

文章编号: 1000-6893(2005)01-0044-06

颗粒填充复合材料的应变统计特征与刚度模量

杨俊, 吴炜, 王治国, 刘晓宇, 梁乃刚
(中科院力学所 LNM 国家重点实验室, 北京 100080)

Statistic Regularity of Strain Distribution and Stiffness Prediction of Particulate-filled Composites

YANG Jun, WU Wei, WANG Zhi-guo, LIU Xiao-yu, LIANG Nai-gang
(LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

摘要: 针对填充颗粒体积分数高、随机分布的复合材料, 基于一种特定应变分解方式, 利用有限元数值分析, 研究了任意宏观变形条件下代表性体积单元内应变分布的统计规律, 分别得到了颗粒与基体内应变的平均值、应变的涨落值与宏观应变之间的统计关系, 并对颗粒填充复合材料的等效剪切模量和等效体积模量进行了预测。

关键词: 颗粒填充复合材料; 应变统计规律; 刚度模量
中图分类号: V252; TG132.2⁺7 **文献标识码:** A

Abstract: Aimed at particulate-filled composites with high-volume-fraction and randomly distributed particles, based on a particular strain decomposition mode, the statistical regularities of strain distribution of representative volume element (RVE) under any macro-deformation loading are investigated by FEA method, the statistical regularities of the mean-value and fluctuation of strain in particle as well as in matrix to the macroscopical strain are obtained, and the equivalent bulk modulus and equivalent shear modulus of the composites are derived.

Key words: particulate-filled composite; statistic regularity of strain distribution; stiffness

为了认识颗粒填充复合材料的宏观行为并且改善它们的服役性能, 人们已经做了大量的实验、理论和数值研究工作。例如由 Eshelby 建立并进一步被多位学者发展的有效介质理论^[1-4], 能够合理地预测填充颗粒较为稀疏、而且形状与分布理想的材料力学性质。然而实际工程复合材料中, 颗粒的形状与分布方式常呈不规则的状态, 颗粒聚集很常见。因而, 人们不得不越来越多地采用基于有限元技术的计算模型。经典胞模型的胞中仅包含 1 个颗粒, 原则上模拟填充颗粒周期排列的复合材料^[5-7]。随着计算能力的提高, 近年来人们开始利用三维多颗粒单元胞模型^[8-10], 通过模拟含有随机分布多个颗粒的细观结构代表性单元, 求得局部应力应变场, 探讨填充颗粒体积分数、几何形状、分布及性质变化对于复合材料力学性能的影响。

借助于三维多颗粒单元胞模型, 本文将研究填充颗粒体积分数、刚度比、分布方式不同的复合材料内应变分布的统计规律。将利用数值方法

分析颗粒填充复合材料的细观应变场, 归纳统计规律, 提取统计参数, 并推导复合材料的有效剪切模量与体积模量的计算公式。

1 宏观应变及典型应变分解方式

由于问题是线弹性的, 代表性体积单元的位移解与宏观应变载荷 E 成线性关系, 可以应用叠加原理并利用几种典型应变载荷 E 作用下的位移解组合得到任意载荷 E 作用下的结果。为此, 选中 3 种典型应变载荷

$$\left. \begin{aligned} E_{ij(0)} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \delta_{ij} \\ E_{ij(1)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} 1, & i = j = 1 \\ -1, & i = j = 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ E_{ij(2)} &= \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{cases} 1, & i = j = 1, 2 \\ -2, & i = j = 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

使得 E 在其主标架下可被分解为这 3 种应变载荷的组合, 即

$$E = e_0 E_{(0)} + e_1 E_{(1)} + e_2 E_{(2)} \quad (2)$$

从而, 对任意宏观应变载荷作用下单元胞模型

收稿日期: 2004-01-07; 修订日期: 2004-03-25
基金项目: 国家 973 计划项目 (2002CB412706)、国家自然科学基金项目 (10232050) 资助

内细观应变场的统计分析可以简化为这 3 种典型应变加载方式下的研究。

并且,容易证明这 3 种应变关于颗粒填充复合材料的有效刚度张量 C

$$C_{ijkl} = \left[K - \frac{2}{3} G \right] \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

相互正交并满足以下关系

$$E_{(i)} C E_{(j)} = \begin{cases} 3K, i = j = 0 \\ 2G, i = j = 1, 2 \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

其中: δ_{ij} 是 Kronecker 符号; K 和 G 分别是复合材料的有效体积模量和有效剪切模量。

2 应变统计变量的选取

选取复合材料中一个代表性体积单元 V 作为体胞,其中颗粒相和基体相分别是各向同性材料。遵循 Hashin^[11]所给出的定义,体胞尺寸足够大,宏观统计均匀且各向同性;同时尽量小,可实施有效计算模拟。

为研究代表性体积单元中细观应变场的分布特征,需要在颗粒相和基体相应变场中各选取一组参数。首先定义颗粒相的平均应变 $\bar{\epsilon}_{(p)}$

$$\bar{\epsilon}_{(p)} = \frac{1}{|V_p|} \int_{V_p} \epsilon dV \quad (5)$$

这里 $|V_p|$ 是颗粒相的体积。此外,由于细观应变场不均匀性,颗粒内的局部应变场 ϵ_p 可以分解成 $\bar{\epsilon}_p$ 和涨落 s_p , 并且后者可以进一步分解为体积涨落 ϵ_0 和畸变涨落 s_p , 即

$$\epsilon_p = \bar{\epsilon}_p + s_p = \bar{\epsilon}_p + \epsilon_0 + s_p \quad (6)$$

其中 ϵ_0 为体积涨落系数。定义颗粒相应变体积涨落系数 ϵ_0 的方差 $(\epsilon_0)^2$

$$(\epsilon_0)^2 = \frac{1}{|V_p|} \int_{V_p} (\epsilon_0)^2 dV \quad (7)$$

及颗粒相畸变涨落 s_p 的方差 $(s_p)^2$

$$(s_p)^2 = \frac{1}{|V_p|} \int_{V_p} s_p s_p dV \quad (8)$$

由于体胞尺寸足够大,变量 $\bar{\epsilon}_p$ 、 $(\epsilon_0)^2$ 和 $(s_p)^2$ 分别具有宏观统计均匀性。它们将选作颗粒相应变场中的统计变量。

类似地,在基体相中定义 $\bar{\epsilon}_m$ 、 $(\epsilon_m)^2$ 和 $(s_m)^2$, 作为基体相应变场中的统计变量。

3 多颗粒单元体胞模型

为模拟颗粒填充复合材料,设计了 3 种正立

方体形状多颗粒单元体胞模型。这 3 种模型中,颗粒体积份数、颗粒与基体模量比及泊松比都相同,分别为 34.3%、5 1 和 0.25。但 3 种模型的细观结构形态有所不同。模型 A 要求颗粒形状为正立方体,颗粒规则地分布于基体内。任意颗粒与其最邻近颗粒间距离相同,颗粒尺寸与颗粒间距之比为 7 3。对于模型 B,颗粒形状仍为正立方体,但颗粒随机分布于基体,并且彼此不重合。为此,采用 RSA 方法^[12]构造颗粒位置随机的基体-颗粒细观几何。即,随机产生候选颗粒位置,如果候选颗粒与已有颗粒不重合且与之间隔大于 1/7 颗粒尺寸,则接受,否则放弃;上述操作持续至所需的体积份数。模型 C 中颗粒形状不规则,且颗粒随机分布。具体的基体-颗粒细观几何由如下方式构造:顺序地选取正立方体形状的候选颗粒,随机产生位置,将其加入单元体胞中。3 种多颗粒体胞模型的剖面示意图如图 1(a)~(c) 所示。

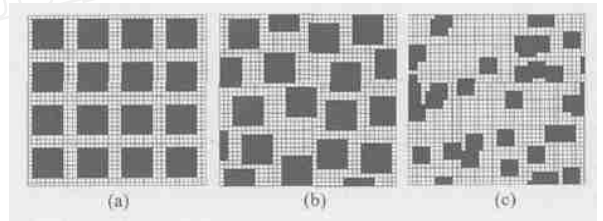


图 1 多颗粒体胞模型剖面图

Fig. 1 The cutaway views of three types of multi-particle unit cell models

为确保单元体胞模型具有统计均匀性,传统观点认为体胞尺寸与夹杂的尺寸比例应该选择在 10 1 到 100 1 之间。但对于含各向同性夹杂的体胞单元,这一比例尺寸要小的多。Drugan^[13~14]等人证明,对于随机分布且不相互重叠、大小相同的球形颗粒,5 1 的比例已经足够的大。而我们的数值结果表明,对于随机分布且不相互重叠、大小相同的立方体颗粒,不同样本中所得数值解在 6 1 的比例下已经表现出很小的分散性;而对于随机分布且允许重叠的立方体颗粒,7 1 的比例下数值解的分散性也已经很小。例如,我们利用模型 B 模拟了宏观应变载荷 $E_{(0)}$ 作用下不同样本中颗粒相平均应变 $\bar{\epsilon}_{(p)}$ 。计算结果表明,不同样本间各平均应变分量的标准差,如分量 $\bar{\epsilon}_{p,11}$ 的标准差 随着体胞尺寸和颗粒尺寸比例的增大逐渐接近于 0,如图 2 所示。

为确保单元体胞模型具有统计均匀性,对于模型 A 和模型 B,体胞尺寸与颗粒尺寸的比例选

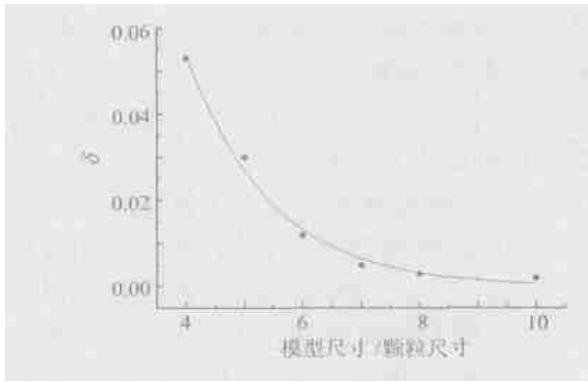


图2 样本标准差随着模型尺寸和颗粒尺寸比例的变化
Fig. 2 The variation of standard deviation with the model size to particle size ratio

为 40 7;而对于模型 C,体胞尺寸与颗粒尺寸的比例为 10 1。模型 A、B 和 C 均采用前处理程序 MSC/PATRAN 中的六面体八节点等参单元进行网格划分,且等参单元的总数均为 64 000。

在下面的部分中,将利用三维有限元模拟,对任意宏观载荷作用下,不同细观结构形态的代表性体积单元中这两组统计变量进行统计分析,以获取表征颗粒材料细观应变分布的统计参数。

4 数值统计分析

在线弹性理论框架下,利用有限元程序 MSC/NASTRAN 模拟 3 种多颗粒单元体胞模型

表 1 采用模型 A 模拟的复合材料颗粒内部应变场统计量

Table 1 Statistical parameters of stain field in particles for Model A

宏观变形	颗粒应变平均值						颗粒应变涨落	
	$\bar{p}_{.11}$	$\bar{p}_{.22}$	$\bar{p}_{.33}$	$\bar{p}_{.12}$	$\bar{p}_{.23}$	$\bar{p}_{.13}$	σ_p^2	$\sigma_p'^2$
E ₀	0.242	0.242	0.242	0.001	0.000	0.001	0.000	0.007
E ₁	0.411	-0.411	0.000	0.000	-0.001	0.001	0.000	0.006
E ₂	0.239	0.239	-0.478	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.005

表 2 采用模型 A 模拟的复合材料基体内部应变场统计量

Table 2 Statistical parameters of stain field in matrix for Model A

宏观变形	基体应变平均值						基体应变涨落	
	$\bar{m}_{.11}$	$\bar{m}_{.22}$	$\bar{m}_{.33}$	$\bar{m}_{.12}$	$\bar{m}_{.23}$	$\bar{m}_{.13}$	σ_m^2	$\sigma_m'^2$
E ₀	0.752	0.752	0.752	0.003	0.003	0.003	0.001	0.514
E ₁	0.862	-0.862	0.000	0.000	-0.005	0.005	0.023	0.152
E ₂	0.497	0.497	-0.993	0.001	-0.001	-0.001	0.024	0.142

表 3 采用模型 B 模拟的复合材料颗粒内部应变场统计量

Table 3 Statistical parameters of stain field in particles for Model B

宏观变形	颗粒应变平均值						颗粒应变涨落	
	$\bar{p}_{.11}$	$\bar{p}_{.22}$	$\bar{p}_{.33}$	$\bar{p}_{.12}$	$\bar{p}_{.23}$	$\bar{p}_{.13}$	σ_p^2	$\sigma_p'^2$
E ₀	0.257	0.257	0.257	0.000	0.001	0.000	0.001	0.026
E ₁	0.416	-0.417	-0.001	0.002	0.001	-0.002	0.001	0.016
E ₂	0.241	0.241	-0.482	0.000	0.001	0.001	0.001	0.017

在 3 种典型应变载荷作用下的细观应变场,统计分析第 2 部分中所给出的两组统计变量。由于模型 A 中颗粒规则分布,因此仅需 1 个样本,两组参数直接从计算所得的应变场获得。对于模型 B 和模型 C,分别随机选取 3 个样本并取平均值。

当采用模型 A 模拟时,颗粒及基体内应变场中各参数分别列于表 1 和表 2。可以看出,由于颗粒规则分布,3 种宏观应变载荷作用下颗粒应变涨落与颗粒应变平均值相比是个小量,可以忽略。并且,颗粒和基体内部的应变平均值与宏观应变载荷间分别存在如下关系

$$\bar{p}_{.i} = p_{.i} E_i, \bar{m}_{.i} = m_{.i} E_i, i = 0, 1, 2 \quad (9a)$$

$$p_{.1} = p_{.2}, m_{.1} = m_{.2} \quad (9b)$$

其中: $p_{.0}, p_{.1}, m_{.0}, m_{.2}$ 为常数,并且它们满足 Hill 协调条件

$$p_{.0} V_p + m_{.0} (1 - V_p) = 1 \quad (10a)$$

$$p_{.1} V_p + m_{.1} (1 - V_p) = 1 \quad (10b)$$

其中: V_p 是颗粒相的体积份数。

当采用模型 B 模拟时,统计结果分别列于表 3 和表 4。

由表 3、表 4 可以看出,在 3 种不同的典型宏观变形下,颗粒和基体内部的应变平均值部分仍然存在式(9)、式(10)的关系。由于颗粒的不规则

分布,颗粒、基体应变涨落与应变平均值相比不能再看作小量。同时,应变涨落 $(\epsilon_{p,0})^2, (\epsilon_{p,1})^2, (\epsilon_{p,2})^2$ 和 $(\epsilon_{m,0})^2, (\epsilon_{m,1})^2, (\epsilon_{m,2})^2$ 在不同样本中分别为常数,并且存在如下关系

$$(\epsilon_{p,1})^2 = (\epsilon_{p,2})^2, (\epsilon_{m,1})^2 = (\epsilon_{m,2})^2 \quad (11a)$$

$(\epsilon_{p,0})^2, (\epsilon_{p,1})^2, (\epsilon_{p,2})^2$ 和 $(\epsilon_{m,0})^2, (\epsilon_{m,1})^2, (\epsilon_{m,2})^2$ 也均为常数,并且存在如下关系

$$(\epsilon_{p,1})^2 = (\epsilon_{p,2})^2, (\epsilon_{m,1})^2 = (\epsilon_{m,2})^2 \quad (11b)$$

当采用模型 C 模拟时,统计结果分别列于表 5 和表 6。可以看出,式(9)~(11)所表示关系仍然存在。

此外,对于模量比为 5~25、颗粒体积份数为 10%~50% 的复合材料,模型 A、B 和 C 的模拟结果也表现出相同的统计规律^[15]。

从上述统计规律可以看出,当颗粒填充复合材料样本统计均匀时,存在依赖于微结构的常数 $\{\epsilon_{p,0}, \epsilon_{p,1}\}$ 或 $\{\epsilon_{m,0}, \epsilon_{m,1}\}$,它将颗粒相或基体相内部的平均应变与复合材料的平均应变线性联系在一起,可以被看成表征复合材料平均应变的统计参数。另外, $\{(\epsilon_{p,0})^2, (\epsilon_{p,1})^2, (\epsilon_{m,0})^2, (\epsilon_{m,1})^2\}$ 和 $\{(\epsilon_{p,0})^2, (\epsilon_{p,1})^2, (\epsilon_{m,0})^2, (\epsilon_{m,1})^2\}$ 保持为常数的事实表明,统计均匀的代表性体积单元在 3 种典型应

变载荷下的体积涨落应变和畸变涨落应变对应的宏观应变能部分分别保持不变。因此,它们表征应变涨落分布参数,并且定量地评估颗粒-基体以及颗粒-颗粒之间的相互作用程度。

图 3 展示了由模型 C 计算的颗粒填充复合材料中的上述统计参数随着颗粒体积份数和颗粒/基体弹性模量比的变化(体积涨落很小,未列出)。可以看出涨落应变的统计参数随着颗粒体积份数和弹性模量比升高而明显上升。在低颗粒体积份数和颗粒/基体模量比的情况下,涨落应变很小,对材料应变能和等效刚度的影响很小;但在高颗粒体积份数和高弹性模量比的情况下,涨落应变与应变平均值相比并不是个小量。这表明高颗粒体积份数和高弹性模量比引起的颗粒-基体以及颗粒-颗粒之间广泛的相互作用不可避免地材料整体性能产生了重要影响。

5 有效刚度验证与预测

当平均场理论中给定的假设,例如应变场和应力场分片连续假定都得到满足时,颗粒填充复的平均应变 $\bar{\epsilon}$,即

$$\bar{\epsilon} = A_p \bar{\epsilon} \quad (13)$$

表 4 采用模型 B 模拟的复合材料基体内部应变场统计量

Table 4 Statistical parameters of stain field in matrix for Model B

宏观变形	基体应变平均值						基体应变涨落	
	$\bar{\epsilon}_{m,11}$	$\bar{\epsilon}_{m,22}$	$\bar{\epsilon}_{m,33}$	$\bar{\epsilon}_{m,12}$	$\bar{\epsilon}_{m,23}$	$\bar{\epsilon}_{m,13}$	$\overline{\epsilon_m^2}$	$\overline{\epsilon_m'^2}$
E ₀	0.744	0.744	0.745	0.001	-0.001	0.000	0.001	0.421
E ₁	0.859	-0.858	0.001	0.004	0.006	-0.002	0.015	0.134
E ₂	0.496	0.495	-0.991	0.002	-0.002	0.001	0.016	0.130

表 5 采用模型 C 模拟的复合材料颗粒内部应变场统计量

Table 5 Statistical parameters of stain field in particles for Model C

宏观变形	颗粒应变平均值						颗粒应变涨落	
	$\bar{\epsilon}_{m,11}$	$\bar{\epsilon}_{m,22}$	$\bar{\epsilon}_{m,33}$	$\bar{\epsilon}_{m,12}$	$\bar{\epsilon}_{m,23}$	$\bar{\epsilon}_{m,13}$	$\overline{\epsilon_m^2}$	$\overline{\epsilon_m'^2}$
E ₀	0.286	0.289	0.285	0.001	0.001	0.000	0.001	0.074
E ₁	0.421	-0.421	0.000	0.001	0.001	-0.001	0.001	0.027
E ₂	0.243	0.245	-0.487	0.000	-0.001	0.000	0.001	0.029

表 6 采用模型 C 模拟的复合材料基体内部应变场统计量

Table 6 Statistical parameters of stain field in matrix for Model C

宏观变形	基体应变平均值						基体应变涨落	
	$\bar{\epsilon}_{m,11}$	$\bar{\epsilon}_{m,22}$	$\bar{\epsilon}_{m,33}$	$\bar{\epsilon}_{m,12}$	$\bar{\epsilon}_{m,23}$	$\bar{\epsilon}_{m,13}$	$\overline{(\epsilon_m)^2}$	$\overline{(\epsilon_m')^2}$
E ₀	0.729	0.727	0.730	0.000	-0.002	0.001	0.002	0.337
E ₁	0.856	-0.857	-0.001	0.000	0.003	0.001	0.008	0.109
E ₂	0.494	0.493	-0.989	0.001	0.000	-0.001	0.008	0.113

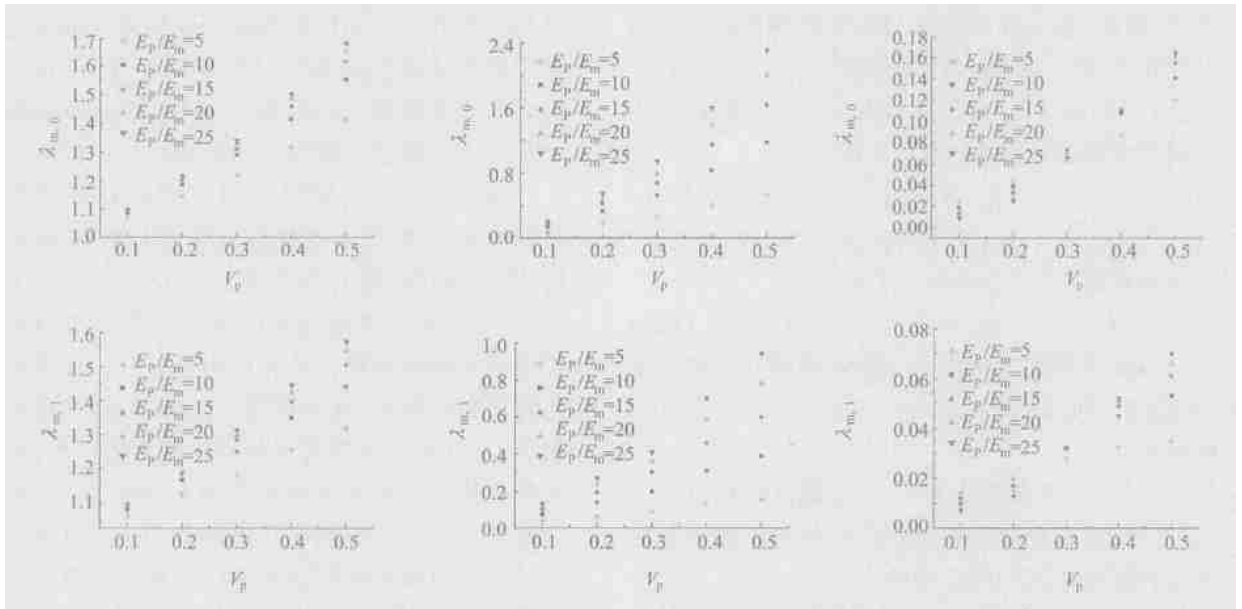


图3 颗粒填充复合材料中微观统计变量的变化规律
Fig. 3 Variations of statistical parameters

根据式(2)、式(4)和式(9),可知在宏观应变载荷 E 的主标架下, A_p表示为

$$A_p = \begin{matrix} p_{,0} E_0 \otimes E_0 + \\ p_{,1} E_1 \otimes E_1 + \\ p_{,1} E_2 \otimes E_2 \end{matrix} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12),复合材料有效剪切模量 G 和有效体积模量 K 可以写为

$$G = V_p G_p \quad p_{,1} + (1 - V_p) G_m \quad 1, m \quad (15)$$

$$K = V_p K_p \quad p_{,0} + (1 - V_p) K_m \quad 0, m \quad (16)$$

其中: K_p和 G_p为颗粒相的体积模量和剪切模量; K_m和 G_m为基体的体积模量和剪切模量。

另一方面,利用上述统计规律并结合式(4),颗粒填充复合材料刚度模量也可以通过能量共轭方法导出^[15]

$$G = \left[\frac{3}{2} K_p (p_{,1})^2 + G_p ((p_{,1})^2 + (p_{,1})^2) \right] V_p + \left[\frac{3}{2} K_m (m_{,1})^2 + G_m ((m_{,1})^2 + (m_{,1})^2) \right] (1 - V_p) \quad (17)$$

$$K = \left[K_p ((p_{,0})^2 + (p_{,0})^2) + \frac{2}{3} G_p (p_{,0})^2 \right] V_p + \left[K_m ((m_{,0})^2 + (m_{,0})^2) + \frac{2}{3} G_m (m_{,0})^2 \right] (1 - V_p) \quad (18)$$

为验证能量共轭方法的有效性和精确性,利用式(17)、(18)估计了一种颗粒/基体弹性模量比为 25,泊松比分别为 p = 0.23 和 m = 0.39 的特

定颗粒填充复合材料的等效杨氏模量,如图 4 中三角形所示。此外,Smith^[17]给出的等效弹性模量随颗粒体积份数变化的实验数据,如图中圆点所示。其他的理论结果,包括虚线表示的自治解、点画线表示的 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限解以及实线表示的 S. Nomura 的上下限解^[18]同样在图中展示。可以看出,相对于自治解,预测结果与实验结果更为吻合。因为颗粒和基体之间的界面被考虑成结合完好,预测结果比实验结果稍高。

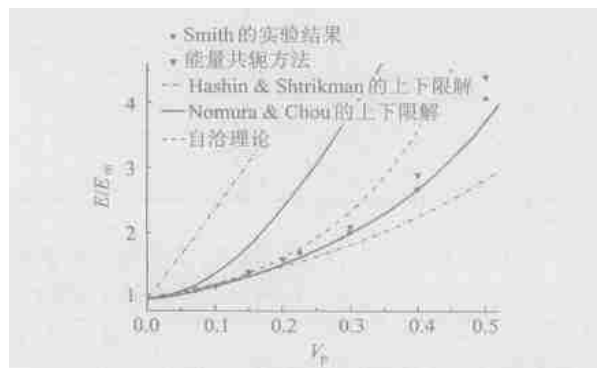


图4 本文预测结果与实验结果和其他理论结果的比较

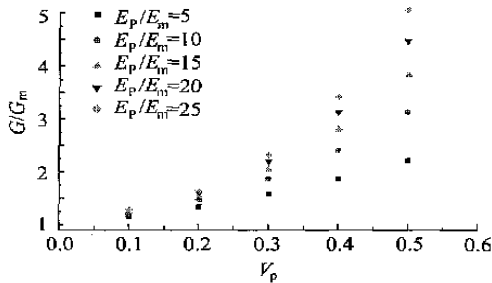
Fig. 4 The variation of E/E_m with V_p for E_p/E_m = 25, m = 0.39, p = 0.23

根据式(17)、(18),结合图 3 所示的统计参数,可以得出弹性模量比 25 以下、颗粒体积份数 50%以下、颗粒随机分布的颗粒填充复合材料的等效剪切模量和等效体积模量,如图 5 所示。

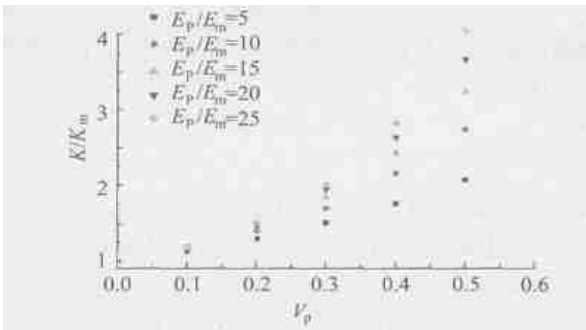
6 结论

对于颗粒形状任意、分布任意的宏观统计均

匀且各向同性的线弹性颗粒填充复合材料,存在普适性的细观应变分布特征。它们可以由一组统



(a) 等效剪切模量



(b) 等效体积模量

图 5 颗粒填充复合材料的等效剪切模量和等效体积模量

Fig. 5 The equivalent moduli of particulate-filled composite

计参数 $m_{(0)}$, $m_{(1)}$ 等来表征。这些统计参数独立于所施加的外载而仅依赖于填充颗粒体积分数、颗粒材料与基体材料的刚度比。统计各向同性颗粒复合材料的有效剪切模量和体积模量可以通过这些统计参数导出,且预测结果与实验结果吻合较好。

参 考 文 献

[1] Eshelby J D. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proc R Soc Lond A, 1957, 241:376 - 396.
 [2] Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials[J]. J Appl Mech, 1962, 29:143 - 150.
 [3] Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials[J]. J Mech Phys Solids, 1965, 13:223 - 227.
 [4] Mori T, Tanaka K. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions[J]. Acta Metall, 1973, 21:571 - 574.
 [5] Aboudi J. Micro-mechanical analysis of composites by the method of cells[J]. Appl Mech Rev, 1989, 42: 193 - 221.
 [6] Dong M, Schmauder S. Modelling of MMCs by a self-consistent embedded cell model[J]. Acta Metall Mater, 1996, 44: 2465 - 2478.
 [7] Weissenbek E, Bohm H J, Rammerstorfer F G. Microme-

chanical investigations of arrangement effects in particle reinforced metal matrix composites[J]. Comp Mater Sci, 1994 (3) : 263 - 278.
 [8] Borbely A, Biermann H, Hartmann O. FE investigation of the effect of particle distribution on the uniaxial stress-strain behaviour of particulate reinforced metal-matrix composites [J]. Mater Sci Eng A, 2001, 313: 34 - 45.
 [9] Segurado J, Llorca J. A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites [J]. J Mech Phys Solids, 2002, 50: 2107 - 2121.
 [10] Bohm H J, Eckschlager A, Han W. Multi-inclusion unit cell models for metal matrix composites with randomly oriented discontinuous reinforcements [J]. Computational Materials Science, 2002, 25: 42 - 53.
 [11] Hashin Z. Analysis of composite materials, a survey [J]. J Appl Mech, 1983, 50: 481 - 505.
 [12] Bohm H J, Han W. Comparisons between three-dimensional and two-dimensional multi-particle unit cell models for particle reinforced MMCs [J]. Model Simul Mater Sci Engng, 2001 (9) : 47 - 65.
 [13] Drugan W J, Willis J R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of the representative volume element size for elastic composites [J]. J Mech Phys Solids, 1996, 44: 497 - 524.
 [14] Drugan W J. Micromechanics-based variational estimates for a higher-order nonlocal constitutive equation and optimal choice of effective moduli of elastic composites [J]. J Mech Phys Solids, 2000, 48: 1359 - 1387.
 [15] 杨俊. 颗粒填充复合材料力学性能的数值研究[D]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2004.
 Yang J. Statistic regularity of strain distribution and stiffness prediction of particulate-filled composites [D]. Beijing: Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2004. (in Chinese)
 [16] Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials [M]. London: North Holland, 1993.
 [17] Smith J C. The elastic constants of a particulate-filled glassy polymer: comparison of experimental values with theoretical predictions [A]. In: Society of Plastics Engineers, EPS Div Meeting [C]. Akron, Ohio, 1975.
 [18] Nomura S, Chou T W. Bounds for elastic moduli of multi-phase short-fiber composites [J]. Transaction of the ASME, 1984, 51: 540 - 545.

作者简介:



杨 俊 (1979 -) 男, 硕士研究生, 主要从事固体力学方面研究。E-mail: yangj @lnm.imech. ac. cn

(责任编辑: 李铁柏)