

# 海底管道铺设的力学分析

曾晓辉 柳春图 邢静忠

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要** 海底管道铺设是近海工程建设中的重要环节。由于铺管问题的控制方程具有较强的非线性, 加之边界可动, 所以问题的求解比较困难。本文采用奇异摄动法较好地解决了这一问题, 并与有限元解作了比较。

**关键词** 铺管, 几何非线性, 奇异摄动法

海底管道敷设是海底管道工程建设中的一个重要工况。敷设时的管道应力通常是管道设计过程中的控制参数之一。对于海底油气集输管道来说, 最常用的铺管方法是铺管船法(在远离海岸的海上油田中, 这几乎是唯一可以使用的铺设方法)。本文研究用铺管船铺管时管道的受力情况。

为简化问题, 目前国内海洋石油部门在对铺管进行力学分析时, 或采用小变形线性梁理论(忽略管道的轴力)、或用悬链线理论(忽略管道的弯矩)来处理。但这两种方法只能适用于极浅水和很深水的范围, 对常见的中等深度水的情况不适用。国外有一个非线性有限元求解程序<sup>[1]</sup>, 但缺点是: 操作复杂, 计算费时, 而且不能处理国内常见的双层管。本文将管道视为非线性梁, 用奇异摄动法来求解, 这不仅理论上合理, 而且单、双层管都能算(二者的差别仅在于截面的弯曲刚度不同而已)。此外由于本文方法比有限元程序运算快速、使用简便, 适于工程部门进行方案设计、反复修改设计方案时采用。

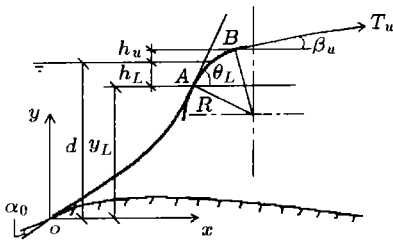


图1 铺管船铺管法示意图

## 1 悬空段管道的控制方程及其解

### 1.1 管道控制方程

管道微元的受力情况如图2所示。

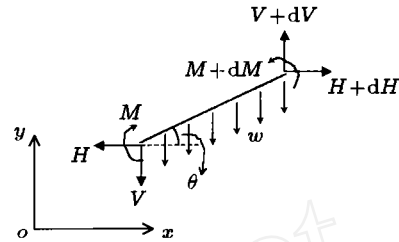


图2 管道微元受力情况

其平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 \\ V &= V_0 + \int_0^S w dS \\ \frac{\partial M}{\partial S} &= H \sin \theta - V \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $S$  是管道弧长(在原点处其值为0),  $\theta$  为管线上任一点切线与水平线的夹角,  $H$ 、 $V$ 、 $M$  分别是管线横截面的水平、铅直力及弯矩,  $H_0$ 、 $V_0$  分别是原点处的值,  $w$  是单位长度的管重。注意到

$$\begin{aligned} M &= EI \frac{d\theta}{dS} \\ EI \frac{d^2\theta}{dS^2} \Big|_{S=0} &= \frac{dM}{dS} \Big|_{S=0} = Q \Big|_{S=0} = \\ &H_0 \sin \theta \Big|_{S=0} - V_0 \cos \theta \Big|_{S=0} \end{aligned}$$

$EI$  是管截面的弯曲刚度,  $Q$  是剪力。引入无量纲量,  $s = S/L$ ,  $\varepsilon = \frac{EI}{H_0 L^2}$ ,  $a = \tan \theta|_{s=0}$ ,  $b = -\frac{(d^2\theta/ds^2)|_{s=0}}{\cos \theta|_{s=0}}$ ,  $\omega = \frac{wL}{H_0}$ , 式(1)可以变为

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{ds^2} + (\omega s + a + \varepsilon b) \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad (2)$$

方程(2)就是用无量纲量表示的管道控制方程, 对于通常的铺管问题, 由于  $H_0$  和  $L$  较大, 因此  $\varepsilon$  是一个小参数。

### 1.2 边界条件

当铺管船采用圆弧形刚性托管架时, 管道两端的

本文于 2001-03-13 收到。

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} s=0 \text{ 时, } d\theta/ds &= 0 \\ s=1 \text{ 时, } d\theta/ds &= L/R = \bar{r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $L$  是悬空段的管线长度,  $R$ 、 $\bar{r}$  分别是圆弧形刚性托管架的半径和无量纲曲率。对应于每一个  $\varepsilon$  值, 式 (3) 这两个边界条件就是方程 (2) 的定解条件。

由于管线长度是待定的, 所以需要迭代求解。先给出  $H_0$ 、 $L$  的初值, 以定出  $\varepsilon$ ; 然后求解方程 (2), 得到  $\theta$  沿管线的分布 (即求出挠曲线); 继而再利用得到的管线挠曲线计算  $H_0$ 、 $L$  的值; 当前后两次求得的  $H_0$ 、 $L$  值满足收敛要求时, 就得到所求的真实解。下面给出已知挠曲线后计算  $H_0$ 、 $L$  的公式。

分析图 1 所示的几何关系和圆弧形托管架附近管段的受力情况, 可得到管线的悬空长度及水平分力为

$$L = \frac{d - h_u + R(\cos \theta_L - \cos \beta_u)}{\int_0^1 \sin \theta ds} \quad (4)$$

$$H_0 = \frac{T_u - wh_L - ph_L - wL \sin \theta_L}{\cos \theta_L [(a + \varepsilon b) \tan \theta_L + 1]}$$

其中  $T$  为轴向力。式 (4) 就是已知挠曲线后 (即已知  $\theta$ ) 求解  $H_0$ 、 $L$  的关系式。

### 1.3 求解方法

控制方程 (2) 是一个非线性微分方程, 且边界可动, 因此其求解比较困难。曾经尝试了有限差分法、最小二乘加权残值法、伽辽金法、幂级数展开法等多种方法, 但效果均不理想。采用摄动法求解则得到了比较好的结果, 由于方程 (2) 中的小参数在最高阶导数的系数上, 以下采用奇异摄动法中的匹配展开法<sup>[2]</sup>求解。匹配展开法的解由外场解、内场解和修正项组成。内场解在边界层内有效 (铺管问题中有两个边界层, 一个在托管架的分离点附近, 另一个在管线的海底离地点附近), 外场解在除此之外的其他区域内有效。

#### 1.3.1 外场解

将  $\theta$  展开为小参数  $\varepsilon$  的幂级数

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \theta_n(s) \quad (5)$$

于是有:  $b = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \frac{\ddot{\theta}_n(0)}{\cos \alpha_0} = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} b_n$ , 其

中,  $\ddot{\theta}_n(0) = \left. \frac{d^2 \theta_n(s)}{ds^2} \right|_{s=0}$ 。

将式 (5) 代入控制方程 (2) 中, 令方程两边的同阶幂的系数分别相等, 就可以得到外场解

$$\theta^o = \arctan(\omega s + a) + \varepsilon \left[ \frac{b_0}{1 + (\omega s + a)^2} - \frac{2\omega^2(\omega s + a)}{[1 + (\omega s + a)^2]^{5/2}} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

#### 1.3.2 $s=1$ 附近的内场解

引入坐标变换  $\eta = \frac{1-s}{\sqrt{\varepsilon}}$ , 将边界层内的坐标放大, 控制方程 (2) 变为

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + [\omega(1 - \sqrt{\varepsilon}\eta) + a + \varepsilon b] \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad (7)$$

将  $\theta$  展开为小参数  $\varepsilon$  的幂级数

$$\theta = \arctan(\omega + a) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \psi_n(\eta) \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (7), 令方程两边的同解幂的系数分别相等, 并考虑内外场解的匹配条件, 可得到  $s=1$  附近的内场解

$$\theta_0^i = \arctan(\omega + a) - \sqrt{\varepsilon} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \rho_0 + \frac{\omega}{\alpha^4} \right) e^{-\alpha\eta} + \frac{\eta\omega}{\alpha^4} \right] - \varepsilon \left[ \frac{\omega(\omega + a)}{4\alpha^4} \left( \rho_0 + \frac{\omega}{\alpha^4} \right) \left( \eta^2 + \frac{\eta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha\eta} + \frac{\omega^2(\omega + a)}{\alpha^8} \left( \eta^2 + \frac{2}{\alpha^2} \right) - \frac{b_0}{\alpha^4} \right] + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (9)$$

其中,  $\alpha = [1 + (\omega + a)^2]^{1/4}$ 。

#### 1.3.3 $s=0$ 附近的内场解

引入坐标变换  $\zeta = \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}$ , 将边界层内的坐标放大, 控制方程 (2) 变为

$$\frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + [\omega\zeta\sqrt{\varepsilon} + a + \varepsilon b] \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad (10)$$

将  $\theta$  展开为小参数  $\varepsilon$  的幂级数

$$\theta = \alpha_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \phi_n(\zeta) \quad (11)$$

采用与上面相同的方法, 可得到  $s=0$  附近的内场解

$$\theta_0^i = \alpha_0 + \sqrt{\varepsilon} \left[ \frac{\omega}{\beta^5} (e^{-\beta\zeta} + \beta\zeta) \right] - \varepsilon \left[ \frac{a\omega^2}{4\beta^8} \left( \zeta^2 + \frac{\zeta}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) e^{-\beta\zeta} + \frac{\alpha\omega^2}{\beta^8} \left( \zeta^2 + \frac{2}{\beta^2} \right) - \frac{b_0}{\beta^4} \right] + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (12)$$

其中,  $\beta = (1 + a^2)^{1/4}$ 。

1.3.4 合成解

根据内外场解可以得到在整个域内均有效的合成解  $\theta^c$

$$\theta^c = \theta^o + \theta_1^i + \theta_0^i - (\theta^o)_1^i - (\theta^o)_0^i$$

其中  $(\theta^o)_1^i$  和  $(\theta^o)_0^i$  分别表示外部解在  $s = 1$  和  $s = 0$  附近用内部变量  $\eta$  和  $\zeta$  写出的展开式. 于是最终得到合成解为

$$\begin{aligned} \theta^c = & \arctan(\omega s + a) + \\ & \varepsilon \left[ \frac{b_0}{1 + (\omega s + a)^2} - \frac{2\omega^2(\omega s + a)}{[1 + (\omega s + a)^2]^{5/2}} \right] - \\ & \sqrt{\varepsilon} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \rho + \frac{\omega}{\alpha^4} \right) e^{-\alpha\eta} \right] - \\ & \varepsilon \left[ \frac{\omega(\omega + a)}{4\alpha^4} \left( \rho + \frac{\omega}{\alpha^4} \right) \left( \eta^2 + \frac{\eta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \cdot \\ & e^{-\alpha\eta} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{\beta^5} e^{-\beta\zeta} - \varepsilon \left[ \frac{\alpha\omega^2}{4\beta^8} \left( \zeta^2 + \frac{\zeta}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) \right] \cdot \\ & e^{-\beta\zeta} + O(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned} \quad (13)$$

2 算例

下面给出取自文献 [1] 中的一个算例 (单根管), 其基本参数如表 1 所示.

表 1 某海底管道的基本参数

管线直径 (m)	管线壁厚 (m)	防腐层厚度 (m)	防腐层密度 (kg/m <sup>3</sup> )
0.4064	0.0127	0.00238	1925.1
混凝土层厚度 (m)	混凝土层密度 (kg/m <sup>3</sup> )	托管架半径 (m)	水深 (m)
0.0508	3048.1	195.1	91.4

采用上述方法解此问题, 得到的挠曲线与弯矩曲线分别如图 3 和图 4 所示, 实线是本文解, 虚线是有

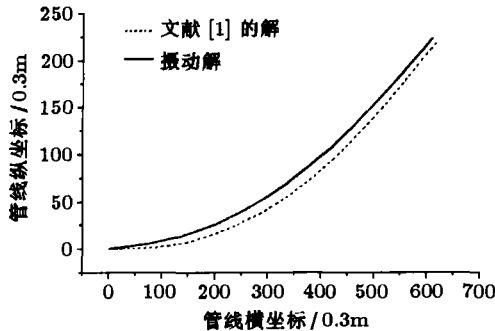


图 3 从海底离地点到圆弧形托管架上分离点那一段管线的挠度

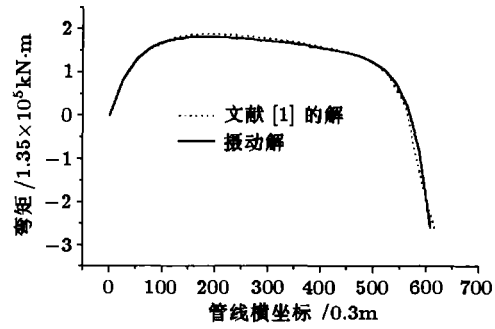


图 4 从海底离地点到圆弧形托管架上分离点那一段管线的弯矩

限元解, 从中可以看出二者吻合得比较好. 尤其是工程设计最关心的弯矩, 与有限元解几乎完全相同.

3 结论

本文采用非线性梁理论处理海底管道铺设问题, 用奇异摄动法来求解非线性方程, 单双层管该方法均可以计算, 与有限元解的比较表明了本文方法的正确性. 由于运算快速、使用简便, 因此便于工程部门进行方案设计时选用.

参 考 文 献

- 1 Malahy RC. Offpipe User's Guide Version 2.05, 1996
- 2 Nayfeh AH. Perturbation Methods. New York: John Wiley, 1973

MECHANICAL ANALYSIS OF PIPELAYING

ZENG Xiaohui LIU Chuntu XING Jingzhong  
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** Pipelaying is an important operation in offshore engineering. As its governing equation is nonlinear and the boundary is moveable, the analytical solution is difficult to get. In this paper, a singular perturbation method is used to solve this problem. The comparison with FEM shows a good agreement.

**Key words** pipelaying, geometric nonlinearity, singular perturbation method