

[文章编号] 1001-246X(2007)05-0533-04

# 高精度非定常激波装配法

张玉东<sup>1,2</sup>, 傅德薰<sup>1</sup>, 马延文<sup>1</sup>, 李新亮<sup>1</sup>

(1. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080; 2. 中国航天空气动力技术研究院, 北京 100074)

[摘 要] 为正确模拟高超声速绕流中, 来流小扰动与弓形激波之间的干扰对流动特征的影响, 将弓形激波作为动边界, 利用非定常特征关系处理激波处的边界条件. 应用五阶精度迎风紧致格式和六阶精度的对称格式与三阶精度的 R-K 方法相结合, 建立高精度非定常激波装配方法. 采用该方法数值模拟钝锥高超声速定常流场和二维抛物外形高超声速边界层流动的感受性问题, 数值模拟来流小扰动与弓形激波干扰激波后非定常扰动流场, 研究扰动波进入边界层产生边界层不稳定波的特征.

[关键词] 感受性问题; 激波装配法; 迎风紧致格式

[中图分类号] O35 [文献标识码] A

## 0 引言

研究高超声速边界层流动的转捩机理、预测其转捩位置是目前研究高速飞行器气动力和气动热特征的重要课题. 边界层转捩过程实质上是层流边界层流动对外界扰动的一种非线性反应<sup>[2]</sup>. 实验研究表明, 在超、高超声速边界层流动中, 来流的小扰动与弓形激波的干扰, 对边界层流动的转捩特征有很强的影响<sup>[3]</sup>. 因此, 为预测边界层转捩特征及转捩位置, 首先要求研究边界层流动的感受性问题, 即外界扰动进入边界层产生边界层不稳定波的问题. 采用数值模拟方法研究高超声速钝体绕流中, 来流小扰动与弓形激波干扰所产生的边界层不稳定波的问题, 要求数值模拟方法能正确模拟这类小扰动与激波的干扰.

在计算流体力学的发展中, 激波的正确模拟一直是数值方法研究的重点. 在钝体高超声速绕流模拟中, 来流的  $10^{-4}$  以下量级的小扰动与头激波干扰所产生的扰动波问题, 激波捕捉法的精度不能满足要求, 为此, Zhong 等人<sup>[3-5]</sup> 采用激波装配方法研究了钝体和平板绕流中边界层的感受问题.

本文针对该类问题的数值模拟, 应用五阶精度迎风紧致格式<sup>[1]</sup>和六阶精度的对称格式与三阶精度的 R-K 方法相结合, 建立了高精度非定常激波装配方法. 为高超声速绕流边界层感受性问题研究奠定方法基础, 并用于数值模拟抛物外形高超声速边界层流动的感受性问题.

## 1 数值方法

本文高精度非定常激波装配方法采用的空间离散格式为五阶精度迎风紧致格式<sup>[1]</sup>和六阶精度的对称格式, 时间离散采用三阶精度 R-K 方法. 且为了提高计算效率, 从弱守恒型非定常特征关系式出发, 建立了头激波处的边界条件. 从而在边界条件的关系式中免去了激波函数二阶导数的计算, 提高了计算效率.

### 1.1 控制方程

直角坐标系  $(x, y)$  下的 N-S 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} = 0,$$
$$\mathbf{U} = [ \rho, u, v, e ]^T, \mathbf{E} = [ \rho u, u^2 + p, uv, (e+p)u ]^T, \mathbf{F} = [ \rho v, uv, v^2 + p, (e+p)v ]^T,$$
$$\mathbf{E}_v = \left[ 0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u_{xx} + v_{xy} + \frac{\partial T}{\partial x} \right]^T,$$

[收稿日期] 2006-07-07; [修回日期] 2006-11-15

[基金项目] 自然科学基金(No. 10502052)资助项目

[作者简介] 张玉东(1972-), 男, 吉林通化, 高工, 博士, 从事计算流体力学算法及应用研究, 北京中科院力学所 LNM 室, 100080.

$$F_v = \left[ 0, \quad u_{xy}, \quad v_{xy}, \quad u_{xy} + v_{yy} + \frac{\partial T}{\partial y} \right]^T$$

计算采用贴体曲线坐标系  $(\xi, \eta)$  (图 1),  $\xi = 1$  为物面边界, 其中  $\xi = \xi_{max}$  为外边界, 即激波边界, 为简化计算, 激波装配过程中, 计算网格只在  $\xi$  方向拉伸变化,  $\eta$  方向保持不变.

坐标变换为

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y, t), \\ t = t, \\ t = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \\ t = t, \end{cases}$$

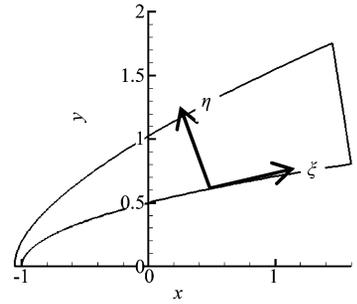


图 1 坐标系示意图

Fig. 1 Cartesian coordinates and the coordinates used in the computation

$(\xi, \eta)$  坐标系下 N-S 方程为

$$\frac{\partial (J^{-1}U)}{\partial \xi} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} = 0,$$

$$U = [ \rho, u, v, e ]^T,$$

$$E = J^{-1} [ \rho u, \rho uu + \xi p, \rho vu + \eta p, (e + p)u - \eta p ]^T,$$

$$F = J^{-1} [ \rho v, \rho uv + \xi p, \rho vv + \eta p, (e + p)v - \xi p ]^T,$$

$$E_v = J^{-1} ( \xi E_v + \eta F_v ), \quad F_v = J^{-1} ( \xi E_v + \eta F_v ), \quad u = u_\xi + \xi u_\eta + \eta v, \quad v = v_\xi + \xi u_\eta + \eta v,$$

其中  $\xi, \partial(J^{-1})/\partial t$  不为零.

### 1.2 斜激波前后关系式

在  $(x, y)$  坐标系下, 由质量守恒、动量守恒、能量守恒得到斜激波关系式

$$\rho_1 (v_1 \cdot n - z) = \rho_2 (v_2 \cdot n - z),$$

$$p_1 n + \rho_1 v_1 (v_1 \cdot n - z) = p_2 n + \rho_2 v_2 (v_2 \cdot n - z),$$

$$\rho_1 E_1 (v_1 \cdot n - z) + p_1 v_1 \cdot n = \rho_2 E_2 (v_2 \cdot n - z) + p_2 v_2 \cdot n,$$

其中  $p, \rho, v, z, n$  分别为压力、密度、气流速度矢量、激波速度和激波法向矢量, 下标 1, 2 分别表示激波前后.

$$\text{激波边界为 } \xi = \xi_{max}(x, y, t), \text{ 激波法向 } n = \frac{x}{\sqrt{(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta})^2}} i + \frac{y}{\sqrt{(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta})^2}} j, \text{ 激波速度 } z = - \frac{t}{\sqrt{(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta})^2}}.$$

### 1.3 特征相容关系式

计算坐标下, 气动方程沿  $\xi$  方向特征矩阵  $B = \frac{\partial E}{\partial U} \xi + \frac{\partial F}{\partial U} \eta + t$ , 其特征值为

$$(u_\xi + v_\eta + t), \dots, (u_\xi + v_\eta + t), (u_\xi + v_\eta + t \pm c \sqrt{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}}),$$

其中  $c$  为声速, 取计算域指向激波边界的特征值  $(u_\xi + v_\eta + t + c \sqrt{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}})$  相应的左特征向量

$$I_L = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2c} (u^2 + v^2) \sqrt{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}} - (u_\xi + v_\eta) \\ u_\xi - \frac{-1}{c} u \sqrt{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}} \\ v_\eta - \frac{-1}{c} v \sqrt{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}} \\ \frac{-1}{c} \sqrt{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}} \end{bmatrix}^T,$$

则沿  $\xi$  方向特征相容关系式

$$I_L \cdot \left[ \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial E}{\partial U} \xi + \frac{\partial F}{\partial U} \eta + t \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial E}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial U}{\partial t} t + \frac{\partial E_v}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial E_v}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial F_v}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} \eta \right] = 0.$$

联立求解上述斜激波前后关系式和特征相容关系式可以确定激波非定常运动的位置及速度, 结合动网格技术, 进而确定控制方程中的  $\xi, \partial(J^{-1})/\partial t$ , 使非定常流场控制方程封闭可解.

### 2 计算结果

为验证本文建立的高精度激波装配法,数值模拟了 5 锥角钝锥外形轴对称高超声速绕流定常流场,来流  $M = 6$ ,  $Re = 60\ 000$ ,采用等温壁条件  $T_w = 193\ K$ .这里以激波到钝锥对称轴的距离  $y$  代表激波位置,以激波位置沿对称轴的导数  $y_x$  代表激波斜率,图 2、图 3 分别给出了本文和文[6]对该流场激波位置和激波斜率的计算结果,两者比较一致,表明本方法对激波的模拟是正确的.

应用本方法,对二维抛物外形,数值模拟了来流快声波扰动高超声速非定常扰动流场.网格分布为  $160 \times 120$ (图 4),来流条件为  $Ma = 15$ ,  $Re = 6\ 026$ ,采用等温壁条件  $T_w = 193\ K$ .来流扰动的模拟采用在均匀自由来流上叠加二维平面波形式的扰动,本文快声波扰动量形式为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} e^{i \left( kx - \frac{FRc}{10^6} t \right)}$$

其中  $u, v$  分别是  $x$  轴方向和  $y$  轴方向分速度扰动量,  $p, d$  分别是压力和密度扰动量,  $\omega = 5 \times 10^{-4}$ ,  $k = 15$ ,  $F = 2\ 655$  分别代表扰动振幅、波数和频率,  $x, t$  分别为轴向位置和时刻.

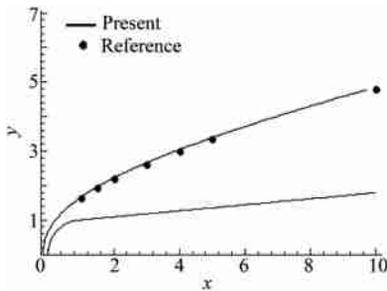


图 2 钝锥激波位置计算结果  
Fig. 2 Shock wave locations

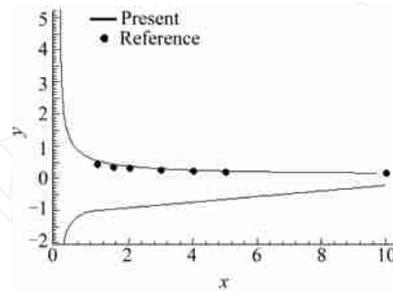


图 3 钝锥激波斜率计算结果  
Fig. 3 Shock wave slopes

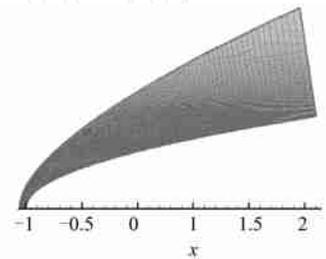


图 4 抛物外形及网格分布  
Fig. 4 Computational figure and grids

图 5、图 6 给出了抛物外形高超声速定常流场激波装配法计算流场等压力和等涡量分布结果,图 7 比较了本文和文[3]物面及波后压力梯度沿  $x$  轴分布计算结果.

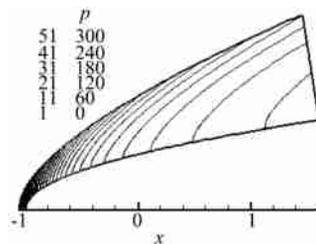


图 5 流场等压力分布  
Fig. 5 Contours of pressure

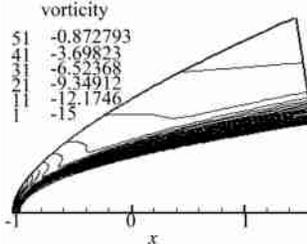


图 6 流场等涡量分布  
Fig. 6 Contours of vorticity

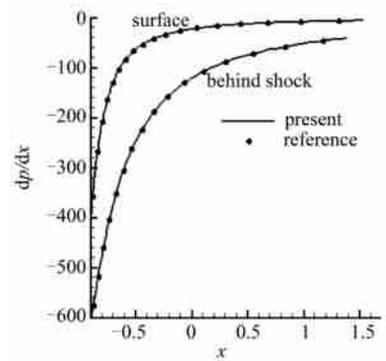


图 7 压力梯度沿  $x$  轴分布  
Fig. 7 Pressure gradient on body surface

本文定义非定常流场扰动量为  $q(x, y, t) = q(x, y, t) - Q(x, y)$ ,其中  $q(x, y, t)$  为非定常 NS 方程计算得到的瞬时流场,  $Q(x, y)$  为另外单独计算得到的定常流场.

一般地,来流扰动与激波作用将产生声波、熵波和涡波等<sup>[3]</sup>,图 8~10 分别为超声速来流快声波扰动抛物外形非定常扰动流场压力扰动量、熵扰动量、涡量扰动量等值线分布的计算结果,图中显示来流扰动与弓形激波作用后,产生的声波进入边界层并反射出边界层外,而熵波和涡波扰动主要出现在边界层外的对流区,边界层与声波扰动有很强的干扰作用,而与熵波和涡波扰动的干扰要弱的多,该结论与文[3]基本一致.

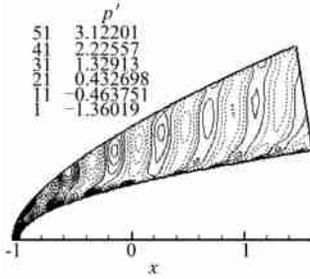


图 8 压力扰动量分布

Fig. 8 Contours of instantaneous perturbations of pressure

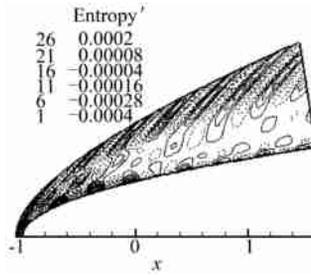


图 9 熵扰动量分布

Fig. 9 Contours of instantaneous perturbations of entropy

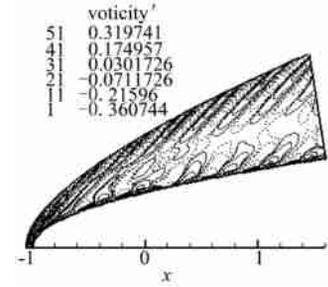


图 10 涡量扰动量分布

Fig. 10 Contours of instantaneous perturbations of vorticity

上述结果表明,本文高阶精度非正常激波装配法可准确模拟幅值很小的来流扰动与激波的相互作用及波后的非正常扰动流场,适用于高超声速钝体绕流中,来流扰动与弓形激波干扰产生边界层不稳定波等研究。

### 3 结论

本文应用五阶精度迎风紧致格式和六阶精度的对称格式与三阶精度的 R-K 方法相结合,建立了高精度非正常激波装配方法.通过对高超声速条件下,钝锥绕流和抛物外形快声波来流扰动非正常流场的数值模拟,表明所建立的方法对激波的模拟是准确的,对来流小扰动与激波作用及波后非正常扰动流场的模拟是正确的,该方法适用于超声速边界层对来流扰动感受性问题的研究。

### [参 考 文 献]

- [1] Fu Dexun, Ma Yanwen, Liu Hong. Upwind compact scheme and application [C]. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Symposium on Computational Fluid Dynamics, 1993, 1: 184 - 190.
- [2] Reshotko E. Hypersonic stability and transition [M]// Desideri J A, Gowinski R, Periaux J, eds. Hypersonic Flows for Reentry Problems. 1991, 1: 18 - 34.
- [3] Zhong Xiaolin. Leading-edge receptivity to free-stream disturbance waves for hypersonic flow over a parabola [J]. J Fluid Mech, 2001, 441: 315 - 367.
- [4] Ma Y B, Zhong Xiaoling. Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate. Part 1: Wave structures and interactions [J]. J Fluid Mech, 2003, 488: 31 - 78.
- [5] Ma Y B, Zhong Xiaoling. Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate. Part 2: Receptivity to free-stream sound [J]. J Fluid Mech, 2003, 488: 79 - 121.
- [6] Liubimov A V, Rusanov V V. Flow of gas around blunt body [M]. Moscow: NAUKA, 1970.

## A High-order Unsteady Shock-fitting Scheme

ZHANG Yudong<sup>1,2</sup>, FU Dexun<sup>1</sup>, MA Yanwen<sup>1</sup>, LI Xinliang<sup>1</sup>

(1. LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China; 2. China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China)

**Abstract:** Based on a high-order compact upwind scheme, a high-order shock-fitting finite difference scheme is studied for numerical simulation of the generation of boundary layer disturbance waves due to free-stream waves. Both steady and unsteady flow solutions of the receptivity problem are obtained by computing full Navier-Stokes equations. Numerical simulation of receptivity to free-stream disturbances for hypersonic boundary layers is performed.

**Key words:** receptivity; shock-fitting; compact upwind scheme