

[文章编号] 1001-246X(2007)04-0395-07

# 基于 CE/SE 方法的二维 Euler 型多物质 流体弹塑性问题计算

王景焘<sup>1</sup>, 张德良<sup>2</sup>, 刘凯欣<sup>1</sup>

(1. 北京大学力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

[摘 要] 将 CE/SE 方法推广到二维固体流体弹塑性问题的数值计算, 同时结合杂交粒子水平集方法追踪物质界面和合适的边界条件, 提出一套完整的二维 Euler 型流体弹塑性计算方案. 通过长钨杆侵彻装甲钢实验的数值模拟, 对方法的精度和有效性进行验证.

[关键词] CE/SE 方法; 流体弹塑性模型; 水平集方法; 多物质流动

[中图分类号] O241.82; O347.5

[文献标识码] A

## 0 引言

在流体弹塑性问题的数值计算中, 主要采用一些比较传统的一阶精度差分格式. 这些格式主要使用 von Neumann 提出的人工粘性方法处理强间断, 界面处理也采用传统的示踪点等界面追踪方案. 近年来已经有人将高精度的计算流体方法推广到流体弹塑性问题中, 如 Miller<sup>[1]</sup> 采用高阶精度的 Godunov 方法, Howell<sup>[2]</sup> 的自由 Lagrange 格式, 网格间的对流采用高精度的 MUSCL 格式, 以及 Udaykumar<sup>[3]</sup> 采用 ENO 方法. 高精度计算方法的引入, 提高了计算精度和强间断分辨率, 是一个重要发展方向.

由 Chang<sup>[4]</sup> 提出的时-空守恒元解元方法 (The Space-Time Conservation Element and Solution Element method, CE/SE) 是近年来出现的一种双曲型偏微分方程的全新高精度计算格式. CE/SE 方法无论从概念上还是从格式的构造方法上都与传统的数值方法有很大不同, 它把时间和空间统一起来同等对待, 并利用守恒型积分方程通过解元和守恒元使局部和整体都严格满足守恒律. 其格式构造过程简单清晰, 物理意义明确, 可以满意地处理间断流场, 是一种性能优良的计算格式, 目前已推广到高阶精度<sup>[5]</sup>, 并成功应用于各种高维的流体问题和工程实践中<sup>[6]</sup>. 但是, 至今尚未见到其在流体弹塑性问题上的应用.

水平集方法<sup>[7]</sup> (Level Set Method) 是目前处理和追踪物质界面效果较好的一种方法, 它不需要显式构造出具体的波阵面, 因而可以处理波阵面的复杂结构变化. 近年来 Enright<sup>[8]</sup> 等人提出的杂交粒子水平集方法 (Hybrid Particle Level Set Method) 更是大幅度提高了精度.

本文目的是将 CE/SE 方法推广到二维平面应变和轴对称固体弹塑性流动问题中. 鉴于张德良<sup>[9]</sup> 提出的基于四边形网格守恒元和解元的划分方法比 Chang 原始的守恒元和解元划分更加直观、简洁, 而且易于向高维问题推广应用, 本文以该划分方法为基础, 同时结合杂交粒子水平集方法、合适的物质接触界面和自由界面边界条件, 提出一套用于求解二维 Euler 型流体弹塑性问题的 CE/SE 计算方法.

## 1 基本方程

介质的总应力是由静水压力和应力偏量组成, 它们之间的关系为

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p \delta_{ij}, \quad (1)$$

这里  $\sigma_{ij}$  是 Cauchy 应力张量,  $s_{ij}$  是应力偏量部分,  $p$  是静水压力,  $\delta_{ij}$  表示 Kronecker 符号. 流体弹塑性模型假设

[收稿日期] 2006-03-16; [修回日期] 2006-08-07

[基金项目] 国家自然科学基金 (批准号 10232040, 10572002) 资助项目

[作者简介] 王景焘 (1979-), 男, 山东青岛, 博士生, 从事计算流体力学方面的研究.

介质在高应变率条件下静水压力  $p$  仅反映体积变形的效应,可通过热力学状态方程计算,而应力偏量  $s_{ij}$  反映剪切变形的效应,采用弹塑性理论描述.

在不考虑外力和粘性、热传导和热扩散情况下,二维笛卡儿坐标系中 Euler 描述的质量守恒定律、动量守恒定律、能量守恒定律和应力偏量、等效弹塑性应变关系以及塑性功温度等方程组的守恒形式可以写作

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E(Q)}{\partial x} + \frac{\partial F(Q)}{\partial y} = S(Q), \tag{2}$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ E \\ s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{xy} \\ p \\ T \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} u \\ u^2 - s_{xx} \\ uv - s_{xy} \\ u(E - s_{xx}) - v s_{xy} \\ us_{xx} \\ us_{yy} \\ us_{zz} \\ us_{xy} \\ u^p \\ uT \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} v \\ uv - s_{xy} \\ v^2 - s_{yy} \\ v(E - s_{yy}) - u s_{xy} \\ vs_{xx} \\ vs_{yy} \\ vs_{zz} \\ vs_{xy} \\ v^p \\ vT \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} v \\ (uv - s_{xy}) \\ (v^2 - s_{yy} + s_{zz}) \\ [v(E - s_{yy}) - u s_{xy}] \\ S_{s_{xx}} \\ S_{s_{yy}} \\ S_{s_{zz}} \\ S_{s_{xy}} \\ S^p \\ S_T \end{bmatrix}, \tag{3}$$

这里  $s_{ij} = -i/x$ , 对于二维平面应变问题  $i=0$ , 轴对称模型  $i=1$  ( $y$  轴是对称轴).  $\rho, u, v$  分别是密度、 $x$  方向粒子速度、 $y$  方向粒子速度,  $E = I + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$  是单位体积总能量,  $I$  是单位体积内能,  $p$  是等效塑性应变,  $T$  是塑性功温度. 在 Euler 描述下, 弹性应力偏量方程的源项可以表示为

$$S_{s_{xx}} = s_{xx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 s_{xy} s_{xy} + 2 G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tag{4}$$

$$S_{s_{yy}} = s_{yy} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 s_{yx} s_{xy} + 2 G \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tag{5}$$

$$S_{s_{zz}} = s_{zz} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 i G \left( \frac{u}{x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tag{6}$$

$$S_{s_{xy}} = s_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + s_{xy} s_{yy} - s_{xy} s_{xx} + G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{7}$$

$$S^p = p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{D}_{ij}^p \dot{D}_{ij}^p, \tag{8}$$

$$S_T = T \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\dot{W}_p}{C}, \tag{9}$$

这里  $s_{xy} = -s_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right]$ , 体应变  $\epsilon = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{u}{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ ,  $\dot{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ , 不可逆塑性功率可近似写成  $\dot{W}_p = \rho s_{eff} \dot{\epsilon}^p$ ,  $\dot{\epsilon}^p$  为等效塑性应变率,  $\dot{\epsilon}^p$  是不可逆塑性功转化成热量的转换率, 一般取为 0.9<sup>[10]</sup>.

计算中采用 von Mises 屈服准则

$$s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 + 2s_{xy}^2 = \frac{2}{3} \sigma_y^2, \tag{10}$$

这里  $\sigma_y$  是材料当前屈服强度, 即当前的 von Mises 流动应力.

Johnson-Cook<sup>[11]</sup> 本构模型是建立在试验基础上的经验公式, 可简单地把应变、应变率和温升效应 3 部分连乘在一起,

$$\sigma_y = [A + B (\epsilon^p)^n] [1 + C \ln \dot{\epsilon}^*] [1 - T^{*m}], \tag{11}$$

其中  $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}^p / \dot{\epsilon}_0$  为相对等效塑性应变率,  $T^* = (T - T_0) / (T_m - T_0)$  为无量纲温度,  $T_m$  与  $T_0$  分别为介质熔点

和室温.

热力学状态方程反映了压力、密度及内能间的关系,本文采用的 Mie-Grüneisen 状态方程是广泛应用的高压固体状态方程,其具体形式为<sup>[12]</sup>

$$p = \begin{cases} \frac{c_0^2 \mu \left[ 1 + \left( 1 - \frac{a}{2} \right) \mu - \frac{a}{2} \mu^2 \right]}{\left[ 1 - (s_1 - 1) \mu - s_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - s_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} + (c_0 + a\mu) I, & \mu \geq 0, \\ c_0^2 \mu + (c_0 + a\mu) I, & \mu < 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $p$  为压力,  $\mu = \frac{v - v_0}{v_0} - 1$ ,  $a$  是 Grüneisen 系数  $c_0$  的一阶体积修正系数,  $c_0$  是声速, 常数  $s_1, s_2, s_3$  是粒子速度和激波速度关系式的拟合系数.

## 2 CE/SE 算法

对二维问题,将时间和空间区域统一划分成网格点集合,每个网格点用  $(j, k, n)$  来表示,即  $j = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots, k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots, n = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$ ,其中  $j$  和  $k$  是空间的网格编号,  $n$  是时间方向的网格编号.采用四边形解元和守恒元,网格点在时间方向的投影如图 1 所示.对于求解空间每一个网格点  $P(j, k, n)$ ,存在一个解元  $SE(P)$  (图 2),相应的守恒元  $CE(P)$  是六面体  $ACEGAC'EG'$  (图 3).

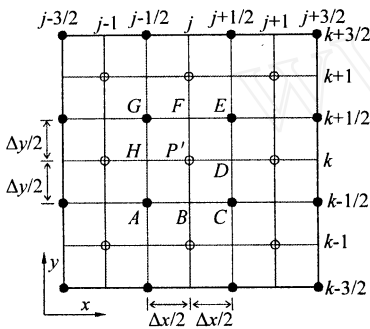


图 1 空间网格点在  $xy$  平面的投影  
Fig.1 Projection of mesh points on  $xy$  plane

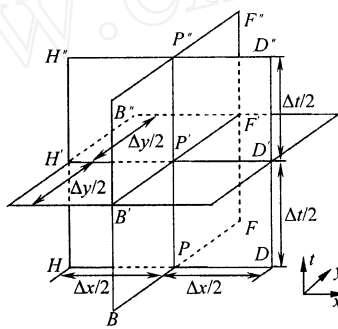


图 2 CE/SE 算法解元  
Fig.2 Solution element  $SE(P)$

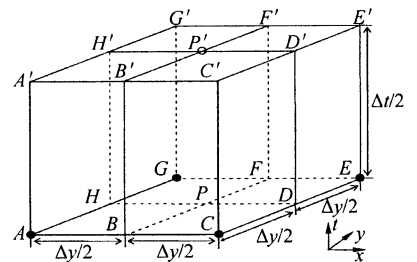


图 3 CE/SE 算法守恒元  
Fig.3 Conservation element  $CE(P)$

令  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t$  为三维 Euclid 空间的坐标.在  $E_3$  空间中由散度定理将式(2)写成积分型守恒律

$$\int_{S(V)} H_m \cdot ds = \int_V S_m dV, \quad m = 1, \dots, 10, \quad (13)$$

其中  $S(V)$  是求解区域的边界,  $ds = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ ,  $d\mathbf{r}$  是  $S(V)$  上的微元表面积,  $\mathbf{n}$  是指向  $S(V)$  外侧的单位法矢量, 矢量  $H_m = (E_m, F_m, Q_m)$  ( $m = 1, \dots, 10$ ) 是空间流矢量,  $E_m, F_m, Q_m$  分别是矢量  $E, F, Q$  的分量.

对任何一个解元,物理量用解元网格基点的 Taylor 展开表示,则图 2 中距离  $P$  点  $(dx, dy, dt)$  的点的物理量可表示为

$$\begin{aligned} Q_m(dx, dy, dt)_P &= (Q_m)_P + (Q_{mx})_P dx + (Q_{my})_P dy + (Q_{mt})_P dt, \\ E_m(dx, dy, dt)_P &= (E_m)_P + (E_{mx})_P dx + (E_{my})_P dy + (E_{mt})_P dt, \\ F_m(dx, dy, dt)_P &= (F_m)_P + (F_{mx})_P dx + (F_{my})_P dy + (F_{mt})_P dt, \\ S_m(dx, dy, dt)_P &= (S_m)_P, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $(Q_m)_P, (E_m)_P$  和  $(F_m)_P$  分别是  $P$  的  $Q_m, E_m$  和  $F_m$  值;  $(Q_{mx})_P, (E_{mx})_P$  和  $(F_{mx})_P$  分别是  $Q_m, E_m$  和  $F_m$  位于  $P$  点的  $x$  方向导数;  $(Q_{my})_P, (E_{my})_P$  和  $(F_{my})_P$  是  $y$  方向导数;  $(Q_{mt})_P, (E_{mt})_P$  和  $(F_{mt})_P$  是时间  $t$  方向导数.它们在解元中都是常数.

将(14)式代入(2)式得

$$(Q_{mt})_P = - (E_{mx})_P - (F_{my})_P + (S_m)_P. \quad (15)$$

由上式可知,在数值求解过程中 $(Q_m)_P$ 对 $t$ 的导数 $(Q_m)_P$ 可以通过 $(E_m)_P$ 和 $(F_m)_P$ 的空间导数 $(E_{mx})_P$ 和 $(F_{my})_P$ 以及源项 $(S_m)_P$ 求得,而 $(E_m)_P$ , $(F_m)_P$ 和 $(S_m)_P$ 都是 $(Q_m)_P$ 的函数,因此仅需要求解变量 $(Q_m)_P$ , $(Q_{mx})_P$ 和 $(Q_{my})_P$ .

设在守恒元 $CE(P)$ 上满足守恒律积分式(13),积分可得

$$(Q_m)_P - \frac{t}{4}(S_m)_P = \frac{1}{4} \left[ \bar{Q} + \frac{t}{x}\bar{E} + \frac{t}{y}\bar{F} + \frac{t}{4}\bar{S} \right], \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= Q_m \left( \frac{-x}{4}, \frac{-y}{4}, 0 \right)_A + Q_m \left( -\frac{x}{4}, \frac{-y}{4}, 0 \right)_C + Q_m \left( -\frac{x}{4}, -\frac{y}{4}, 0 \right)_E + Q_m \left( \frac{-x}{4}, -\frac{y}{4}, 0 \right)_G, \\ \bar{E} &= E_m \left( 0, \frac{-y}{4}, \frac{-t}{4} \right)_A - E_m \left( 0, \frac{-y}{4}, \frac{-t}{4} \right)_C - E_m \left( 0, -\frac{y}{4}, \frac{-t}{4} \right)_E + E_m \left( 0, -\frac{y}{4}, \frac{-t}{4} \right)_G, \\ \bar{F} &= F_m \left( \frac{-x}{4}, 0, \frac{-t}{4} \right)_A + F_m \left( -\frac{x}{4}, 0, \frac{-t}{4} \right)_C - F_m \left( -\frac{x}{4}, 0, \frac{-t}{4} \right)_E - F_m \left( \frac{-x}{4}, 0, \frac{-t}{4} \right)_G, \\ \bar{S} &= (S_m)_A + (S_m)_C + (S_m)_E + (S_m)_G. \end{aligned} \quad (17)$$

利用 $A, C, E$ 和 $G$ 点解元的物理量在交界点 $A, C, E$ 和 $G$ 处的连续性,可以得到 $Q_m$ 的 $x, y$ 方向导数

$$\begin{aligned} (Q_{mx})_P^- &= -\frac{1}{x} \left[ Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_A + Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_G - 2(Q_m)_P \right], \\ (Q_{mx})_P^+ &= +\frac{1}{x} \left[ Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_C + Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_E - 2(Q_m)_P \right], \\ (Q_{my})_P^- &= -\frac{1}{y} \left[ Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_A + Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_C - 2(Q_m)_P \right], \\ (Q_{my})_P^+ &= +\frac{1}{y} \left[ Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_E + Q_m \left( 0, 0, \frac{-t}{2} \right)_G - 2(Q_m)_P \right], \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $(Q_{mx})_P^-, (Q_{mx})_P^+, (Q_{my})_P^-, (Q_{my})_P^+$ 是守恒元 $CE(P)$ 中 $P$ 点的 $x, y$ 方向上导数的差商,对它们作某种加权平均,即可得到 $Q_m$ 的导数

$$\begin{aligned} (Q_{mx})_P &= W[(Q_{mx})_P^-, (Q_{mx})_P^+], \\ (Q_{my})_P &= W[(Q_{my})_P^-, (Q_{my})_P^+]. \end{aligned} \quad (19)$$

函数 $W$ 表示为

$$W[x_-, x_+, ] = \frac{|x_+| x_- + |x_-| x_+}{|x_+| + |x_-|}. \quad (20)$$

对于流体弹塑性问题,式(16)中左端源项 $(S_m)_P$ 不为零.由于 $(S_m)_P$ 是 $(Q_m)_P$ 的非线性函数,因此需要采用牛顿迭代法求解.为了避免迭代,利用源项的时间方向线性预估值来代替当前时刻的 $(S_m)_P$ ,由式(16)可知,

$$\begin{aligned} (Q_m)_P &= \frac{1}{4}\bar{Q} + \frac{t}{4x}\bar{E} + \frac{t}{4y}\bar{F} + \frac{t}{16}\bar{S} + \frac{t}{4}(S_m)_P, \\ (S_m)_P &= \frac{1}{4} \left[ \bar{S} + \frac{t}{2}\bar{S}_t \right], \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\bar{S}_t$ 是 $\bar{S}$ 的时间导数,由于 $\bar{S}$ 是 $Q$ 的函数,而此时 $Q$ 的时间导数已知,因此可以求出 $\bar{S}$ 的时间导数.实际计算表明,采用线性化算法所得到的计算结果和牛顿迭代法得到的结果基本一致.

### 3 界面追踪与边界条件

本文采用 Enright 等人提出的粒子杂交水平集方法<sup>[8]</sup>追踪物质界面.分别用不同水平集函数值描述每一种物质块的界面,水平集函数 $(x, y, z) < 0$ 的区域表示在物质内,如图4所示.在多物质流动中应用水平集方法处理界面位置时,必须考虑各种不同的界面特性和界面条件.根据不同的边界特性,可以把物质界面分成两种不同的边界条件:物质接触界面和自由界面.物质接触界面边界条件反映了不同的物质块之间的相互

作用,而自由界面边界条件则反映了物质在真空中的自由运动。

如果一个网格点在物质界面之外,而计算中需要用到其物理量值,那么就把这个点定义为边界点。对 CE/SE 方法而言,它在  $x$  和  $y$  方向分别只需要一个边界点,因此判断是否为边界点条件就很简单,即如果这个点和距离它最近的 8 个点中任何一个点处在某种物质内部,那么,它就是这种物质边界点。如果这个点是某种物质边界点,同时它周围的 8 个点都不属于其他物质,就把这种边界点定义为这种物质的自由边界点;如果这个点是某种物质的边界点,同时它周围的 8 个点有属于其他物质的点,就把这种边界点定义为这种物质与其他物质的物质接触边界点。

### 3.1 自由界面边界条件

自由界面边界在物理上要求在自由界面上的法向应力和剪切应力分量均为零。设界面法向矢量表示为  $n = (n_x, n_y)$ ,则在局部坐标系下应力张量可表示为

$$\hat{\sigma} = A^T \sigma A, \tag{22}$$

其中  $\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xy} & \hat{\sigma}_{yy} \end{bmatrix}$  为局部坐标系中界面上边界点的应力张量,  $A = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}$  为局部坐标系和笛卡儿坐标系之间的转换矩阵,

$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$  为笛卡儿坐标系中界面上边界点的应力张量。

首先计算边界点  $P$  关于界面对称的  $I$  点的局部应力分量。根据物质内应力偏量和压力以及式(22)可以导出  $P$  点的局部应力分量的镜像内插值为

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx,I} &= n_{x,P}^2 \rho \sigma_{xx,I} + n_{y,P}^2 \rho \sigma_{yy,I} + 2 n_{x,P} n_{y,P} \rho \sigma_{xy,I} - p_I, \\ \hat{\sigma}_{xy,I} &= (n_{x,P}^2 - n_{y,P}^2) \rho \sigma_{xy,I} + n_{x,P} n_{y,P} (\rho \sigma_{yy,I} - \rho \sigma_{xx,I}), \\ \hat{\sigma}_{yy,I} &= n_{x,P}^2 \rho \sigma_{yy,I} + n_{y,P}^2 \rho \sigma_{xx,I} - 2 n_{x,P} n_{y,P} \rho \sigma_{xy,I} - p_I, \end{aligned} \tag{23}$$

上式中等号右边带有  $I$  脚标的物理量是通过界面镜像内插计算得到的值,  $(n_{x,P}, n_{y,P})$  是  $P$  点的单位外法向量在笛卡儿坐标系  $(x, y)$  方向上的投影。由于自由面边界条件以及插值点是  $P$  的镜像点,因此边界点  $P$  的局部应力分量为

$$\hat{\sigma}_{xx,P} = -\hat{\sigma}_{xx,I}, \quad \hat{\sigma}_{xy,P} = -\hat{\sigma}_{xy,I}, \quad \hat{\sigma}_{yy,P} = \hat{\sigma}_{yy,I}. \tag{24}$$

求得  $P$  点局部应力分量后,根据式(22)可以得到在笛卡儿坐标下的分量。 $P$  点其他的物理量如密度、速度、内能和压力等可通过物质内物理量在  $P$  点界面线性外推插值计算方法得到。

### 3.2 物质接触界面边界条件

假设  $P$  点是物质 1 的物质 - 物质界面上的边界点,它可能和物质 2 发生相互作用。在物质接触界面上要求界面两侧的法向速度、法向应力和剪切应力连续,如果不考虑摩擦的滑移边界,则界面两侧的切向速度和切向应力没有联系,可以间断。

$P$  点在局部坐标系下的速度为

$$\begin{aligned} v_n &= u_{P,2} n_{x,P} + v_{P,2} n_{y,P}, \\ v_t &= u_{P,1} n_{y,P} - v_{P,1} n_{x,P}, \end{aligned} \tag{25}$$

其中下标带有 1 的量表示物质 1 速度由  $P$  点的线性外推插值计算得到,带 2 的量表示物质 2 在  $P$  点的实际速度,  $(n_{x,P}, n_{y,P})$  是  $P$  点的单位外法向量在笛卡儿坐标系  $(x, y)$  方向上的投影。由于法向速度连续,因此  $v_n$  需要用物质 2 在  $P$  点实际速度计算得到,而切向速度不必连续,故  $v_t$  由物质 1 速度在  $P$  点的线性外推插值计算得到。有了局部坐标系的速度,就可以通过坐标变换求解笛卡儿坐标系下的速度。采用同样方法及式(22)可计算应力值。 $P$  点其他物理量如密度、内能和压力等也可通过物质 1 的物理量在  $P$  点的线性外推插值得到。

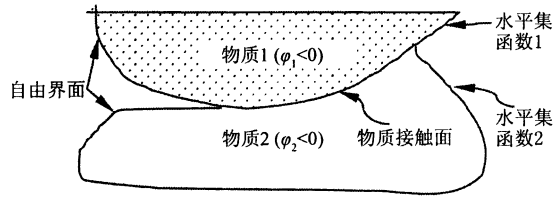


图 4 物质接触边界中物质块描述示意图

Fig. 4 Sketch of description of material surfaces with level set functions

## 4 算例

Anderson<sup>[13]</sup>等人做了长钨合金杆(WHA)垂直侵彻高强度装甲钢的试验,测定了钨杆侵入端(头部)和尾部的速度和位置的时间历程.其中钨合金杆长50 mm,半径2 mm,装甲钢板是矩形的,长70 mm,宽40 mm,厚度29 mm.钨合金杆的撞击速度为 $1\,250\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .本文在计算中采用轴对称模型近似,上述实验的装甲钢靶板模型相当于厚度29 mm,半径30 mm的装甲钢圆盘.钨合金和装甲钢均采用Johnson-Cook本构模型和Mie-Grüneisen状态方程,参数见表1和表2.计算区域是 $32\text{ mm}\times 90\text{ mm}$ ,网格取 $320\times 900$ ,总计算时间是 $80\mu\text{s}$ .

表1 Johnson-Cook 模型参数

Table 1 Parameters in a Johnson-Cook model

	密度/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	弹性模量/ GPa	泊松比	A/MPa	B/MPa	$n$	$C$	$m$	比热/ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	熔点/ K
钨合金	17 600	323	0.30	1 510	177	0.12	0.016	1.00	134	1 723
装甲钢	7 850	200	0.29	1 500	569	0.22	0.003	1.17	477	1 777

表2 Mie-Grüneisen 状态方程参数

Table 2 Parameters in the Mie-Grüneisen equation of state

	声速/ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	Grüneisen 系数	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$a$
钨合金	4 030	1.43	1.237	0	0	0
装甲钢	4 570	1.16	1.330	0	0	0.43

图5给出20,40,60和80 $\mu\text{s}$ 时长钨合金杆撞击装甲钢圆盘过程中杆和靶的变形分布.图中黑色部分是钨合金杆,灰色部分是装甲钢.从图5可以看出,随着时间的推移,钨合金杆长度逐渐减少,向侵彻坑两侧扩展,并向靶板上表面方向流动,当侵彻到80 $\mu\text{s}$ 时,钨合金杆的扩展和逆向流动部分已经达到约10 mm长度;同时随着侵彻时间的延长,侵彻孔逐渐扩大,并在靶板的背部产生明显变形和隆起.所有这些和Anderson的实验及文[10]的数值模拟结果相符.

图6给出不同时间本算法和试验以及文[10]中关于钨合金杆头部(Nose)和尾部(Tail)的位置对比.从中可以看出,本算法与试验结果以及文[10]的自适应有限元算法符合得相当好.

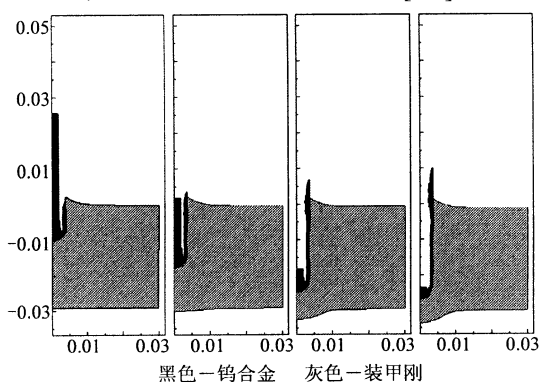


图5 撞击速度为 $1\,250\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,20,40,60和80 $\mu\text{s}$ 时侵彻过程变形图(黑色表示钨合金,灰色表示装甲钢)  
Fig. 5 Deformation at time 20,40,60 and 80 $\mu\text{s}$  at impact velocity  $1\,250\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (Black denotes WHA and gray steel)

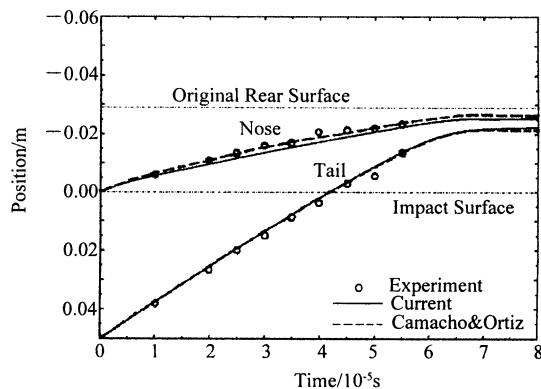


图6 撞击速度为 $1\,250\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 情况钨合金杆头部和尾部位置与实验和文[10]结果对比  
Fig. 6 Histories of projectile nose and tail position compared with those in Ref. [10] at impact velocity  $1\,250\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

## 5 结论

本文将时-空守恒元解元方法成功地推广到固体弹塑性流动计算中.同时,结合杂交粒子水平集方法以及特殊地处理物质接触界面和自由界面方法,提出一种有效且精度较高的带有精确界面处理的多物质 Euler型的弹塑性流体计算方案.这套计算方案可以方便地处理物质大变形问题,如高速碰撞和侵彻等.对长钨合金杆垂直侵彻高强度装甲钢的试验进行数值模拟,并把计算结果与试验结果及有关文献结果进行对比.其结

果表明,本文对 CE/SE 方法的推广是成功的,精度较高.本方法物理概念清晰,很容易将其推广到多维计算中,具有十分广阔的应用前景.

### [参 考 文 献]

- [ 1 ] Miller G H, Colella P. A high-order Eulerian Godunov method for elastic-plastic flow in solids [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **167**:131 - 176.
- [ 2 ] Howell B P, Ball G J. A free-Lagrange augmented Godunov method for the simulation of elastic-plastic solids [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **175**:128 - 167.
- [ 3 ] Udaykumar H S, Tran L B, Belk D M, Vanden K J. An Eulerian method for computation of multimaterial impact with ENO shock-capturing and sharp interfaces [J]. *Journal of Computational Physics*, **2003**, **186**: 136 - 177.
- [ 4 ] Chang S C. The method of space-time conservation element and solution element - a new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1995, **119**: 295 - 324.
- [ 5 ] Liu K, Wang J. Analysis of high accuracy conservation-element and solution-element schemes [J]. *Chinese Physics Letters*, 2004, **21** (11): 2085 - 2088.
- [ 6 ] Jorgenson P C E, Loh C Y. Computing axisymmetric jet screech tones using unstructured grids[R]. AIAA - 2002 - 3889, 2002.
- [ 7 ] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, **79**:12.
- [ 8 ] Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, Mitchell I. A hybrid particle level set method for improved interface capturing [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **176**: 205 - 227.
- [ 9 ] 张德良, 谢巍, 郭长铭, 胡湘渝. 气相爆轰胞格结构和马赫反射数值模拟[J]. *爆炸与冲击*, 2001, **21**(3): 161 - 167.
- [ 10 ] Camacho G T, Ortiz M. Adaptive Lagrangian modeling of ballistic penetration of metallic targets [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **142**:269 - 301.
- [ 11 ] Johnson G R, Cook W H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, **21**(1): 31 - 48.
- [ 12 ] Livermore Software Technology Corporation. LS-DYNA Keyword User's Manual ver970 [M]. California/USA, 2003.
- [ 13 ] Anderson C E, Höhler V, Walker J D, Stip A J. Time-resolved penetration of long rods into steel targets [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1995, **16**: 1 - 18.

## A Eulerian Approach Based on CE/SE Method for 2D Multimaterial Elastic-Plastic Flows

WANG Jingtao<sup>1</sup>, ZHANG Deliang<sup>2</sup>, LIU Kaixin<sup>1</sup>

(1. *LTCS and Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China;*

*2. Institute of Mechanics, Chinese Academic of Science, Beijing 100871, China)*

**Abstract:** We extend the CE/SE scheme and present a complete Eulerian approach for two-dimensional (plane strain and axisymmetry) elastic-plastic flows with solid features. Eulerian governing equations are adopted and solved on a fixed Cartesian grid. Johnson-Cook constituted equations and Mie-Grüneisen equation of state are used to describe materials. A hybrid particle level set method is used to trace interfaces of materials. Two types of boundary condition are presented in tracking interface. The penetration of a steel target by a WHA long rod is simulated and the computational results are carefully compared with those in other literatures.

**Key words:** CE/SE method; elastic-plastic flow; level set method; multi-material flow