与轴向应变 ϵ_x 相比可以忽略; 周线中面的剪应变为 0; 剖面的每个层板部分都如同薄板一样, Kirchhoff 假设有效, 这样, 板壳的横向剪切变形影响没有考虑, 虽然可以考虑整个梁的横向剪切变形。因为文中仅考虑了对称层合, 忽略了层合薄膜力和层合力矩之间的耦合。

Chandra, Chopra 等人研究工作中的力学模型^[13-20]的主要特点有: 结构横剖面假设面内为刚性, 即不考虑面内变形的影响; 开口薄壁梁周线剪应变为 0, 闭室薄壁梁剪应变不为零, 沿周线分布趋势与自由扭转相同, 使得翘曲 Ritz 基为薄壁梁自由扭转翘曲函数; 复合材料板壁部分采用线性经典层合板理论, 材料特性仅由各层简单叠加。这样, 虽然考虑了横向剪切变形的影响, 却不考虑结构的叠层特性的影响。结果得出在弯曲剪切和拉扭耦合下, 梁的复合材料铺层情况对剖面特性的影响很大。相应的实验研究验证了端部承载和夹紧约束翘曲下的理论分析结果。在此基础上发展的一个包括开口, 单闭室, 多闭室的任意横剖面薄壁梁理论。这个模型考虑了面外翘曲变形的影响以及相关的横向剪切影响等, 并进行了部分实验分析。但是, 对于闭室薄壁梁, 其翘曲位移与梁的扭率仅仅成简单的正比关系(即翘曲位移为周线翘曲函数与扭率之积), 显得颇为粗糙, 为了解决这一问题, Kim^[21,22]对闭室薄壁悬臂梁采用了一个复杂的系数修正, 该系数与剖面形状有关。Wu^[23,24]的理论则显得更复杂, 薄壁梁板壳部分的壳力矩影响也在公式中出现, 其理论几近于薄壳理论。

Worndle^[25]基于二维有限元分析提出了一个计算剪切中心和翘曲函数的模型,材料为横观各向同性材料,纤维的分布是单轴的,轴向平行于梁轴。由几个均质的悬臂梁叠合成非均质梁,每个均质梁的剖面与非均质梁剖面的部分相同。由剖面的有限元模型求得面外翘曲位移和剪切中心的位置。但是,由扭转和剪切变形所得到的翘曲函数,只有扭转部分用于分析整体变形。文中假设梁材料特性和几何特性变化缓慢,这样,可在一个小区域内假设为无变化,而且应力场是单轴的。文中虽然针对于非均质梁,但同样适宜于薄壁梁。

Kosmatka^[26]改变了Worndle分析中的横观各向同性材料的限制,扩展为任意纤维方向的正交各向异性材料。其对梁的非均质性的处理,类似于Worndle,也是通过二维有限元分析导出。虽然Kosmatka在推导时,解除了梁剖面内刚性和单轴应力场的限制,采用全部的应变能来导出面内和面外的翘曲。对于一个各向异性梁,面内和面外的翘曲函数的控制方程是耦合的。然而,文中在进行结构非线性分析中,仍仅仅考虑了扭转翘曲,且应力场具有单轴性。

对于复合材料薄壁梁动力特性的研究,Relifield^[27],Nixon^[28]分别从理论和实验上作了分析,研究表明,结构剖面承受的横向剪切应力影响比较重要。

邓忠民^[29]在一次翘曲的基础上,结合复合材料薄壁结构的叠层特性,进一步验证了分层翘曲模型。认为由于材料的各向异性和铺层特性不一致,铺层每一层的纵轴翘曲函数 $S(z)$ 分布不一致,为分层线性分布。对于薄壁第 i 层铺层,翘曲位移为

$$W_i^w = \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_n}{h_i} \right) S(z)_d \mathcal{Q}_s)_d + \frac{\zeta - \zeta_n}{h_i} S(z)_u \mathcal{Q}_s)_u$$

式中: $S(z)_d, \mathcal{Q}_s)_d$ 为第 i 层铺层下表面的纵轴和周线翘曲函数; $S(z)_u, \mathcal{Q}_s)_u$ 为第 i 层铺层上表面的纵轴和周线翘曲函数, ζ 为薄壁第 i 层铺层中一点 n 方向坐标, ζ_n 为铺层下表面 n 方向坐标, h_i 为铺层厚度。这种改进得出的数值模拟结果比较好地反映出结构的叠层特性。

(3) 高次翘曲理论。一次翘曲理论是假设翘曲位移用一次翘曲形函数来展开。为了更加精确描述翘曲位移分布,也可将翘曲位移用高次项来展开。即设翘曲位移

$$W^w = \sum_{j=1}^l S(z)_j \mathcal{Q}_s)_j$$

其中, l 为翘曲函数最高阶数。逐步翘曲修正模型即是一种将翘曲位移用高次Ritz基(周线翘曲函数)展开的理论。这种模型由诸德超最早提出。周线不变形的假设继续保留,先假设翘曲位移在周线上分布与结构自由翘曲模型相同,通过本构关系、平衡方程得出主应力系,主应力系满足平衡方程,再考虑变形协调条件以及边界条件,用自相平衡的次应力系来修正,修正从理论上说可以有无穷多项,但从工程角度看,仅仅需要二、三次修正项即可满足所要求。事实上,Vlasov理论即为逐步翘曲只修正一次的模型。这种理论在分析弹性闭式薄壁杆件的平衡问题^[6]及复合材料层合叠层梁的研究^[30]上已被证明有效。用于复合材料薄壁梁上高次翘曲函数系的收敛性也比较好^[29,31],且数值模拟结果能较好地反映结构剖面的几何特性。

(4) 轴向翘曲分布模型。一次翘曲理论,高次翘曲理论Ritz基都是假设翘曲位移在周向(s 方向)的分布,即先假设周线翘曲形函数已知,相对应的简化是,先假设薄壁梁翘曲位移在轴向(z 方向)的分布形式,即先假设纵轴翘曲函数已知,再通过控制方程分析薄壁梁的力学特性。

Mansfield和Sobey^[32,33]基于这种模型,通过应力位移关系及平衡条件求得薄膜力和翘曲的影响,分别导出了单闭室、双闭室直升机复合材料旋翼桨叶的耦合扭转、拉伸、弯曲刚度。公式中缺剪切变形的影响,且理论太过复杂,难于用于工程应用上。Libove^[34]假设纵向应变在轴向 z 方向的分布,为轴向坐标的线性函数,认为沿壁厚方向纵向位移一样,计算了自由端承载的单闭室悬臂梁情况,在壁很薄的情况下仅有薄膜力作用,周向 s 上的法向应力不计,公式中包括了弯曲剪切的影响,但无扭转翘曲的影响。而剪切变形和扭转翘曲对复合材料薄壁梁力学特性的影响已被证明很大。

(5) 本征翘曲分析模型。(2)、(3)、(4)所介绍的都是Ritz基法,即先假定翘曲位移在一个方向的分布规律,再通过控制方程来求翘曲位移和扭率。vonKaman和钱伟长和文献^[7]则在薄壁梁受载时,横剖面保持面内不变形的假设下,通过结构的本征方程求出剖面上每一点限制扭转的本征翘曲函数解。

Bauchau^[35-38]在本征翘曲模型基础上,于1985年建立了一种分析各向异性复合材料梁的方法。这种方法假设剖面平面内的刚度为无限大(即剖面刚性,固有平面内面内变形忽略不计),剖面在固有平



面外可以自由翘曲。这样, 面内位移可由剖面的 6 个刚体位移来表示, 而纵轴(剖面平面外)位移由表示剖面翘曲特征的特征翘曲函数与纵轴位置函数的积来表示。初始应用这种理论对多闭室的横观各向同性复合材料薄壁梁进行分析, 要求应力场具有单轴性, 即各向异性材料轴的一轴平行于梁轴, 其他的轴平行于剖面轮廓线的切线, 这样, 材料的耦合特性没有考虑。结构剖面特征翘曲函数采用有限元法通过对剖面的离散, 按一般特征值问题求解。Bauchau 后将其推广为一般的正交各向异性材料。特征翘曲仍由剖面的特征值问题导出。实际在工程上, 一般也仅要考虑少部分特征翘曲, 如扭转翘曲和剪切变形所引起的翘曲。

(6) 其他分析模型。以上模型大多是基于剖面刚性的假设上发展的。这种假设对旋翼桨叶这种壁比较厚且有加劲框架的结构是比较适用的, 这种假设忽略了面内变形对结构特性的影响。Giavotto^[39]等人利用二维有限元法得出复合材料薄壁梁的一般翘曲函数, 剪切中心和剖面特性。其改进之处有: 分析是对于一般各向异性材料, 剖面平面内和平面外的变形都考虑了; 采用能量法, 使用应变能的完整表达式代替单轴应力和剖面刚性的假设。最后, 将剖面二维有限元分析简化成线性系统下的二阶常微分方程, 求解方程组可得为轴向坐标的幂函数普通特征解和为轴向坐标的线性函数的特解。特解与梁的 6 个独立应力合力引起的翘曲位移有关, 而普通特征解的特征向量则代表端部效应影响, 相关的特征值则提供了从端部展开的模式衰减信息。就剖面分析而言, 文献[39]研究结果较为通用, 但对结构材料的各向异性和叠层特性则处理的较简单。Borrim^[40]等人在文献[39]的基础上推广为非线性分析, 即对每个剖面进行线性分析, 得到剖面特性后, 用于梁整体变形分析。非线性整体变形分析, 包括整体变形量表示的由特解求出的一般翘曲位移。在非线性分析中, 线性特征值问题普解的特征向量可能含有附加的动力学变量。基于这种普解的单元仅仅用于靠近复合材料结构端部, 以考虑复合材料薄壁梁的振动特性。文中假设有: 梁剖面的二维线性有限元分析能得出梁作非线性整体分析的弹性特性。非均质梁剖面分析可以用几个独立的均质剖面二维分析代替。在剖面形状不是变化太快, 这个假设对分析的精确度影响不大。

另外, Lee 等人^[41, 42]还结合非线性梁理论, 通过

在梁剖面上设置翘曲节点来计算剖面的翘曲, 用常规梁节点描述梁的非翘曲变形, 这样便可以统一考虑复合材料薄壁梁弯曲扭转及翘曲的变形。这种单元可计算实心、薄壁复合材料薄壁梁的变形, 也可分析复合材料旋翼桨叶的大挠度和大转动问题。但这种方法最大的弱点是单元节点数目太大, 需要耗费大量的计算时间。当然, 对复合材料薄壁梁力学分析还有采用曲梁单元^[43]、薄壳模型及采用三维有限元分析模型等。

3 结束语

虽然近二十年来, 已有很多学者对复合材料薄壁梁的力学分析作了许多细致有益的工作, 并已应用于复合材料旋翼桨叶的优化设计上^[44], 但是, 对复合材料薄壁梁力学行为的研究仍有许多工作待做, 如:

(1) 结合薄壁梁的实际工程应用, 在何种状态下, 工程上采用何种梁理论, 既能保证分析的精确性, 又有较好的效益性。

(2) 各种翘曲模型, 包括分层翘曲模型, 对薄壁结构的铺层层间应力的影响都未加以考虑。而层间破坏却为复合材料叠层结构主要破坏形式之一, 怎样在分析中加入层间应力的影响, 还有待更进一步研究。

参考文献:

- [1] 王元丰, 诸德超 力学进展, 1996, 26(2): 179- 186
- [2] Timoshenko S P. History of Strength of Materials[M]. New York: McGraw-Hill, 1953
- [3] Vlasov V Z. Thin-Walled Elastic Beams (translated from Russian) [M]. Washington D C: Washington D C and the Israeli Programme for Scientific Translation, 1961.
- [4] Gjelsvik A, 何福照, 等. 薄壁杆件理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 1987. 1- 15.
- [5] 胡海昌, 解伯民. 弹性薄壁杆件的静力学[M]. 北京: 科学出版社, 1955. 121- 178
- [6] 诸德超. 弹性薄壁杆件的平衡理论[J]. 北京航空学院学报, 1957, (3): 39- 51.
- [7] Theodore von Kármán, 钱伟长. Torsion with variable twist [J]. J A S, 1946, 13(10): 503- 510
- [8] Argyris H, Dunne P C. J R A S, 1947, 51(51): 434, 441, 443
- [9] Hodge D H. A IAA Journal, 1990, 28(3): 561- 565
- [10] Hegemir G A. A IAA Journal, 1977, 15(1): 8- 15
- [11] Vasileva A V. M e k h a n i k o K a n p o z i m y k h M a t e r i a l o v, 1988, 24

- (2): 315- 319
- [12] Bauld N R Jr, Tzeng L S. *Inter J of Solids Structure*, 1984, 20 (3): 277- 297.
- [13] Chandra R, Chopra I A. *IAA Journal*, 1991, 29(12): 2197- 2206
- [14] Chandra R, Chopra I A. *IAA Journal*, 1992, 30(12): 2914- 2921.
- [15] Chandra R, Chopra I. *Composites Engineering*, 1992, 2(5- 7): 347- 374
- [16] Chandra R, Chopra I. *Journal of Aircraft*, 1993, 30(6): 86
- [17] Song O, Librescal L. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 1995, 8(2): 225- 238
- [18] Aimanis E A, Badir A M. *IAA Journal*, 1995, 33(10): 1905- 1910
- [19] Fibros M W, Smith E C. *IAA Journal*, 1997, 35(8): 1341- 1347.
- [20] Suresh J K, Nagaraj V T. *Journal of Aircraft*, 1996, 33(5): 978- 986
- [21] Kim C, White S R. *Journal of Composite Materials*, 1996, 30 (10): 1132- 1149
- [22] Kim C, White S R. *IAA Journal*, 1997, 35(6): 1082- 1084
- [23] Wu X X, Sun C T. *IAA Journal*, 1991, 29(5): 736- 742
- [24] Wu X X, Sun C T. *IAA Journal*, 1992, 30(12): 2945- 2951.
- [25] Worndle R. *Vertica*, 1982 (6): 111- 129
- [26] Kosmatka J P, Friedmann P P. *IAA Journal*, 1989, 27(11): 1606- 1614
- [27] Rehfield L W, et al. *Journal of the American Helicopter Society*, 1990, 35(2): 42- 50
- [28] Nixon M W. Extension-twist coupling of composite circular tubes and application to tilt rotor blade design [R]. AIAA-87-0772. New York: AIAA, 1987.
- [29] 邓忠民. 复合材料薄壁结构力学特性研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1998
- [30] 诸德超, 黄传跃. 复合材料叠层结构静动力分析翘曲修正模型[A]. 见: 航空基金文集[C]. 1995
- [31] 邓忠民, 诸德超. 航空学报, 1999, 20(5): 458- 461.
- [32] Mansfield L H, Sobey A J. *Aeronautical Quarterly*, 1979, 30 (5): 413- 419
- [33] Mansfield L H. *Aeronautical Quarterly*, 1981, 32(4): 338- 353
- [34] Libove C. *IAA Journal*, 1988, 26(9): 1107- 1118
- [35] Bauchau O A. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52: 416- 422
- [36] Bauchau O A, Hong C H. *Journal of the American Helicopter Society*, 1987, 32(1): 60- 67.
- [37] Bauchau O A, Hong C H. *IAA Journal*, 1987, 25(11): 1469 - 1475.
- [38] Bauchau O A, Hong C H. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, 55(3): 156- 163
- [39] Giavotto V, et al. *Computers and Structures*, 1983, 16: 403- 413
- [40] Borri M, Merlini T. *Meccanica*, 1986, 21(4): 30- 37.
- [41] Lee S W, Kim Y H. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(3): 2327- 2341.
- [42] Stamble A D, Lee S W. *In Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1989, 28(9): 2143- 2163
- [43] 王寿梅, 等. 一种复合材料的大挠度曲梁单元. 力学学报, 1997, 24(4): 511- 515
- [44] Chandra R, Chopra I A. *IAA Journal*, 1996, 34(4): 835- 841.