

含旋转椭球形夹杂复合材料的 弹塑性本构关系*

夏 嵩 王自强

(中国科学院力学研究所, LNM, 北京, 100080)

摘 要 在胞模型的基础之上应用解析方法分析了颗粒或短纤维增强复合材料的本构行为, 结合数值计算给出了表征材料本构关系的解析表达式. 提出了一种新的正交椭球坐标变换以简化推导过程. 在计算中, 将真实位移场分为两部分: 基本场和扰动场, 然后通过摄动方法将原来的非线性问题转化为一组线性方程组的求解. 计算了当基体材料和夹杂的特征参数取不同值时的应力应变曲线, 并与已有的实验和分析结果进行了比较, 符合得较好. 通过对数值计算结果的拟合, 提出了一个颗粒或短纤维增强复合材料的弹塑性本构关系的解析表达式.

关键词 颗粒或短纤维增强复合材料, 弹塑性, 本构关系, 胞模型

1 引言

在铝、镁等金属中加入陶瓷等增强相所制成的复合材料与基体材料相比, 具有强度高、硬度大、耐磨性好等优点, 但其韧性却有所降低. 由于其性质优良, 这类复合材料在工业上有着十分广泛的应用, 例如汽车和航空器的制造等等, 所以对它们的本构关系和破坏机理等进行研究具有重要的现实意义.

人们已经对颗粒或短纤维增强复合材料的力学本构行为进行了大量的实验研究^[1~5]. 这些研究都集中在夹杂的形状、尺寸大小、分布方式和含量等微观结构因素对复合材料的影响上. 这些研究表明上述几个因素对复合材料的力学性能起很大的作用.

利用各种模型结合有限元计算进行的研究也很多^[4~9]. 例如 Christman 等人^[4,5]在胞模型的基础上采用有限元法研究了夹杂的分布和含量等微观结构因素对复合材料力学行为的影响; Llorca 和 Gonzales^[9]采用有限元法计算了含球形和圆柱形夹杂的复合材料在夹杂含量不同、已破坏夹杂含量也不同的多种情况下的力学特性. 关于用有限元法研究复合材料的力学行为的进展情况, 可以参考文献[10].

本研究的目的在于采用解析的方法来研究复合材料的弹塑性本构关系, 主要考虑了夹杂的含量、长径比以及基体性质对复合材料力学性质的影响. 首先, 如果夹杂的刚度高于基体刚度, 那么显然其含量越高则复合材料的刚度也越高; 其次, 夹杂附近的基体中会产生应力集中, 而且夹杂长径比越大则集中程度越高; 最后, 在复合材料中, 基体显然也会产生很大作用, 而它的性质则受到加工和制造工艺的显著影响, 例如热加工冷却后在基体中存在的残余应力等等. 这种影响通常需要通过系统的实验来进行研究, 单纯的连续介质力学的理论分

* 国家自然科学基金(19704100)和中国科学院自然科学基金(KJ51-1-20)资助.
2001-04-30 收到第 1 稿, 2002-02-30 收到修改稿.

析难以对其进行预测. 本文中通过对材料参数的适当选取, 部分地考虑了这种影响, 其具体方法将在节 4 中加以讨论.

当前在用解析方法讨论颗粒或短纤维增强复合材料的本构行为的工作中所采用的力学模型主要有两类. 第一类是在无限大基体中含有单个夹杂的模型. 例如 Lee 和 Mear^[11,12] 研究了无限大基体中含有单个旋转椭球形夹杂的情形, 由此得到含有稀疏夹杂的复合材料的本构行为, 并进一步采用微分自洽法来研究了夹杂含量较高的情形. 第二类就是体胞模型. Gurson^[13] 最初提出体胞模型时是用于研究材料中所含空洞的, 但后来这一模型也被应用于对颗粒或纤维增强复合材料的研究^[14~16]. 在 Kailasam 和 Ponte Castaneda^[14] 的工作中采用的是变分法, 研究的夹杂形状是一般椭球(三轴长度互不相等). 他们采用了一种“线性对比复合材料”来估算与之具有类似细观结构的非线性复合材料的性质. Zhu 和 Zbib^[15] 研究的是旋转椭球形的夹杂. 与本文相比, 他们所用的椭球坐标变换是非正交的, 而且在求解时处理的是非线性方程组, 因此计算工作量比较大. 由于计算工作量过大, 位移势函数的项数不可能取得太多, 所以上述研究的计算结果在某些情况下(例如夹杂含量较高时)与实验结果相比有明显偏差.

本文的工作同样建立在体胞模型的基础之上. 节 2 概述了所采用的力学模型和基本方法; 节 3 建立起了所采用的体胞模型; 节 4 将本文所得结果与其他人所得结果加以比较并进行了讨论; 节 5 得出了体胞的本构关系.

2 基本方法

本文中所采用的力学模型是: 在各向同性均匀基体里周期性分布有形状、尺寸和取向均一致的旋转椭球形夹杂颗粒. 这样我们就可以用一种体胞模型来描述材料的本构行为了, 如图 1 所示. 其中体胞和夹杂的形状均为旋转椭球, 而且两个椭球的旋转轴始终保持与 z 轴重合, 两个椭球的中心始终保持与坐标原点重合, 两个椭球还有公共的焦点. 两个椭球的体积比等于复合材料中夹杂的体积含量. 选择这样的体胞可以使我们方便地利用节 3.1 中的正交椭球坐标变换, 从而简化分析工作. 显然, 这样的体胞是横观各向同性的. 当单轴加载的加载方向和椭球旋转轴方向一致时, 这是一个轴对称问题.

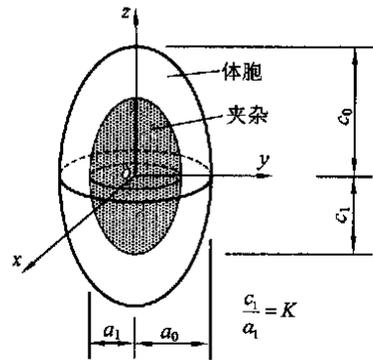


图 1 体胞模型

材料的总应变是由弹性应变和塑性应变两部分组成的, 即

$$E = E^e + E^p \tag{1}$$

其中 E 为宏观总应变, E^e 为宏观弹性应变, E^p 为宏观塑性应变.

宏观弹性应变可以由下式求出

$$E_{ij}^e = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{2}$$

其中 ϵ_{kl} 为宏观应力; C_{ijkl} 为体胞的等效弹性柔度张量, 已经由 Zhao 等^[17]、Zhan 和 Wang^[18] 分别用不同的方法得出, 其表达式见附录.

塑性应变可以用全量理论来描写

$$\frac{E_{ij}^p}{E_e^p} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{e} \quad (3)$$

其中 E_e^p 为宏观等效塑性应变, S_{ij} 为宏观偏应力, e 为宏观等效应力, 并有

$$E_e^p = B(\sigma_{ij}) \quad (4)$$

其中 B 是应力不变量的函数, 对于横观各向同性的体胞而言, 有 5 个应力不变量 (参照文 [19]), 即

$$E_e^p = B(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5) \quad (5)$$

其中

$$J_1 = \sigma_{kk} = \frac{kk}{3}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3} S_{ij} S_{ji}}, \quad J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki},$$

$$J_4 = \sigma_{33}, \quad J_5 = \frac{3k}{k^3}$$

通过下列讨论, 式 (5) 可以得到简化:

(1) 在夹杂椭球的长、短轴之比不太大时, 静水应力所产生应变与偏应力所产生的塑性应变相比很小, 可以忽略不计。

(2) 根据经典塑性理论, 不考虑第三应力不变量 J_3 的影响。

(3) 本文中只研究单轴拉伸的情况, 故而在图 1 所示坐标系下有

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = e, \quad J_5 = \frac{2}{e}$$

这样就有

$$E_e^p = B(e) \quad (6)$$

式 (6) 还可以改写为

$$e = A(E_e^p) \quad (7)$$

由式 (2)、(3) 可以看出, 只要加工硬化函数 $B(e)$ 确定下来, 复合材料的弹塑性行为也就完全确定下来了。因此, 本研究将集中精力寻找加工硬化函数 $B(e)$ (或函数 $A(E_e^p)$)。

为了用解析的方法求得加工硬化函数 $A(E_e^p)$, 讨论塑性变形远大于弹性变形的情况。此时夹杂和基体中的弹性应变均可忽略不计。因此, 夹杂可以被视为刚性体, 而基体则为纯塑性材料。需要强调的是, 仅仅是在推导加工硬化函数 $A(E_e^p)$ 的时候才忽略弹性变形, 夹杂的弹性变形已经在宏观弹性应变中加以考虑了, 因此最后所得的本构关系仍然是弹塑性本构关系。

基于以上考虑, 在本文中将采用这样的加载方式: 非零的远场应变分量为

$$E_{11} = E_{22} = -\frac{E_{33}}{2}$$

并且认为这些应变全部为塑性应变。此时显然有

$$E_e = E_e^p = E_{33} \quad (8)$$

Duva 和 Hutchinson^[20] 已经证明: 如果复合材料的组份材料的弹塑性本构关系可以用势函数 w 来表示, 那么复合材料的弹塑性本构关系也一定可以用宏观势函数 W 来表示

$$W = \frac{1}{V} \int_k v_k w_k dV \quad (9)$$

其中 V 为复合材料的总体积, w_k 为第 k 种组份材料的微观势函数, V_k 为第 k 种组份材料所占有的体积.

如果宏观势函数 W 已知, 则 ϵ_e 和 E_e 之间的关系为

$$\epsilon_e = \frac{\partial W}{\partial E_e} \tag{10}$$

采用能量法求解, 即先假定位移场 $u_i(\epsilon_i)$, 其中 ϵ_i 为待定系数, 以此求出宏观势函数 W , 再使 W 取极小值, 即令

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = 0 \tag{11}$$

从而得到关于 ϵ_i 的一组方程, 从中解出 ϵ_i , 代入式(10), 即可求出函数 $A(E_e)$.

3 体胞模型

3.1 坐标变换

对图 1 所示的体胞模型, 采用如下坐标变换是方便的

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & (0 \leq \theta < \pi) \\ y = r \sin \theta \sin \phi & (0 \leq \phi < 2\pi) \\ z = r \cos \theta & (0 \leq r < \sqrt{a^2 + k}) \end{cases}, \text{ 其中 } k = \begin{cases} 1 & (c > a), \text{ 长旋转椭球} \\ 0 & (c = a), \text{ 球} \\ -1 & (c < a), \text{ 扁旋转椭球} \end{cases} \tag{12}$$

曲面“ $r = \text{常数}$ ”表示的是直角坐标系 (x, y, z) 里的旋转椭球面, 椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{13}$$

设椭球沿 x, y, z 轴的半轴长分别为 a, b, c , 在夹杂表面上, $a = a_1, b = b_1, c = c_1, \epsilon = \epsilon_1$, 在体胞外表面上, $a = a_0, b = b_0, c = c_0, \epsilon = \epsilon_0$, 则有

$$a = b = r_1 \sin \theta_1, \quad c = r_1 \cos \theta_1 \tag{14}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{k}(c^2 - a^2)} = \sqrt{|c_0^2 - a_0^2|} = \sqrt{|c_1^2 - a_1^2|}, & k = \pm 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases} \tag{15}$$

可见当坐标系是旋转椭球坐标系时, r_1 表示椭球焦距的一半.

在夹杂表面上, 有

$$\epsilon_1 = \frac{a_1}{r_1} = \frac{a_1}{\sqrt{|c_1^2 - a_1^2|}} \tag{16}$$

在体胞外表面上, 有

$$\epsilon_0 = \frac{a_0}{r_0} = \frac{a_0}{\sqrt{|c_0^2 - a_0^2|}} = \frac{a_0}{\sqrt{|c_1^2 - a_1^2|}} \tag{17}$$

(r, θ, ϕ) 坐标系的度量张量为

$$\begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} = r^2 \begin{bmatrix} \frac{1 + k \sin^2 \theta}{1 + k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + k \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \tag{18}$$

可见(, ,)坐标系是正交坐标系. 为了应用方便, 设

$$h = \sqrt{g}, \quad h = \sqrt{g}, \quad h = \sqrt{g} \tag{19}$$

3.2 控制方程

设想基体的塑性变形遵循幂硬化规律, 即满足单轴拉伸公式

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^n \tag{20}$$

其中 σ_0 是参考应力, ϵ_0 是参考应变, n 是幂硬化指数. 对于多轴应力状态的情况, 有

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left(\frac{-e}{\epsilon_0} \right)^{n-1} e_{ij} \tag{21}$$

在本文中所采用的轴对称加载方式下, 基体内各位移分量均只与 r, z 相关, 且 $u_\theta = 0$. 在(, ,)坐标系下的基体微观应变为^[21]

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{1}{h} \left\{ u_{,r} + \frac{h}{h} u_{,r} \right\} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{h} \left\{ u_{,z} + \frac{h}{h} u_{,z} \right\} \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{h}{h} u_{,z} + \frac{h}{h} u_{,r} \right\} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{,r}}{h} + \frac{u_{,z}}{h} - \frac{h}{h} \frac{u_{,r} + h_{,r} u_{,z}}{h} \right\} \end{aligned} \right. \tag{22}$$

由式(21)、(22)可知, 基体内的微观势函数为

$$w = \frac{1}{n+1} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left(\frac{-e}{\epsilon_0} \right)^{n+1} \tag{23}$$

在上文所述加载条件下, 基体位移应满足边界条件

$$\left\{ \begin{aligned} u_i &= E_{ij} x_j, && \text{在 } S_0 \text{ 上} \\ u_i &= 0, && \text{在 } S_1 \text{ 上} \end{aligned} \right. \tag{24}$$

其中 S_0, S_1 分别是体胞和夹杂的外边界.

依照经典塑性理论, 基体材料在发生塑性变形时体积不可压缩, 因此由式(22)可得

$$\epsilon_{rr} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta} = \frac{(h_{,r} h_{,r} u_{,z})}{h h h} + \frac{(h_{,z} h_{,z} u_{,r})}{h h h} = 0 \tag{25}$$

参照 Budiansky 等人^[22]的方法, 引入势函数 ϕ , 位移可表示为

$$u_r = \frac{1}{h} \phi, \quad u_z = -\frac{1}{h} \phi \tag{26}$$

其中 ϕ 是 r, z 的函数. 这样式(25)自动得到满足.

进一步假设基体内实际位移可以分为两项, 即

$$u = u^{(0)} + \tilde{u} \tag{27}$$

其中 $u^{(0)}$ 是位移场的一级近似, 而且 $u^{(0)}$ 和 \tilde{u} 满足边界条件

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^{(0)} &= E_{ij} x_j, && \tilde{u}_i = 0, && \text{在 } S_0 \text{ 上} \\ u_i^{(0)} &= 0, && \tilde{u}_i = 0, && \text{在 } S_1 \text{ 上} \end{aligned} \right. \tag{28}$$

相应地有

$$= u^{(0)} + \tilde{u} \tag{29}$$

这样一来,如果适当选取 $u^{(0)}$ 的形式,使 $u^{(0)}$ 能够刻画位移场的基本特征, \tilde{u} 相对 $u^{(0)}$ 成为小量,即可用摄动法求解.

鉴于本文中研究的是单轴拉伸的情况,将 $u^{(0)}$ 所应满足的边界条件变换到 (x, y, z) 坐标系下可得

$$\begin{cases} u^{(0)}|_{z=0} = \frac{2 E_c \sigma_0}{2 h} (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ u^{(0)}|_{z=0} = - \frac{2 E_c \cos \alpha \sin \alpha}{2 h} (3 \sigma_0^2 + 2 k) \\ u^{(0)}|_{z=1} = u^{(0)}|_{z=-1} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

要满足这样的边界条件,只需取

$$u^{(0)} = \frac{3 E_c \sigma_0}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \cos^2 \alpha \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{h} \right)^2 &= \sum_{i=0}^3 \sqrt{2+k} \, i \, z^i, \\ \sigma_0 &= \frac{2 \sigma_0^2 (\sigma_0 + \sigma_1)}{2 (\sigma_0 - \sigma_1)^3}, & \sigma_1 &= - \frac{\sigma_0 (\sigma_0 + \sigma_1 + \frac{2}{3})}{(\sigma_0 - \sigma_1)^3}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_0 (\sigma_0 + \sigma_1 + 4 \frac{2}{3})}{2 (\sigma_0 - \sigma_1)^3}, & \sigma_3 &= - \frac{\sigma_0 \sigma_1}{(\sigma_0 - \sigma_1)^3} \end{aligned}$$

要满足 \tilde{u} 的边界条件,并考虑到对称性的要求,只需取

$$\tilde{u} = E_c (\sigma_0 - \sigma_1)^2 (\sigma_0 - \sigma_1)^2 \sum_{i=0}^+ \sum_{j=1}^+ i [\sigma_{i,2j-1} \cos(2j - 1) \alpha + \sigma_{i,2j} \sin(2j) \alpha] \tag{32}$$

其中 σ_{ij} 为待定系数.

由式 (22)、(26)、(29)、(31) 和 (32) 就可以求出基体中的各个应变分量.

将式 (23) 代入式 (9) 得

$$W = \frac{0}{(n+1) \sigma_0 V} \frac{n}{V_m} e^{n+1} dV \tag{33}$$

其中 V_m 表示基体体积. 这样式 (11) 就等价于

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \frac{n}{V_m} e^{n+1} dV = 0 \tag{34}$$

这是一个非线性问题,如前所述,可以用摄动法求解.

基体应变也可以分为两部分,分别对应于 $u^{(0)}$ 和 \tilde{u} ,即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \tilde{\sigma}_{ij} \tag{35}$$

于是

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij}^{(0)2} + 2 \sigma_{ij}^{(0)} \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^2 \tag{36}$$

则

$$e^{n+1} = e^{(0)n+1} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{\sigma_{ij}^{(0)} \tilde{\sigma}_{ij}}{e^{(0)2}} + \frac{2}{3} \frac{\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}}{e^{(0)2}} \right]^{(n+1)/2} \tag{37}$$

将式 (37) 二项式展开,保留二项式,得



$$\epsilon_e^{n+1} = \epsilon_e^{(0) n+1} \left[1 + \frac{2(n+1)}{3} \frac{\epsilon_e^{(0) \sim ij}}{\epsilon_e^{(0) 2}} + \frac{n+1}{3} \frac{\epsilon_e^{\sim \sim ij}}{\epsilon_e^{(0) 2}} + \frac{n^2 - 1}{8} \left(\frac{4}{3} \frac{\epsilon_e^{(0) \sim ij}}{\epsilon_e^{(0) 2}} \right)^2 \right] \quad (38)$$

将式(38)代入式(34),就得到关于 ϵ_e 的线性方程组,由此可以求出待定系数 ϵ_e 。
由式(31)、(32)可以看出

$$W = \frac{E_e}{\epsilon_e^{n+1}} F(n, f, K) \quad (39)$$

其中 f 为夹杂所占的体积含量, K 为夹杂椭球的长、短轴长度之比, F 为 n, f, K 的多变量函数. 从而由式(10)得

$$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^0} = F(n, f, K) \left[\frac{E_e}{\epsilon_e^0} \right]^n \quad (40)$$

因此由式(6)、(7)得

$$B(\epsilon_e) = \epsilon_e^0 \left[\frac{\epsilon_e}{F(n, f, K)} \right]^{1/n} \quad (41)$$

$$A(E_e^p) = \epsilon_e^0 F(n, f, K) \left[\frac{E_e}{\epsilon_e^0} \right]^n \quad (42)$$

可见所要做的就是求得函数 $F(n, f, K)$ 的表达式. 做法是先给定一系列的 n, f, K 的值, 通过数值方法求出相应的函数 $F(n, f, K)$ 的值, 再拟合出函数 $F(n, f, K)$ 的表达式.

4 计算结果与讨论

4.1 与已有计算结果的比较

计算中系数 ϵ_e 的个数的选取应在满足精度要求的同时避免过于庞大的计算量. 为此, 经过试算, 取 $i = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$, 这将使计算结果至少具有四位有效数字.

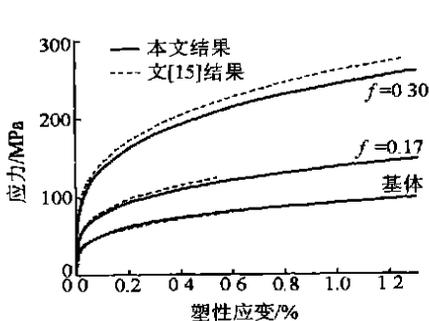


图 2 本文计算结果与文[15]计算结果的比较, $n = 0.25, K = 2, \sigma_0 = 293 \text{ MPa}$

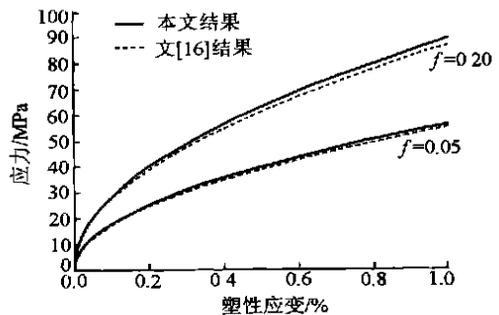


图 3 本文计算结果与文[16]计算结果的比较, $n = 0.5, K = 1, \sigma_0 = 500 \text{ MPa}$

首先将本文的计算结果与文[15]的计算结果进行了比较,如图 2 所示. 此处只计算塑性应变. 计算中所针对的复合材料的增强相长径比 K 取为 2. Zhu 和 Zbib^[15] 在计算中所采用的

基体材料参数为 $\sigma_0 = 293 \text{ MPa}$, $n = 0.25$, 所采用的基体材料的单轴拉伸公式为 $\sigma = \sigma_0 \epsilon^n$. 由图 2 可以看出, 在 $f = 0.30$ 的情况下, 本文计算结果仅略低于文[15]的计算结果, 两者相差最多处大约为 6%.

再将本文的计算结果与文[16]的计算结果进行比较, 如图 3 所示. 此处同样只计算塑性应变. 计算中所采用的基体材料参数为 $\sigma_0 = 500 \text{ MPa}$, $n = 0.5$, 所采用的基体材料的单轴拉伸公式仍为 $\sigma = \sigma_0 \epsilon^n$. 由图 3 可以看出, 本文计算结果与 Ji 和 Wang^[16] 的结果十分接近, 最大相对误差约 3%.

图 4 显示了本文计算结果与文[9]的有限元计算结果的比较. 仍只计算塑性应变. 计算中所采用的复合材料的增强相为球形, 因此 $K = 1$. 文[9]给出了由有限元计算结果拟合出的 $\sigma_0 = 600 \text{ MPa}$ 的材料分别在四种夹杂含量 ($f = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$) 下的复合材料单轴拉伸公式. 选取 $n = 0.10, f = 0.15$ 和 0.20 的两种情况进行比较, 由图 4 可见, 本文结果只比有限元计算结果略微偏高.

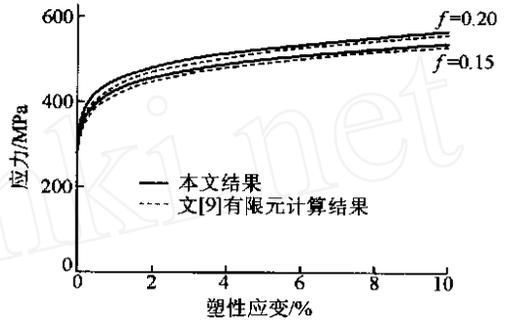


图 4 本文计算结果与文[9]有限元计算结果的比较, $n = 0.10, \sigma_0 = 600 \text{ MPa}, K = 1$

4.2 与已有实验结果的比较

再用文[3]的实验结果与本文的计算进行比较, 如图 5 所示. 此处计入了弹性应变的影响. Yang 等人^[3] 在试验中所采用的复合材料的增强相长径比约为 2. 在这里, 基体材料的参数的选取是应该加以注意的. 经过制造复合材料的各种工艺过程之后, 复合材料中的基体材料的性质和原始纯基体材料的性质已经有所不同了, 因此假想可以从复合材料中将基体材料“分离”出来, 由前面的分析可知其 n 值与复合材料的 n 值是相同的, 因此可以由复合材料的单轴拉伸曲线上得出. 根据 Evens 等人^[2] 和 Nieh 和 Chellman^[23] 的研究, 复合材料中基体材料的流动应力与原始纯基体材料相比有明显的提高, Nieh 和 Chellman^[23] 的研究还表明复合材料中基体材料的线性极限与原始纯基体材料相比的变化却很小, 所以应该将参考应力取为原始纯基体材料的线性极限, 在这里取 $\sigma_0 = 24.5 \text{ MPa}$. 由图 5 可以看出, 本文计算结果与实验结果符合良好.

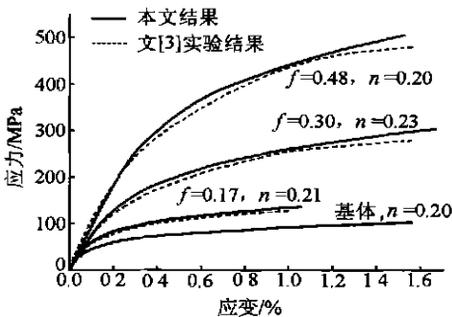


图 5 本文计算结果与文[3]实验结果的比较, $K = 2, \sigma_0 = 24.5 \text{ MPa}$

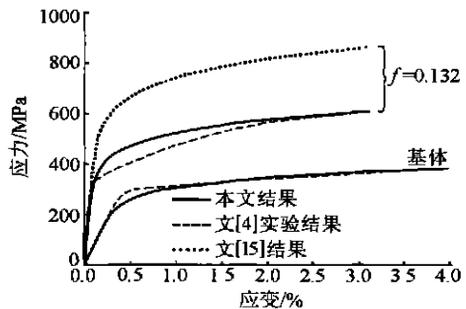


图 6 本文计算结果与文[4]、[15]结果的比较, $n = 0.12, K = 5, \sigma_0 = 280 \text{ MPa}$

最后,将本文计算结果和文[4]的实验结果进行比较,如图 6 所示.此处也计入了弹性变形的影响.计算中所针对的复合材料的基体材料为 2124 Al,材料参数为 $\sigma_0 = 280 \text{ MPa}$, $n = 0.12$;增强相为 SiC 颗粒,长径比大约为 5,含量为 13.2%. Christman 等人^[4]在工作中已经注意到了工艺过程对基体材料的影响,因此他们用来作为对照的纯基体材料是经历了与复合材料的制造过程相同的工艺的材料,所以在计算中所采用的基体材料参数可以直接从纯基体材料的单轴拉伸曲线得到.由图 6 可以看出,文[15]的计算结果明显高于文[4]的实验结果,而本文计算结果在应变很小和较大时都与文[4]的实验结果较为吻合,但在这之间却有一段偏高.这是因为本文的加工硬化函数是在塑性应变远大于弹性应变的条件下获得的.在应变较大的情况下,塑性应变一般要比弹性变形大一到两个数量级,所以本文计算结果与实验符合良好.在应变很小的情况下,弹性变形占主要地位,所以在计入弹性应变后本文计算结果与实验也是符合的.但在弹性应变和塑性应变处于同一个数量级的情况下,就会产生图 6 所示的偏差.

5 弹塑性本构关系

通过上面的比较,可以确定本文中所采用方法是可信的.同时,与实验工作的比较也说明了前述选取材料参数的方法的合理性.下面来寻求函数 F 的表达式.由于式(34)中的积分无法用解析的方法求出,故用数值法求解.

分别取 $n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$, $f = 0.05, 0.10, 0.15, \dots, 0.50$, $K = 1, 2, 3, 4, 5$, 计算了函数 $F(n, f, K)$ 的值.这一取值范围是根据上文与实验结果的对比确定的.依据上述数值计算结果,拟合出如下公式

$$F(n, f, K) = \exp(\alpha_1 f + \alpha_2 f^2) \quad (43)$$

其中

$$\alpha_1 = (-0.7066 + 0.7973 K) + (1.891 + 1.889 K - 0.05591 K^2) n \quad (44)$$

$$\alpha_2 = (4.885 - 1.185 K + 0.06218 K^2) + (1.230 + 0.6205 K - 0.3122 K^2) n + (1.627 - 1.619 K + 0.2389 K^2) n^2 \quad (45)$$

这个公式在夹杂含量为零时使函数 $F(n, f, K)$ 的值为 1,取值范围为 $0 < f < 0.5, 1 < K < 5$.图 7 所示为按公式(43)计算的结果与前述数值计算结果比较,可见两者符合得很好.

综合公式(2)、(3)、(7)及(40)~(45)就完全确定了体胞在单轴拉伸情况下的弹塑性本构关系.

6 结论

在体胞模型的基础之上运用解析的办法给出了推导颗粒或短纤维增强复合材料的本构

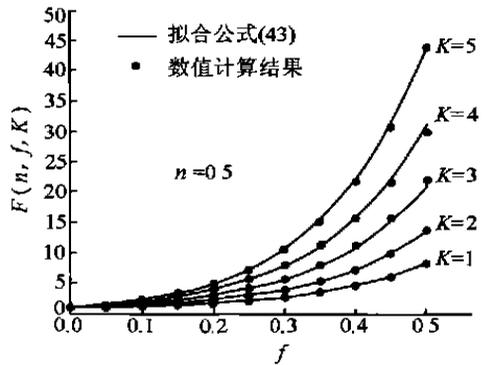


图 7 拟合公式(43)与数值计算结果的比较, $n=0.5$

关系的方法,即:先假设出位移场的形式,认为它分为两部分,其中一部分与真实位移场比较接近,从而成为位移场的一级近似,而另一部分则成为相对于前者的小量,然后就可以用摄动法将非线性问题转化为线性问题求解.遵循这一方法,进行了数值计算,并由此拟合出了一个解析表达式.经过与文[3]、[4]、[9]、[15]、[16]中的实验和数值计算结果的比较,发现本文所得结果和它们符合良好.

为了简化计算和推导的过程,引入了一种新的正交椭球坐标变换.计算时主要的工作量在于式(33)中的数值积分上面,但是所采用方法仍然比有限元计算更加方便有效.

由于工艺过程的影响,复合材料中基体材料的某些参数,如幂硬化指数和流动应力,与原始纯基体材料相比已经有所不同,这些参数应该通过实验的方法来加以确定,在计算中选取材料参数时应该将这一因素考虑进去.

参 考 文 献

- 1 Papazian J M, Adler P N. Tensile properties of short fiber-reinforced SiC/Al composites: Part . Effects of Matrix Precipitates. *Metallurgical Transactions A*, 1990, 21A:401 ~ 410
- 2 Evans A G, Hutchinson J W, McMeeking R M. Stress-strain behavior of metal matrix composites with discontinuous reinforcements. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1991, 25:3 ~ 8
- 3 Yang J, Pickard S M, Cady C, Evans A G, Mehrabian R. The stress/strain behavior of aluminum matrix composites with discontinuous reinforcements. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1991, 39(8):1863 ~ 1869
- 4 Christman T, Needleman A, Suresh S. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metallurgica*, 1989, 37(11):3029 ~ 3050
- 5 Christman T, Needleman A, Suresh S. On microstructural evolution and micromechanical modelling of deformation of a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Materials Science and Engineering*, 1989, A107:49 ~ 61
- 6 Tvergaard V. Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Acta Metallurgica et Materialis*, 1990, 38(2):185 ~ 194
- 7 Levy A, Papazian J M. Tensile properties of short fiber-reinforced SiC/Al composites: Part . Finite Element Analysis. *Metallurgical Transactions A*, 1990, 21A:411 ~ 420
- 8 Bao G, Hutchinson J W, McMeeking R M. Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1991, 39(8):1871 ~ 1882
- 9 Llorca J, Gonzalez C. Microstructural factors controlling the strength and ductility of particle-reinforced metal-matrix composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(1):1 ~ 28
- 10 方岱宁,周储伟.有限元计算细观力学对复合材料力学行为的数值分析. *力学进展*, 1998, 28(2):173 ~ 188
- 11 Lee B J, Mear M E. Effect of inclusion shape on the stiffness of nonlinear two-phase composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1991, 39(5):627 ~ 649
- 12 Lee B J, Mear M E. Effective properties of power-law solids containing elliptical inhomogeneities: Part . Rigid Inclusions. *Mechanics of Materials*, 1992, 13(4):313 ~ 335
- 13 Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part —Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Transactions of the ASME: Journal of Engineering Materials and Technology*, 1977, 99:2 ~ 15
- 14 Kailasam M, Ponte Castaneda P. A general constitutive theory for linear and nonlinear media with microstructure evolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(3):427 ~ 465

- 15 Zhu H T, Zbib H M. A macroscopic model for plastic flow in metal-matrix composites. *International Journal of Plasticity*, 1995, 11(4):471 ~ 499
- 16 Ji B H, Wang T C. Elastic-plastic constitutive relation of particle reinforced composite. *Acta Mechanica Sinica (English Series)*, 1999, 15(4):344 ~ 354
- 17 Zhao Y H, Tandon G P, Weng G J. Elastic moduli for a class of porous materials. *Acta Mechanica*, 1989, 76(1 ~ 2):105 ~ 130
- 18 Zhan S G, Wang T C. Effective elastic moduli of inhomogeneous solids by embedded cell model. *Acta Mechanica Sinica (English Series)*, 1999, 15(4):334 ~ 343
- 19 Boehler J P. A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM*, 1979, 59:157 ~ 167
- 20 Duva J M, Hutchinson J W. Constitutive potentials for dilutely voided nonlinear materials. *Mechanics of Materials*, 1984, 3(1):41 ~ 54
- 21 Love A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover Publication, New York, 1944, 54
- 22 Budiansky B, Hutchinson J W, Slutsky S, in Hopkins H G, Sewell M J eds. *Mechanics of Solids*, Pergamon Press, New York, 1982, 13 ~ 45
- 23 Nieh T G, Chellman D J. Modulus measurements in discontinuous reinforced Aluminum Composites. *Scripta Metallurgica*, 1984, 18:925 ~ 928

ELASTIC-PLASTIC CONSTITUTIVE RELATION OF A COMPOSITE CONTAINING REVOLUTIONARY ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

Xia Song Wang Ziqiang

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

Abstract The constitutive potential of particle reinforced composites (PRC) is analyzed on the basis of the cell model. A novel orthogonal ellipsoidal coordinate transformation is proposed to simplify the derivation. The displacement field is divided into two parts: the basic field and the turbulent field. Then the nonlinear problem is transformed into a set of linear algebraical equations. The stress-strain curves of PRC for different characteristic parameters of the matrix and reinforcements are calculated. The present results are well consistent with the existing experiments and the calculated results by other authors. An analytical formula for the macro elastic-plastic constitutive relation of PRC is obtained after fitting the numerical results.

Key words particle or short fiber reinforced composites, elastic-plasticity, constitutive relation, cell model

附 录

体胞的等效弹性柔度张量为

$$L = L_0 \{ I + fA [I - fS(V) A]^{-1} \}$$

其中 L_0 是基体的弹性柔度张量, I 为四阶单位张量, f 为夹杂的体积含量, $S(V)$ 为体胞的四阶 Eshelby 张量.

张量 A 的表达式为

$$A = [L_0 + (L_1 - L_0) S(\)]^{-1} (L_1 - L_0)$$

其中 L_1 是夹杂的弹性柔度张量, $S(\)$ 为夹杂的四阶 Eshelby 张量.

椭球的 Eshelby 张量表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} S_{3333} &= \frac{1}{2(1 - \nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3K^2 - 1}{K^2 - 1} - \left(1 - 2\nu_0 + \frac{3K^2}{K^2 - 1} \right) g \right] \\ S_{1111} &= S_{2222} = \frac{1}{8(1 - \nu_0)} \frac{K^2}{K^2 - 1} + \frac{1}{4(1 - \nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{9}{4(K^2 - 1)} \right] g \\ S_{1122} &= S_{2211} = \frac{1}{4(1 - \nu_0)} \left\{ \frac{K^2}{2(K^2 - 1)} - \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3}{4(K^2 - 1)} \right] g \right\} \\ S_{1133} &= S_{2233} = -\frac{1}{2(1 - \nu_0)} \frac{K^2}{K^2 - 1} + \frac{1}{4(1 - \nu_0)} \left[\frac{3K^2}{K^2 - 1} - (1 - 2\nu_0) \right] g \\ S_{3311} &= S_{3322} = -\frac{1}{2(1 - \nu_0)} \left(1 - 2\nu_0 + \frac{1}{K^2 - 1} \right) + \frac{1}{2(1 - \nu_0)} \left(1 - 2\nu_0 + \frac{3}{K^2 - 1} \right) g \\ S_{1212} &= \frac{1}{4(1 - \nu_0)} \left\{ \frac{K^2}{2(K^2 - 1)} + \left[1 - 2\nu_0 - \frac{3}{4(K^2 - 1)} \right] g \right\} \\ S_{3131} &= S_{3232} = \frac{1}{4(1 - \nu_0)} \left\{ 1 - 2\nu_0 - \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} - \frac{1}{2} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{3(K^2 + 1)}{K^2 - 1} \right] \right\} \end{aligned} \right. g$$

其中 ν_0 为基体材料的泊松比, K 为椭球长、短轴长度之比, g 由下式给出

$$g = \begin{cases} \frac{K}{(K^2 - 1)^{3/2}} [K \sqrt{K^2 - 1} - \text{ch}^{-1} K], & K > 1 \\ \frac{K}{(1 - K^2)^{3/2}} [\cos^{-1} K - K \sqrt{1 - K^2}], & K < 1 \end{cases}$$

球形的 Eshelby 张量表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} S_{1111} &= S_{2222} = S_{3333} = \frac{7 - 5\nu_0}{15(1 - \nu_0)} \\ S_{1122} &= S_{2233} = S_{3311} = \frac{5\nu_0 - 1}{15(1 - \nu_0)} \\ S_{1212} &= S_{2323} = S_{3131} = \frac{4 - 5\nu_0}{15(1 - \nu_0)} \end{aligned} \right.$$