

# 基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法

郑淑飞 丁桦<sup>1)</sup>

(中国科学院力学研究所工程科学部, 北京 100190)

**摘要** 提出一种基于变形修正的动力模型简化方法. 以复杂工程结构的有限元模型为基础, 根据运动同步性假设将结构分成若干同步性区域. 采用适当的位移模式去逼近位移真值, 再通过总体应变能最小来优化, 从而得到整体位移与局部位移模式间的转换关系. 算例结果表明了简化方法的有效性.

**关键词** 模型简化, 变形修正, 总体应变能, 优化

## A MODEL REDUCTION METHOD FOR DYNAMIC ANALYSIS BASED ON DEFORMATION MODIFICATION AND LOCAL RIGID BODY MODE

ZHENG Shufei DING Hua<sup>1)</sup>

(Division of Engineering Science, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract** A new model reduction method based on deformation modification is presented for dynamic analysis. Complex structures can be divided into several displacement synchronous parts by analyzing the finite element models based on a synchronistic assumption. The displacement can be approached by an appropriate mode, and the transformation relationship between global displacement and local displacement can be obtained by minimizing Global Strain Energy. The results of examples show the validity of the method.

**Key words** model reduction, deformation modification, global strain energy, optimization

动态系统模型简化方法的研究和应用, 一直是大型动态系统理论研究和结构设计中的重要课题<sup>[1]</sup>. 同样, 在结构动力学领域, 模型简化也是结构动力学分析中非常关键的技术. 结构动力学模型简化的根本目的是为了获得一个满足工程精度要求的低阶、有效的计算模型, 从而可以用简化模型对原始复杂模型进行性能分析以及模拟仿真. 现有的结构动力学模型简化方法主要可分成以下 3 类.

(1) 自由度减缩方法. 其基本思路是从结构一般运动方程或特征方程出发, 用保留自由度表示缩聚掉的自由度, 从而实现对模型的简化. 典型的此类方法有 Guyan-Irons 法<sup>[2,3]</sup>, Kuhar 法<sup>[4]</sup>, IRS 法<sup>[5]</sup>和模态缩聚法<sup>[6]</sup>等.

(2) 动态子结构方法<sup>[7,8]</sup>. 这类方法是直接得到低阶模型的方法. 首先得到各个子结构的低阶动力特性, 然后通过子结构间位移和力的双协调条件得到整体结构以低阶模态坐标表示的综合振动方程.

(3) 结构等效方法<sup>[9,10]</sup>. 此类方法从结构力学分析出发, 针对某种特定的结构, 用简单的结构等效复杂结构的主要特征, 得到简化的力学模型.

随着结构动力学研究领域的进一步深入, 近些年来, 研究重点已经由结构动力学正问题发展到结构动力学反问题方面. 像参数识别、载荷反演、振动控制等都属于结构动力学反问题的范畴. 这些新问题的求解对动力学系统的模型简化提出了更高的要求. 首先, 虽然现代计算机技术得到了很大的发展, 但是计算量在某些问题中依然是一个瓶颈. 其次, 随着结构自由度的剧增, 计算中引入的误差项可能导致解的不稳定, 而无法得到解的最优极值. 再次, 大型复杂结构的控制、工况检测及故障检测等问题中, 如果结构系统的数学模型的自由度太大, 就无法实现“实时”. 最后, 如果问题求解中涉及非线性, 同样会有计算量过大的困难. 对于以上诸多方面对模型简化提出的要求, 现有的模型简化方法有时远

2008-01-08 收到第 1 稿, 2008-03-20 收到修改稿.

1) E-mail: hding@imech.ac.cn

远不能解决.

本文针对上面的问题,在运动同步性假设的前提下,在各个同步性区域引入准刚体模态,利用总体应变能最小对局部刚体化模型进行变形修正,达到总体优化的目的,得到精确度极高的简化模型.

## 1 运动同步性区域的划分与表述

任何形式的模型简化方法都是有一定假设条件的,它必然要忽略结构的某些次要因素,保留其重要特征来达到简化模型的目的.我们在对许多大型复杂结构,如:高层建筑、海洋平台、大型舰船等,进行模态分析时,会发现结构某些区域的运动特征呈现同步性.所谓运动同步性,就是在一定的位移模式下,结构整体运动可以用统一模式进行描述.刚体运动自然是运动同步性的一种特殊情况,我们以刚体模态为例来描述运动同步性区域的位移,由于采用了刚体模态,故称这样的区域为刚体化区域.

针对相应结构的有限元模型,先根据运动同步性的假设将结构划分为若干个同步性区域,然后用准刚体模态位移去等效每个区域的位移,得到最初的局部刚体化简化模型.于是,每个刚体化区域内任一点  $j$  的运动可以用该区域质心的 6 个基本的准刚体模态进行叠加

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{q}_j \quad (1)$$

其展开形式为

$$\begin{Bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{cj} & -y_{cj} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{cj} & 0 & x_{cj} \\ 0 & 0 & 1 & y_{cj} & -x_{cj} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{jz} \\ q_{j\theta x} \\ q_{j\theta y} \\ q_{j\theta z} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{u}_j$  表示该区域中第  $j$  点的位移向量,  $\mathbf{q}_j$  表示该区域的刚体模态,  $\mathbf{R}_j$  表示 6 个刚体模态的叠加矩阵或称位移变换矩阵,  $x_{cj}, y_{cj}, z_{cj}$  表示该区域中任一点  $j$  的相应坐标与该区域质心相应坐标的差值.

把整个模型的所有节点分成边界节点和内部节点两部分,内部节点的自由度全部用刚体化区域质心的刚体模态凝聚,所以在刚体化区域质心处增加内部超节点,也就是说内部节点的自由度全部用刚体化区域质心处超节点的自由度来凝聚,即

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{in} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{R}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_o \\ \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{q} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{u}_0$  代表边界节点的位移向量,  $\mathbf{u}_{in}$  代表内部第  $n$  个同步性区域节点的位移向量,  $\mathbf{R}_n$  代表内部第  $n$  个同步性区域节点的位移变换矩阵,  $\mathbf{q}_n$  代表内部第  $n$  个同步性区域超节点的刚体模态,  $\mathbf{q}$  代表内部自由度凝聚后的节点位移向量,  $\mathbf{R}$  表示总体位移变换矩阵.

## 2 变形修正

在各个运动同步性区域用准刚体模态来假定位移模式,而实际情况可能不是这样,这就带来了误差.基于能量法和变分法<sup>[11]</sup>的一些思想,本文提出用总体应变能最小的算法来对简化模型进行变形修正,达到总体优化的目的,事实证明效果是很好的.

假设位移真值是  $\tilde{\mathbf{u}}$ . 下面是模型整体优化的过程,也就是寻找最优的  $\mathbf{q}$ ,使得简化模型的位移  $\mathbf{u}$  与位移真值  $\tilde{\mathbf{u}}$  最接近,推导的依据是误差位移引起的系统总误差应变能需达到最小.

位移误差向量

$$\delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{R} \mathbf{q} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{u}$  代表式 (3) 所示的局部刚体化简化模型的位移向量.  $\delta \mathbf{u}$  对应的应变误差为

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (5)$$

$\mathbf{B}$  是一般有限元理论中的应变矩阵,应变误差  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  对应的总体误差应变能

$$U(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{u})^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV (\delta \mathbf{u}) \quad (6)$$

而

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (7)$$

$\mathbf{K}$  表示系统总刚度矩阵,  $\mathbf{D}$  为一般有限元理论中的弹性矩阵. 所以

$$U(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{R} \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{R} \mathbf{q}) \quad (8)$$

为使系统总误差应变能最小,需使

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{R}^T \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{R} \mathbf{q}) = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{q} - \mathbf{R}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (9)$$

即

$$R^T K R q = R^T K \tilde{u} \quad (10)$$

要想使简化模型的位移向量式 (3) 与位移真值  $\tilde{u}$  最接近,  $q$  与  $\tilde{u}$  应该满足式 (10).

用  $\bar{u}$  近似表示位移真值  $\tilde{u}$ , 由式 (10) 可得

$$K \bar{u} = (R^T)^+ R^T K R q \quad (11)$$

其中,  $(R^T)^+$  代表  $R^T$  矩阵的广义逆矩阵. 因为广义逆是一种基于最小二乘的近似, 所以  $\bar{u}$  与位移真值  $\tilde{u}$  还是不完全一致的. 由式 (11) 可得

$$\bar{u} = K^{-1} (R^T)^+ R^T K R q \quad (12)$$

令

$$T = K^{-1} (R^T)^+ R^T K R \quad (13)$$

则

$$\bar{u} = T q \quad (13)$$

式 (13) 即为简化模型优化后的位移变换表达式.

### 3 模型简化

利用式 (13) 的变换关系代入到系统的动力学方程

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F \quad (14)$$

方程两边同左乘  $T^T$ , 得到简化后的动力学方程

$$M_R \ddot{q} + C_R \dot{q} + K_R q = F_R \quad (15)$$

式中,  $M, C, K$  为原始有限元结构的质量、阻尼和刚度矩阵;  $M_R = T^T M T, C_R = T^T C T, K_R = T^T K T$  为优化后简化结构的质量、阻尼和刚度矩阵,  $F_R = T^T F$  为优化后简化模型的载荷向量.

### 4 算例

该算例是平面问题, 模型由两种材料构成. ANSYS 单元类型: Plane42, 单元尺寸为 0.1 m. 左半部分几何尺寸 0.5 m × 0.5 m, 左半部分材料参数:  $E = 1.0 \times 10^{10}$  Pa,  $\mu = 0.25, \rho = 4500$  kg/m<sup>3</sup>. 右半部分几何尺寸 0.3 m × 0.3 m, 右半部分材料参数:  $E = 1.0 \times 10^9$  Pa,  $\mu = 0.3, \rho = 4000$  kg/m<sup>3</sup>, 左端固定. 模型左右两部分各划分为一个刚体化区域, 在模型左右两部分质心各处放置一个超节点. 有限元网格图如图 1 所示, 简化模型示意图如图 2 所示.

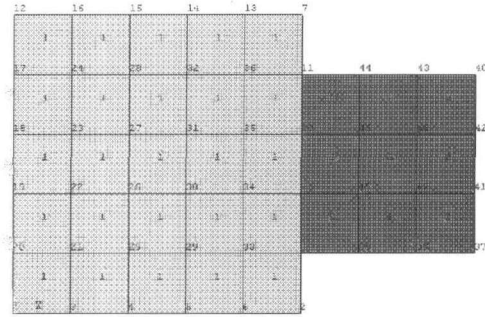


图 1 有限元网格图

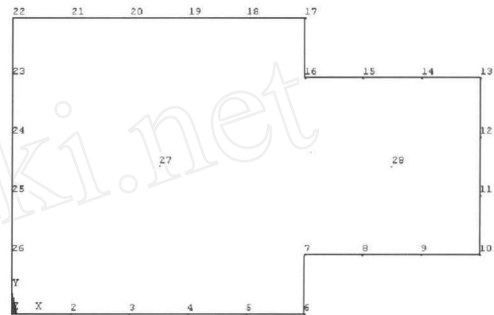


图 2 简化模型示意图

对于无阻尼的系统, 得到简化结构的质量矩阵和刚度矩阵之后便可以求得系统的频率, 简化系统的频率结果与 ANSYS 求解的结果对比见表 1 所示. 由表格 1 可见简化模型的结果相当精确, 已可以满足工程计算需要.

表 1 简化结构频率误差分析表

阶次	ANSYS 求解结果 /Hz	简化模型求解结果 /Hz	误差 (%)
1	142.29	142.36	0.05
2	322.59	322.86	0.08
3	372.64	373.14	0.13
4	548.17	551.19	0.55
5	765.09	774.57	1.24
6	804.69	810.85	0.77
7	833.13	857.49	2.92
8	933.47	976.04	4.56
9	989.87	1035.6	4.62
10	1261.4	1285.8	1.93

下面再看看简化模型在冲击载荷下的位移响应. 我们在模型最右端顶部节点施加沿  $y$  轴负方向的冲击载荷

$$F = \begin{cases} 2.0 \times 10^6 t, & 0 < t \leq 0.005 \\ -2.0 \times 10^6 t + 2.0 \times 10^4, & 0.005 < t \leq 0.01 \\ 0, & 0.01 < t \leq 0.03 \end{cases}$$

冲击载荷的示意图如图 3 所示. 分别用原始有限元模型和简化模型进行求解, 都采用 New Mark 算法求解, 时间步长取为 0.000 05 s, 对比右上角节点 (40 号节点) 的位移响应曲线如图 4 所示. 通过对比我们发现简化模型的求解结果与原始有限元模型的结果几乎完全一致. 我们也对比了其它节点, 结果都非常精确.

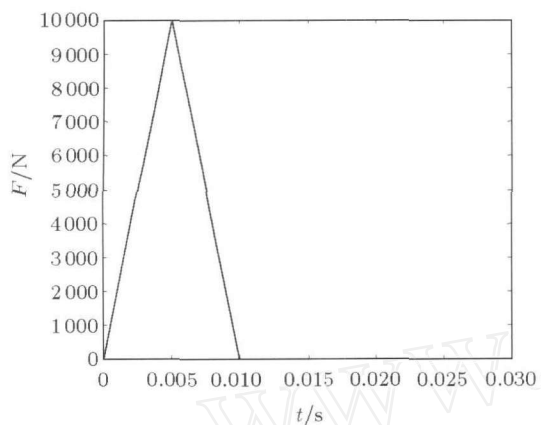


图 3 冲击载荷示意图

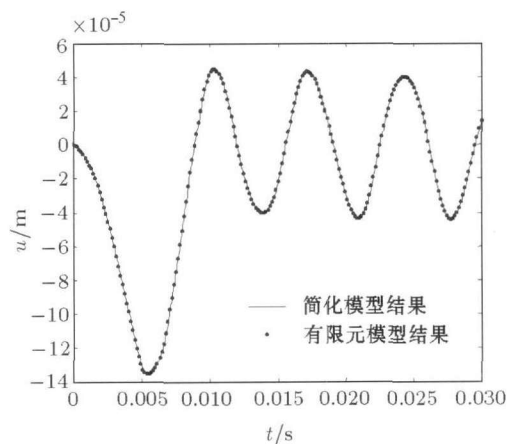


图 4 两种模型的冲击载荷位移响应曲线

## 5 结 论

(1) 本文在运动同步性假设的前提下, 在各个同步性区域引入某种适当的位移模式, 其中一种比较简单而有效的位移模式就是刚体位移模式, 利用总体应变能最小进行变形修正, 得到精确度极高的简化模型. 本文方法对于一些复杂结构动力模型进行简化时, 计算过程简单, 而且简化模型和原模型之间始终保持着直接简单的联系.

(2) 本文提出的方法对单元类型和形函数没有限制, 只需要知道系统的一些基本信息, 如: 节点坐标、柔度矩阵等, 便可对模型进行简化, 操作非常简单、步骤清晰.

(3) 本文提出的模型简化方法把内部节点的自由度全部用各个同步性区域质心的自由度来替代, 当模型很庞大的时候可以对原模型进行超大规模降阶, 计算效率大大提高.

(4) 本文方法不同于其它简化方法, 其实质是一种模型修正的概念. 通过具体算例的分析, 证明本文提出的方法可以很好地应用到工程计算中.

## 参 考 文 献

- 1 Qu ZQ, Jung Y, Selvam RP. Model condensation for non-classically damped systems-part I: static condensation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2003, 17(5): 1003~1016
- 2 Robert J. Guyan reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 680
- 3 Irons B. Structural eigenvalue problems: elimination of unwanted variables. *AIAA Journal*, 1965, 3(5): 961~962
- 4 Edward J Kuhar, Clyde V Stahle. Dynamic transformation method for modal synthesis. *AIAA Journal*, 1974, 12(5): 672~678
- 5 O'Callahan JC. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. *Proceedings of the 7th International Model Analysis Conference*, Las Vegas, January 1989. 17~21
- 6 张德文. [美] 魏阜旋. 模型修正与破损诊断. 北京: 科学出版社, 1999 (Zhang Dewen, Wei Fuxuan. Model Updating and Damage Detection. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- 7 傅志方, 施勒忠, 盛宗毅等. 模态分析与结构动力修改技术在中国古钟研制中的应用. 第五届全国模态分析与试验学术交流会论文集, 1988. 28~36 (Fu Zhifang, Shi Lezhong, Sheng Zongyi, et al. The application in the research of Chinese ancient bells using modal analysis and structure dynamic modification. (Symposia Series) Proceeding of the 5th Countrywide Modal Analysis and Test Conference, 1988. 28~36 (in Chinese))
- 8 楼梦麟. 结构动力分析的子结构方法. 上海: 同济大学出版社, 1997 (Lou Menglin. The Substructure Method for Dynamic Analysis of Structures. Shanghai: Tongji University Press, 1997 (in Chinese))
- 9 邵永松, 刘洪波, 谢礼立等. 平面与空间钢框架结构的简化柱梁模型. *工程力学*, 2004, 21(1): 1~8 (Shao Yongsong, Liu Hongbo, Xie Lili, et al. The simplified column-beam model for planar and spacial steel frames. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(1): 1~8 (in Chinese))
- 10 吕明云, 瞿伟廉, 陈伟. 基于有限元的升船结构简化力学模型. *武汉理工大学学报*, 2002, 24(5): 55~57 (Lü Mingyun, Qu Weilian, Chen Wei. Reduced mechanical model of lift-ship structure for earthquake response based on finite element model. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2002, 24(5): 55~57 (in Chinese))
- 11 钱伟长. 变分法及有限元. 北京: 科学出版社, 1980 (Qian Weichang. Variation and Finite Element Method. Beijing: Science Press, 1980 (in Chinese))