

文章编号:1000-0887(2000)07-0679-07

颗粒增强复合材料相界面的动态应力分析*

陈建康^{1,2}, 黄筑平¹, 白树林³

(1. 非线性连续介质力学国家重点实验室,中科院力学所,北京 100080;

2. 扬州大学 水利与建筑工程学院,扬州 225009;

3. 北京大学 力学与工程科学系,北京 100871)

(程昌钧推荐)

摘要: 针对硬微粒填充高聚物复合材料因相界面脱粘开裂生成微孔洞的微损伤成核机制,取材料的代表体积单元进行动力分析,通过对粘弹性基体本构关系作 Laplace 变换建立了基本方程,并引入 Hankel 变换,得到了球对称动荷载作用下相界面应力变化规律的解析解,据此分析了惯性效应和粘性效应对界面脱粘的影响。

关键词: 流变材料; 动态应力; 界面脱粘; 微孔洞成核

中图分类号: O347.4;TB332 **文献标识码:** A

界面脱粘是粒子增强复合材料中微孔洞成核的主要原因之一。研究界面脱粘通常采用张应力准则^[1,2]或能量准则^[3,4],笔者在最近的研究中指出,无论采用何种准则,界面的应力分析是成核分析的关键步骤^[5]。在静载作用下,一般可采用 Mori-Tanaka 平均应力场理论和统计方法来计算界面应力。但在动荷载作用下,由于材料中应力波的传播规律非常复杂,难以得到界面应力的准确解。

作为此类材料动态应力成核机理的初步探讨,本文采用统计平均的方法分析相界面的动态应力波动规律,为此,取材料的代表体积单元为研究对象,通过 Laplace 变换将粘弹性基体材料的动力方程形式上以线弹性材料的动力方程写出,然后将动力问题的解分为两个问题解的叠加,其一是满足非齐次混合边界条件的准静态解,它可由弹性静力学的求解方法得到;其二是满足齐次混合边界条件的动态解,它可通过引入有限 Hankel 环变换可以得到。在用这种方法可以得到问题的解析解之后,本文进一步给出了相界面张应力的波动规律。通过比较界面应力的动态解与准静态解,本文讨论了惯性效应对相界面开裂的影响。

1 基本方程及其 Laplace 变换

取材料的代表体积单元(RVE)为研究对象,RVE 为球形胞体,其外半径为 b ,内含半径为 a 的同心球形粒子,且 a 与 b 的取值与粒子体积分数 f 之间满足 $f = a^3/b^3$,在球形胞体的外表面

* 收稿日期: 1999-02-01; 修订日期: 2000-03-08

基金项目: 国家自然科学基金资助重点项目和面上项目(19632030,19872008);扬州大学自然科学基金资助项目

作者简介: 陈建康(1957~),博士,副教授。

上作用有球对称张力 $\sigma(r, t)$ 。对于硬微粒填充高聚物复合材料,其粒子的刚度远高于基体的刚度,如碳酸钙粒子填充聚丙烯复合材料,粒子的刚度约为基体刚度的 50 倍,因而在分析中可近似地将粒子看成是刚性的。作为基体材料的高聚物,若假设 Poisson 比 ν 不随时间变化,则其本构关系可用线性粘弹性表示^[6]:

$$\sigma(r, t) = \int_0^t E(t-\tau) \left[\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{kk}(r, \tau) I + \frac{1}{1+\nu} \epsilon(r, \tau) \right] d\tau, \quad (1)$$

式中 $E(t)$ 为松弛模量。体积模量、剪切模量及其 Laplace 变换分别为

$$K_m(t) = \frac{E(t)}{3(1-2\nu)}, \quad G_m(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}, \quad (2a)$$

$$\bar{K}_m(s) = \frac{\bar{E}(s)}{3(1-2\nu)}, \quad \bar{G}_m(s) = \frac{\bar{E}(s)}{2(1+\nu)}. \quad (2b)$$

由于问题是球对称的,其运动方程在 Laplace 空间为:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\bar{r} - \bar{u}) = s^2 \bar{u}. \quad (3)$$

在 Laplace 空间基体材料的本构关系可以应力-位移关系的形式写成如下形式:

$$\bar{r} = s \left[\bar{K}_m + \frac{4}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + s \left[2 \bar{K}_m - \frac{4}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\bar{u}}{r}. \quad (4a)$$

$$\bar{\phi} = \bar{r} - \bar{u} = s \left[\bar{K}_m - \frac{2}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + s \left[2 \bar{K}_m + \frac{2}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\bar{u}}{r}. \quad (4b)$$

将上式代入(3)式得到

$$D(\bar{u}) = \frac{s}{L} \bar{u}, \quad (5a)$$

$$\text{式中 } D(\bar{u}) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \bar{u}, \quad (5b)$$

$$\bar{L} = \bar{K}_m + \frac{4}{3} \bar{G}_m. \quad (5c)$$

其边界条件为:

$$r = a, \quad \bar{u} = 0, \quad (6a)$$

$$r = b, \quad \bar{r} = s \left[\bar{K}_m + \frac{4}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + s \left[2 \bar{K}_m - \frac{4}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\bar{u}}{r} = -\bar{\phi}. \quad (6b)$$

问题就归结为(5)和(6)式所构成的定解问题,如能求解出该定解问题的解,再作其 Laplace 逆变换便得到原动力问题的解。

2 方程的解

设问题的解 \bar{u} 可分解为两部分,即

$$\bar{u}(r, s) = \bar{u}_1(r, s) + \sum_n \bar{d}_n(s) U_n(r), \quad (7)$$

式中 \bar{u}_1 满足 Laplace 变换意义下的准静态方程和非齐次边界条件:

$$D(\bar{u}_1) = 0, \quad (8a)$$

$$r = a, \quad \bar{u}_1 = 0, \quad (8b)$$

$$r = b, \quad s \left[\bar{K}_m + \frac{4}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + s \left[2 \bar{K}_m - \frac{4}{3} \bar{G}_m \right] \frac{\bar{u}_1}{r} = -\bar{\phi}. \quad (8c)$$

求解(8)式得到

$$\bar{u}_1(r, s) = \bar{c}_1(s) r + \frac{1}{r^2} \bar{c}_2(s), \quad (9a)$$

$$\bar{c}_1 = \frac{-}{s(3\bar{K}_m + 4f\bar{G}_m)}, \quad \bar{c}_2 = -\frac{a^3-}{s(3\bar{K}_m + 4f\bar{G}_m)}. \tag{9b}$$

根据 Christensen 的思路^[7], 再设(7)式中的 $U_n(r)$ 满足弹性体的特征值问题, 即

$$D(U_n) + k^2 U_n = 0, \tag{10a}$$

$$r = a, \quad U_n = 0, \tag{10b}$$

$$r = b, \quad \frac{\partial U_n}{\partial r} + h \frac{U_n}{r} = 0, \tag{10c}$$

式中 k 可根据以下讨论由 $r = b$ 上的边界条件确定, 而

$$h = \frac{2K - 4G/3}{K + 4G/3}, \quad K = \frac{E(0)}{3(1 - 2)}, \quad G = \frac{E(0)}{2(1 +)}, \tag{10d}$$

作变换

$$U_n(r) = r^{-1/2} A_n(r). \tag{11}$$

将上式代入(10a)得到

$$\frac{d^2 A_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_n}{dr} + \left[k^2 - \left(\frac{3/2}{r} \right)^2 \right] A_n = 0, \tag{12a}$$

$$A_n(a) = 0, \tag{12b}$$

$$\left(\frac{\partial A_n}{\partial r} \right)_{r=b} + h_1 A_n(b) = 0, \quad h_1 = \left(h - \frac{1}{2} \right) / b. \tag{12c}$$

(12a) 式是标准的 Bessel 方程, 其解为

$$A_n(r) = A_1 J_{3/2}(kr) + A_2 Y_{3/2}(kr), \tag{13}$$

式中 $J_{3/2}(kr)$, $Y_{3/2}(kr)$ 分别为第一、二类 $3/2$ 阶 Bessel 函数. 由边界条件(12b) 得到

$$A_n(r) = A_1 [Y_{3/2}(ka)J_{3/2}(kr) - J_{3/2}(ka)Y_{3/2}(kr)], \tag{14}$$

式中 A_1 为常数, 由于它可归并到 $D_n(t)$ 中, 此处可取 $A_1 = 1$. k 须利用边界条件(12c) 求得, 即由

$$h_1 [Y_{3/2}(ka)J_{3/2}(kb) - J_{3/2}(ka)Y_{3/2}(kb)] + k [Y_{3/2}(ka)J_{3/2}(kb) - J_{3/2}(ka)Y_{3/2}(kb)] = 0, \tag{15}$$

由上式可解出 $k = k_n (n = 1, 2, \dots)$. 因此,

$$U_n(r) = r^{-1/2} [Y_{3/2}(k_n a)J_{3/2}(k_n r) - J_{3/2}(k_n a)Y_{3/2}(k_n r)]. \tag{16}$$

这样, 由 $\bar{u} = \bar{u}_1 + \sum_n \bar{d}_n U_n$ 所构成的解满足所有的边界条件, 剩下的问题是确定适当的 \bar{d}_n , 使其满足方程(5a). 将 \bar{u} 代入该式得到

$$D(\bar{u}_1) + \sum_n \bar{d}_n D(U_n) = \frac{s}{L} (\bar{u}_1 + \sum_n \bar{d}_n U_n). \tag{17}$$

利用(7a), (9a)的结果, 并令

$$W(r) = r^{3/2} - a^3 r^{-3/2}, \tag{18}$$

得到

$$\left(s + k_n^2 L \right) \bar{d}_n A_n = -s c_1 W. \tag{19}$$

为能求出 $\bar{d}_n(s)$, 现定义有限 Hankel 环变换:

$$W^*(k_n) = H[W(r)] = \int_a^b r W(r) A_n(r) dr. \tag{20a}$$

其逆变换为^[8]:

$$W(r) = H^{-1}[W^*(k_n)] = \sum_n \frac{W^*(k_n)}{F(k_n)} A_n(r), \tag{20b}$$

式中

$$F(k_n) = \frac{2 J_{3/2}(k_n a) \left[h_1^2 + k_n^2 \left(1 - \left(\frac{3}{2 k_n b} \right)^2 \right) \right] - [k_n J_{3/2}(k_n b) + h_1 J_{3/2}(k_n b)]^2}{k_n^2 [k_n J_{3/2}(k_n b) + h_1 J_{3/2}(k_n b)]^2}. \tag{20c}$$

将(20)式代入(19)式得到

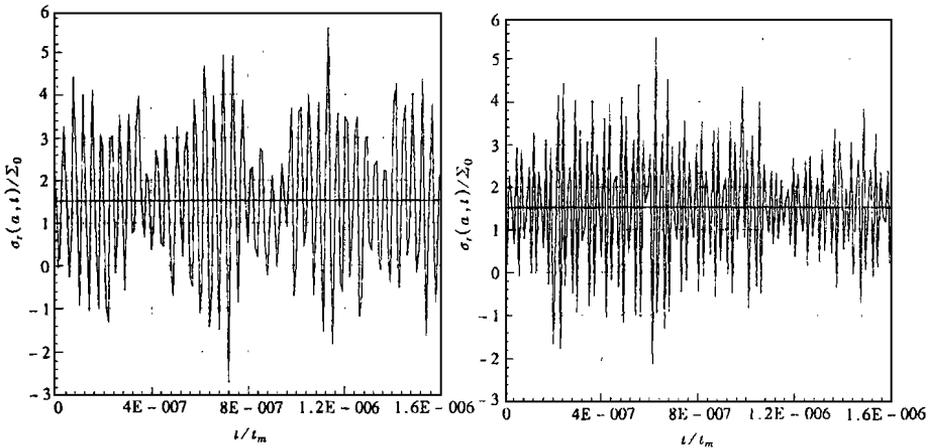
$$\bar{d}_n(s) = \bar{c}_{3n}(s) \frac{W^*(k_n)}{F(k_n)}, \quad \bar{c}_{3n}(s) = - \frac{s}{s + k_n^2 L} \bar{c}_1(s). \tag{21}$$

如果 $\bar{c}_1(s)$, $\bar{d}_n(s)$ 逆变换存在且分别为 $c_1(t)$, $d_n(t)$, 则位移解为:

$$u(r, t) = c_1(t) \left[r - \frac{a^3}{r^2} \right] + \sum_n d_n(t) r^{-1/2} [Y_{3/2}(k_n a) J_{3/2}(k_n r) - J_{3/2}(k_n a) Y_{3/2}(k_n r)]. \tag{22}$$

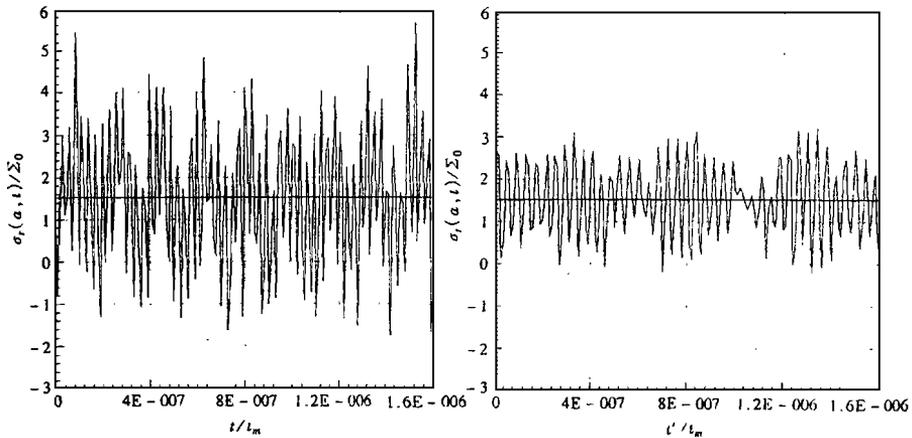
3 界面法向应力

在 Laplace 空间, 由(2), (4) 可得界面的法向应力表达式为



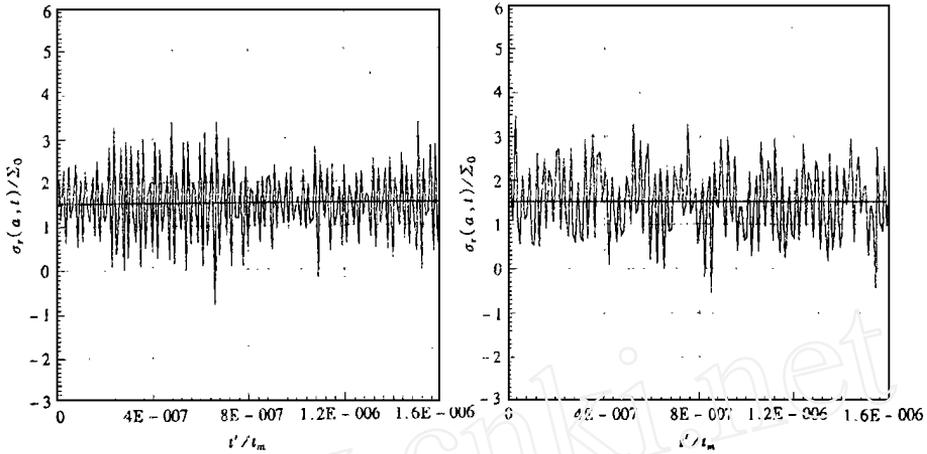
(a) $a = 2\mu\text{m}$

(b) $a = 6\mu\text{m}$



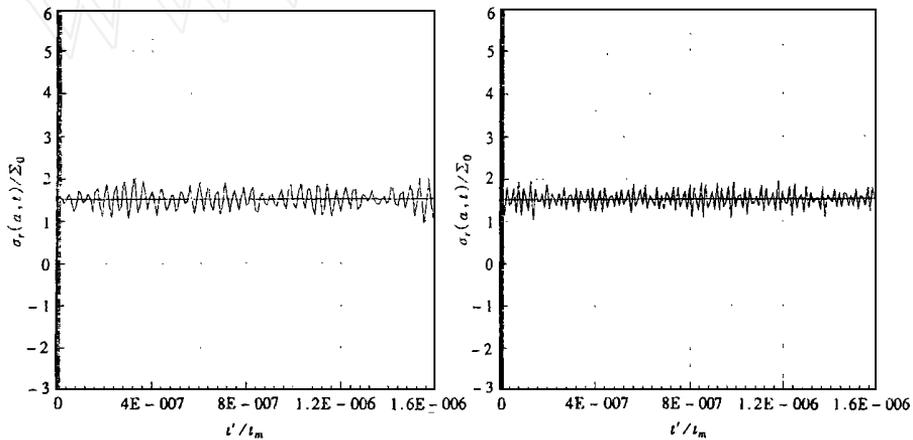
(c) $a = 10\mu\text{m}$

(d) $a = 2\mu\text{m}, t'/t_m = t/t_m - 4$



(e) $a = 6\mu\text{m}$, $t/t_m = t'/t_m - 4$

(f) $a = 10\mu\text{m}$, $t/t_m = t'/t_m - 4$



(g) $a = 2\mu\text{m}$, $t/t_m = t'/t_m - 12$

(h) $a = 6\mu\text{m}$, $t/t_m = t'/t_m - 12$

$$\bar{\sigma}_r(a, s) = sE \left[\frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} \quad (23)$$

对上式作逆变换得

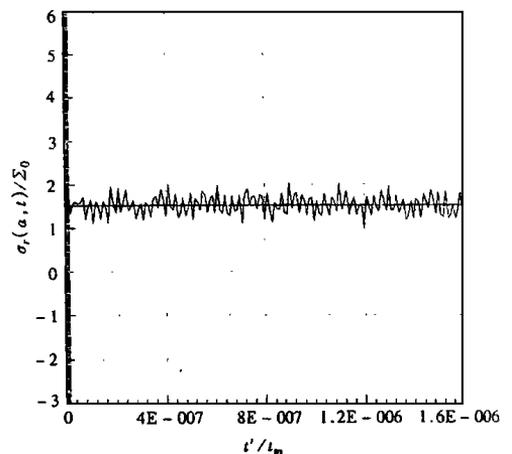
$$\sigma_r(a, t) = \frac{t}{t_m} E(t - \frac{t}{t_m}) \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (24)$$

现考虑基体为标准线性固体 ($E(t) = E_2 + E_1 \exp(-t/t_m)$), 在胞体外边界作用阶跃荷载的情形, 即

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot H(t), \quad (25)$$

式中 $\sigma_0 H(t)$ 为单位阶跃荷载, 取

$$t_m = 5\text{s}, \quad f = 0.1, \quad E_1 = 1.0 \times 10^8 \text{Pa}, \\ E_2 = 5.0 \times 10^8 \text{Pa}, \quad \nu = 0.3,$$



(i) $a = 10\mu\text{m}$, $t/t_m = t'/t_m - 12$

图1 界面应力波动规律

计算得界面法向应力随时间变化规律如图(a)~(i)所示。

4 讨论和结论

图1(a)~(c), (d)~(f), (g)~(i)分别给出了粒径为 $a = 2\mu\text{m}, 6\mu\text{m}, 10\mu\text{m}$ 的界面应力在不同时刻随时间的变化规律, 分析计算结果可得出如下结论:

1) 在阶跃荷载作用下, 界面应力有强烈的波动效应, 并且具有波动频率快和应力峰值高的特点, 最大的应力幅值远大于准静态解。从粒径为 $2\mu\text{m}$ 的算例中可见(图(a)), 准静态解为 $\sigma_{rs}(a) = 1.521 \sigma_0$, 而动力解的最大应力峰值为 $\max\{\sigma_r(a, t)\} = 5.6 \sigma_0$, 考虑惯性效应的动力解是不考虑惯性效应的准静态解的3.6倍。由此可见, 如果界面脱粘由界面应力控制, 则在动荷载作用下界面更容易脱粘, 说明由准静态解的结果计算得到的界面脱粘的粒子数较少, 从而会过高地估计材料的宏观模量。

2) 由于材料中的粘性效应, 基体中的应力波在传播过程中随着时间的推移会衰减, 因而界面应力波动的幅值随时间而下降。图(a)~(c)给出了粒径为 $2\mu\text{m}$ 的粒子界面应力随时间衰减的曲线。在图(a)中(在 $t = 0$ 的极短瞬间), 界面应力的最大应力峰值为 $5.6 \sigma_0$, 而在图(b) (在 $t = 4t_m$ 的极短瞬间) 和图(c) (在 $t = 12t_m$ 的极短瞬间) 中, 界面应力的最大应力峰值分别为 $3.2 \sigma_0$ 和 $2.0 \sigma_0$ 。这是粘弹性材料区别于其它材料的显著特点之一。这也表明在阶跃荷载作用下, 如果界面脱粘由界面应力控制, 则在加载初始阶段界面易脱粘, 而随着时间的推移, 由于应力松弛界面应力波动峰值下降, 使界面不易脱粘。

3) 在粒子体积分数 f 给定的条件下, 不同的粒径对界面应力的波动峰值的影响并不明显。图(a), (d), (g) 给出加载初始瞬间粒径分别为 $a = 2\mu\text{m}, 6\mu\text{m}, 10\mu\text{m}$ 粒子界面应力的波动规律。三幅图的最大峰值基本相同, 约为 $5.6 \sigma_0$ 。在 $t = 4t_m$ 的极短瞬间, 以上三种粒径粒子界面应力最大峰值也基本相同, 图(b), (e), (h) 的曲线表明最大峰值约为 $3.5 \sigma_0$ 。同样, 图(c), (f), (i) 的计算结果显示, 在 $t = 12t_m$ 的极短瞬间, 三种粒子界面应力的最大峰值约为 $2.0 \sigma_0$ 。但应说明, 当材料中含有大量粒子夹杂时, 即使是粒子体积分数给定, 不同粒径的粒子界面应力波动情况也并不相同且难以精确求解, 本文所给的这些结论是在对材料作了平均化处理以后得到的。它们对理解惯性效应和粘性效应在高三轴度应力作用下的含夹杂复合材料的界面开裂中的作用问题是有帮助的。

致谢 夏维城教授就本文工作和笔者作了有益的讨论, 并提出具体的修改建议, 笔者谨致谢意。

陈至达教授生前审阅了本文, 并提出修改意见, 笔者谨以此文表达对陈至达教授的深深的敬意和悼念之情。

[参 考 文 献]

- [1] 黄筑平, 杨黎明, 潘客麟. 材料的动态损伤和失效[J]. 力学进展, 1993, 23(4): 433~467.
- [2] Tanaka K, Mori T, Nakamura T. Cavity Formation at the interface of a spherical inclusions in a plastically deformed matrix[J]. Phil Mag, 1970, 21(170): 267~279.
- [3] Argon A S. Cavity formation from inclusions in ductile fracture[J]. J Im Metall Trans, 1975, 6A(5): 825~837.
- [4] Goods S H. Brown L M. The nucleation of cavities by plastic deformation[J]. Acta Metall, 1979, 27

- (1) :1 ~ 15.
- [5] 陈建康,黄筑平,白树林,等. 微粒填充流变材料界面开裂的局部临界应力及其尺寸效应[J]. 固体力学学报,1999,20(1) :1 ~ 8.
- [6] Alpter S, Kobayashi. Handbook on Experimental Mechanics[M]. New Jersey: Prentice-Hall,INC, 1984,30 ~ 40.
- [7] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity[M]. New York: Academic Press,1982,158 ~ 239.
- [8] Cinelli G. An extension of the finite Hankel transform and applications[J]. Int J Engng Sci,1965,3(5) :539 ~ 559.

Dynamic Stress Analysis of the Interface in a Particle-Reinforced Composite

Chen Jiankang^{1,2}, Huang Zhuping¹, Bai Shulin³

(1. State Key LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy
of Sciences, Beijing 100080, P R China;

2. Yangzhou University, Yangzhou 225009, P R China;

3. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking
University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: The analysis of the dynamic stress on the particle-matrix interface in particle-reinforced composite for the reason that this stress may lead to the microvoids' nucleation due to the interfacial debonding were studied. For simplification, the representative volume element (RVE) was taken as an analysis model. The Laplace transformation was used to derive the basic equations, and the analytical solutions were obtained by means of Hankel transformation. Moreover, the influences of the inertia and viscosity on the debonding damage were also discussed.

Key words: rheological material; dynamic stress; interface debonding; microvoids' nucleation