

# 可压缩尖锥边界层湍流的直接数值模拟

李新亮\*, 傅德薰, 马延文

中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080

\* E-mail: lixl@lnm.imech.ac.cn

收稿日期: 2006-06-20; 接受日期: 2007-04-03

国家自然科学基金(批准号: 10632050, 10502052)资助项目

**摘要** 采用高精度差分方法对来流马赫数 0.7, 来流 Reynolds 数 250000/Inch, 锥角为 20°的尖锥边界层的整个空间转捩过程进行了直接数值模拟. 对流项采用了 7 阶迎风格式离散, 黏性项采用 6 阶中心格式离散, 时间推进为 3 阶 Runge-Kutta 方法. 对转捩形成的充分发展湍流进行了统计分析, 包括平均速度分布, 近壁湍流强度和雷诺应力等统计数据与平板边界层理论及实验吻合很好, 验证了结果的正确性. 显示了近壁湍流的典型拟序结构——高、低速条带结构并根据流向速度的周向相关量确定了条带的间距, 以当地壁面尺度度量的条带间距沿流向并没有显著变化. 给出了柱坐标下的可压湍动能发展方程, 并据此对近壁湍动能的生成、耗散和输运机制进行了分析.

**关键词**

尖锥  
边界层湍流  
直接数值模拟  
湍动能

飞行器边界层内的流动直接决定了飞行器的气动力和气动热布局, 因而边界层湍流及其转捩的机理问题成为飞行器气动设计中需要解决的重要问题. 由于航空航天领域的需求, 人们针对飞行器边界层流动的转捩过程进行了大量的飞行实验和风洞实验(见文献[1]的综述), 其中不少 20 世纪(30 年前的)的实验资料已经解密. 这些实验的主要内容之一是测量转捩点, 但不同的实验之间, 特别是飞行实验与风洞实验之间仍存在较大的差距<sup>[1]</sup>. 作为一种飞行器的典型外形, 尖锥边界层湍流及其转捩的机理一直是航空航天领域非常关注的问题, 在这方面 NACA/NASA 进行了大量实验研究<sup>[2-4]</sup>.

随着数值计算技术的提高和计算机功能的增强, 直接数值模拟成为研究其湍流及转捩机理的重要手段. 由于流动的复杂性, 目前可压边界层湍流的直接数值模拟主要是针对平板边界层湍流, 其中又以时间模式为主<sup>[5,6]</sup>. 时间模式假设流向具有周期性, 并采用等效驱动力来模拟边界层厚度沿流向的变化. 时间模式引入了人为假设, 与实际流动之间存在一定差距. 另外时间模式只能应用于象槽道、平板边界层等相对简单的流动, 而无法应用于象锥体或钝体边界层湍流这样相对复杂的流动.

Rai 等人<sup>[7]</sup>采用空间模式对来流马赫数 2.25 的可压平板边界层湍流进行了直接数值模拟,

该数值模拟采用了 5 阶精度的迎风差分方法和 6 阶中心差分格式, 其结果与实验基本吻合. Pirozzoli 等人<sup>[8]</sup>对同一流动进行了直接数值模拟, 其数值模拟采用 7 阶 WENO 格式模拟无黏项, 4 阶紧致格式模拟黏性项. 文献[8]通过算例分析了网格分辨率及格式精度对计算结果的影响, 发现平均速度剖面对网格分辨率和格式精度十分敏感. 由于该文无黏项采用了更高阶的差分格式, 其结果可靠性更高. 文献[8]还对Morkovin理论和Reynolds比拟进行了验证, 指出, 在该来流 Mach 数(2.25)下, Morkovin 理论仍然成立, 而总温的脉动是无法忽略的. 王新军等人<sup>[9]</sup>采用数值模拟的方法对槽道湍流的转捩过程进行了研究, 发现平均速度分布的改变在转捩过程中发挥了重要作用. Gao 等人<sup>[10]</sup>也进行了来流马赫数 2.25 的平板边界层湍流的直接数值模拟, 并对转捩过程进行了分析, 指出该转捩过程为 Bypass 型转捩, 而展向非对称扰动是诱发该 Bypass 转捩的重要原因. 李新亮等人<sup>[11]</sup>进行了来流 Mach 数 6.0 可压缩钝楔边界层转捩到湍流的直接数值模拟, 指出流向曲率的影响, 曲率间断点上游的转捩过程受到明显抑制. Li 等人<sup>[12]</sup>采用 7 阶精度的 WENO 格式对来流马赫数为 6.0 的平板边界层湍流进行了直接数值模拟. 与同样来流马赫数的钝楔边界层相比, 由于没有头激波的保护, 平板的边界层外缘马赫数更高, 因而压缩性效应更为明显.

本文对  $20^\circ$  锥角的尖锥边界层湍流及其转捩问题进行了直接数值模拟, 来流马赫数为 0.7, 来流雷诺数为 250000/Inch, 扰动形式为壁面上的吹吸扰动. 对湍流进行了统计分析, 发现包括平均速度分布、近壁湍流强度和雷诺应力等统计数据与平板边界层吻合很好, 说明周向曲率对近壁湍流特性的影响较小. 显示了近壁湍流条带结构并根据流向速度的周向相关量确定了条带间距, 且以当地壁面距离度量的条带间距沿流向并没有显著变化. 通过速度梯度张量第二不变量的等值面, 展示了转捩过程中形成的发卡涡结构. 给出了柱坐标下的可压湍动能发展方程, 并据此对近壁湍动能的生成、耗散和输运机制进行了分析.

## 1 数值计算

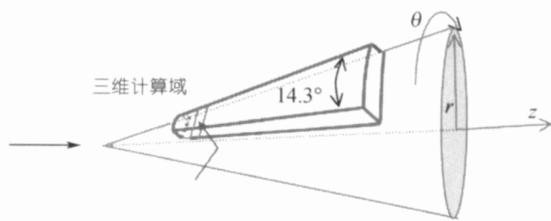


图 1 尖锥及数值模拟的计算域示意图

模型如图 1, 尖锥表面上有一层很薄的边界层, 当 Reynolds 数足够高并在扰动作用下, 边界层内的流动将发生转捩, 由稳定的层流发展到湍流. 本文对转捩过程进行直接数值模拟, 扰动源为壁面上的吹吸扰动. 首先进行二维轴对称计算, 得到稳定的轴对称流场, 为三维计算提供初值、入口及外边界条件. 图 2 为二维轴对称计算的计算域(由于  $r > 0$ , 实际计算域为该图上半部分( $y > 0$  的部分), 这样画图是为了直观显示). 由于本文计算的是亚音速流动, 扰动的影响区域较大, 因而计算域也较为广阔. 为了避开尖锥头部的奇性, 对尖锥头部进行了光滑, 其头部不再尖锐而是一个半径为  $R$  的小圆. 参照实验中真实尖锥头部的小圆半径的量级, 本文给定  $R=0.15$ (如无特殊说明, 本文的长度均以英寸为特征长度进行无量纲化).

二维轴对称计算发现, 在一定的工况下, 头部边界层内会有涡脱落下来, 从而对下游边界

层的转捩产生一定影响, 这是一种前缘效应. 另外, 前缘的钝度也会对转捩位置产生较大影响<sup>[13]</sup>. 作者将在后续研究中探讨前缘效应对转捩的影响. 在本文的计算中, 扰动来自壁面的吹吸运动, 由于这种扰动比来自前缘的涡脱落扰动强得多, 因而可以忽略前缘效应的影响. 本文对二维轴对称计算进行时间平均, 得到稳定流场, 由此提供三维计算的初值、入口边界条件及外边界条件.

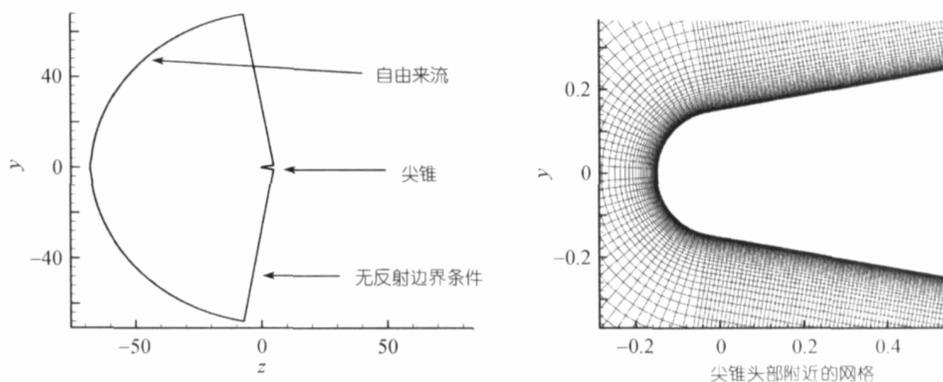


图 2 二维轴对称计算的计算域、边界条件及尖锥头部附近的网格

计算参数及网格参数见表 1, 来流 Mach 数为 0.7, 来流 Reynolds 数(以英寸为特征长度)为 250000, 以动量厚度( $z = 2.5$  处)度量的 Reynolds 数为  $Re_\theta = 877$ . 计算域及计算网格如图 1 和 3, 三维计算的计算域为  $1.22 \leq z \leq 4.14$ ,  $\eta_{\max} = 0.225$ ,  $0 \leq \theta \leq 0.25$ , 其中  $\eta$  为到壁面的垂直距离. 在本文中, 长度均以英寸 Inch 无量纲化. 由于受计算量的限制, 在周向没有计算整个圆周而是在计算了  $0.25 \text{ rad}$ (约合  $14.3^\circ$ ), 周向两点相关分析显示, 这样的周向的计算域已经足够了. 计算网格为  $1050 \times 100 \times 200$ (流向  $\times$  法向  $\times$  周向), 沿流向  $z > 3.1$  后逐渐采用较粗的网格作为缓冲

表 1 计算参数及网格参数

$M_\infty$	$Re_\infty$	$T_w$	$Re_\theta$	$N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta$	$\Delta\xi^+ \times \Delta\eta_w^+ \times \Delta\zeta^+$
0.7	250000	1.098	877	$1050 \times 100 \times 200$	$19 \times 1.2 \times 6.8$

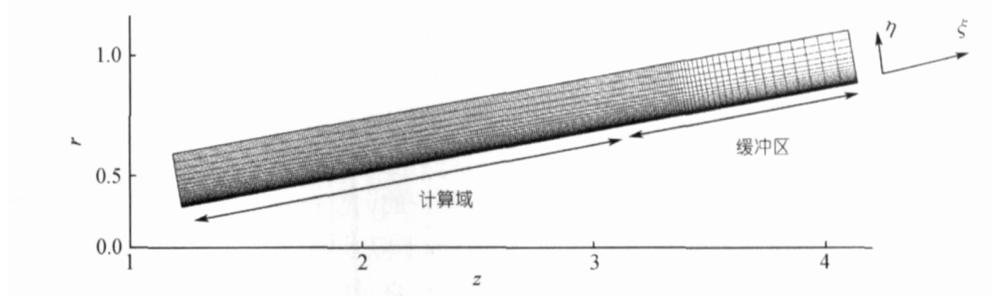


图 3 三维计算网格示意图(轴截面)

区, 以消除出口边界条件对我们感兴趣区域的影响. 在计算区, 网格沿流向基本均匀分布, 网格跨度为  $\Delta\xi^+ \approx 19$ ; 法向距壁面第一个网格跨度为  $\Delta\eta_w^+ = 1.2$ ; 周向网格跨度( $z = 2.5$  处的壁面上)为  $\Delta\zeta^+ = 6.8$ .

数值计算采用柱坐标  $(r, \theta, z)$  可压 N-S 方程, 以  $\rho, u_r, u_\theta, u_z, T$  为基本变量. 通过 Jacobian 变换:  $r = r(\xi, \eta), z = z(\xi, \eta)$  变换到贴体旋转坐标系  $(\xi, \eta, \theta)$  进行求解. 这样做是为了便于利用各物理量在  $\theta$  方向的周期条件, 如果直接将直角坐标 N-S 方程变换到贴体坐标使用, 则周向的周期条件比较复杂. 转捩的扰动源为  $1.5 \leq z \leq 1.8$  处壁面的吹吸扰动, 扰动形式见文献[7,8]. 该扰动包含 10 个周向波数和 5 个时间模态, 扰动振幅为  $A = 0.2$ , 基频为  $\beta = 2.0$ .

数值计算采用差分法, 无黏项进行流矢量分裂后采用 7 阶迎风偏斜格式进行离散, 黏性项采用 6 阶中心差分格式进行离散, 时间推进采用 3 阶 TVD 型 Runge-Kutta 方法计算.

入口和外边界的物理量均为给定值, 其值由二维(轴对称)计算得到的定常流给出. 由于外边界条件并非无反射边界条件, 可能会带来数值扰动的非物理反射, 因而本文的计算域在法向选取了较长距离(法向计算域约 6~7 个边界层厚度). 在本问题中, 扰动主要集中在边界层内部, 外边界的扰动很小. 实际计算显示, 由外边界条件带来的数值扰动并不明显.

出口采用无反射边界条件, 具体做法是流通量分裂后, 假设流入计算域通量的导数为零, 而流出计算域通量的导数由边界点和内点做单边差分给出. 当然, 在亚音速情况下, 这种处理有一定误差, 因为亚音速时扰动是可以向上游传播的. 但作者发现, 对于边界层流动, 数值扰动向上游传播的区域不大<sup>[11]</sup>; 另外, 在本计算中, 作者在出口附近的一段区域采用较粗的网格作为缓冲区, 以消除出口边界条件对内部区域的影响.

在中国科学院网络信息中心超级计算中心的资助下, 作者已将本数值计算代码集成到作者开发的高精度计算流体力学软件“复杂流动的直接数值模拟”(Haom-OpenCFD)中. 该软件采用高精度差分格式对可压 N-S 方程进行求解, 包含了直角坐标、柱坐标、球坐标、任意曲线坐标及旋转贴体坐标可压 N-S 方程求解器. 同时, 该软件集成了目前流行的多种高精度差分格式(包括各阶中心差分格式、迎风差分格式、紧致型差分格式、WENO 类差分格式等)和具有自己特色的若干差分格式(如迎风紧致<sup>[14]</sup>度控制型差分格式等<sup>[15,16]</sup>). 软件采用 MPI-Fortran90 编写, 支持并行计算并针对机群系统进行了通信优化.

## 2 结果验证及流场分析

数值计算在中国科学院超级计算中心的联想深腾 6800 并行机上采用 20 节点计算(每个节点使用 2 个 CPU), 约 3.7 s/步. 计算到  $t = 8.0$  后达到统计平衡态, 保留了  $t = 8.7 \sim 12.1$  时刻的 35 个流场, 对其进行了统计平均. 如不做特别解释, 本文的“平均”指沿周向平均后再对这 35 个流场进行时间平均.

图 4 为摩擦系数沿轴向的分布, 可以看出, 随着转捩的进行, 摩擦系数的明显升高.

图 5 为  $x = 2.5$  处的平均速度及 Van Direst 变换后的平均速度<sup>[8]</sup>沿壁面法向的分布. 可以看出, 平均速度与 Van Direst 变换后的平均速度差距很小, 这是因为本文计算的来流 Mach 数较低, 壁面温度与来流温度相差较小, 平均密度沿法向的变化较小, 其中虚线表示壁面律和对数

律, 可以看出速度分布符合壁面律和对数律. 图 5 中的对数律为  $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \eta^+ + C$ , 其中  $\kappa = 0.41$ ,  $C = 5.5$ , 与文献[7]中平板湍流对数率的系数相同. 由于本文计算的尖锥边界层厚度与壁面曲率半径相比很小, 所以流动的速度剖面很接近平板湍流.

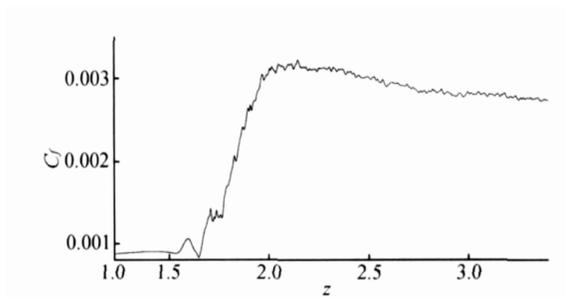


图 4 摩擦系数沿轴向分布

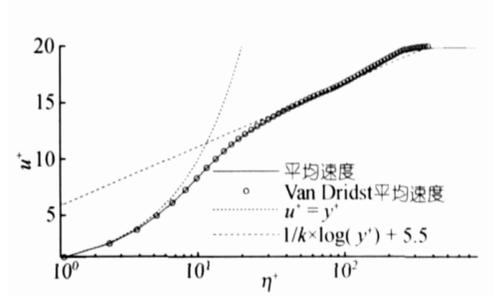


图 5  $z = 2.5$  处的平均速度分布

图 6 为  $z = 2.25$  处距壁面不同距离处扰动量的周向两点关联函数, 可以看出, 随着周向距离的增加, 速度、密度和温度扰动量的两点周向相关函数很快衰减; 达到一定的周向距离后各扰动量的两点周向相关函数已经充分小, 说明本文周向计算域的选取是足够的. 图 7 为平均速度归一化的脉动速度均方根  $u'_{rms} / \bar{u}$ ,  $v'_{rms} / \bar{u}$ ,  $w'_{rms} / \bar{u}$  的分布. 图 7 中的符号为不可压平板边界层的实验结果<sup>[7,17]</sup>. 从图 7 中可以看出计算结果与实验结果吻合较好, 这是由于近壁处的湍流马赫数较低, 压缩性效应不明显. 图 8 为  $x = 2.5$  处归一化剪应力  $-\overline{u'v'}/u_\tau^2$  分布, 其中符号为不可压

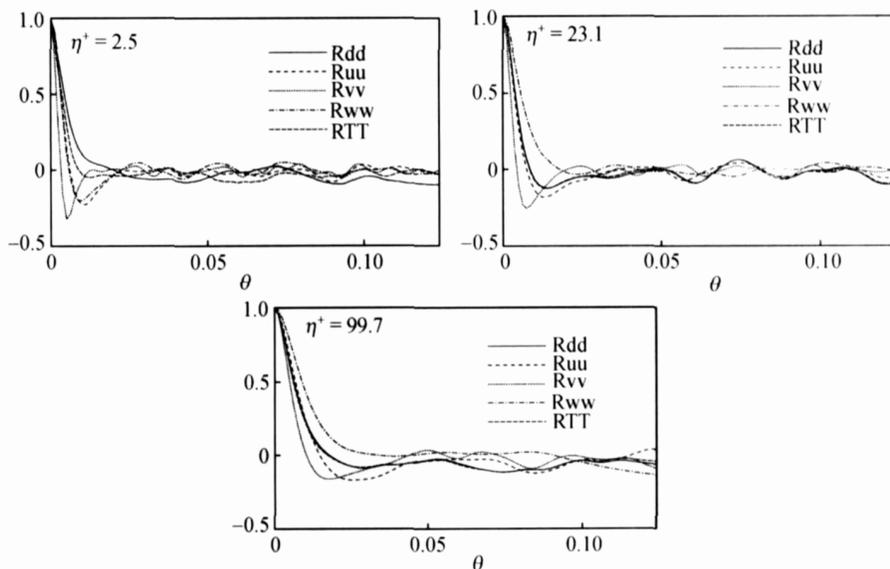


图 6  $z = 2.25$  处的周向两点相关量

Rdd 示密度; Ruu 示流向速度; Rvv 示法向速度; Rww 示展向速度; RTT 示温度扰动量的周向两点相关函数

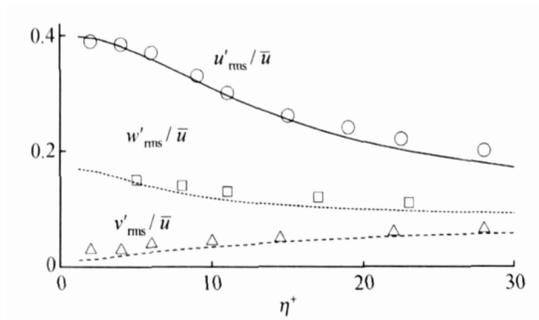


图 7  $z = 2.5$  处的脉动速度均方根分布

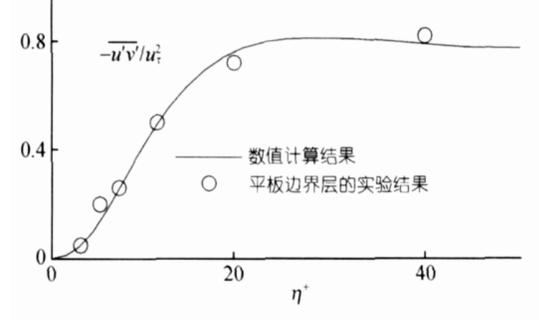


图 8  $z = 2.5$  处的剪切应力分布

平板边界层的实验结果<sup>[7,17]</sup>, 可以看出两者吻合很好.

图 9 平行壁面截面上的流向速度分布, 可以看出, 在近壁区, 流向速度呈明显的高-低相间的条带分布, 这种条带结构是近壁湍流的典型拟序结构. 随着距壁面距离的增加, 这种流向速度的条带结构逐渐消失. 锥体的周长会沿流向逐渐增加, 近壁的条带间距是否也会随之增加呢? 由于计算域有限, 这个问题从图 9 中不易明显地看出, 但可以根据两点周向相关曲线来定量测定条带的平均间距. 图 10 为  $z = 2.28, 2.50, 2.73, 2.97$  处流向速度的两点周向相关量, 其中法向位置均为距壁面  $\eta = 0.00027$  (以  $z = 2.50$  处的壁面量为  $\eta^+ = 2.5$ ), 横坐标  $\zeta^+ = \zeta/l^*$  为用当地壁面尺度度量的周向距离,  $l^* = \bar{\mu}_w / (\bar{\rho}_w \sqrt{\tau_w / \bar{\rho}_w})$  为壁面尺度. 从图 10 中可以看出, 该曲

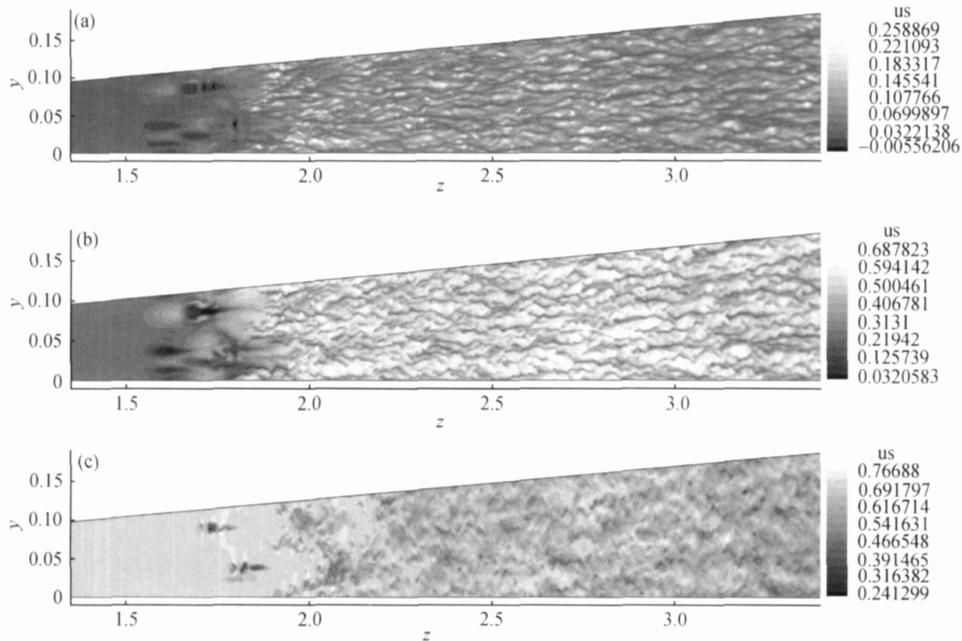


图 9 距离壁面不同位置处的流向速度分布

(a)  $\eta^+ = 2.5$ ; (b)  $\eta^+ = 23.1$ ; (c)  $\eta^+ = 99.7$ ; us 示流向速度分量

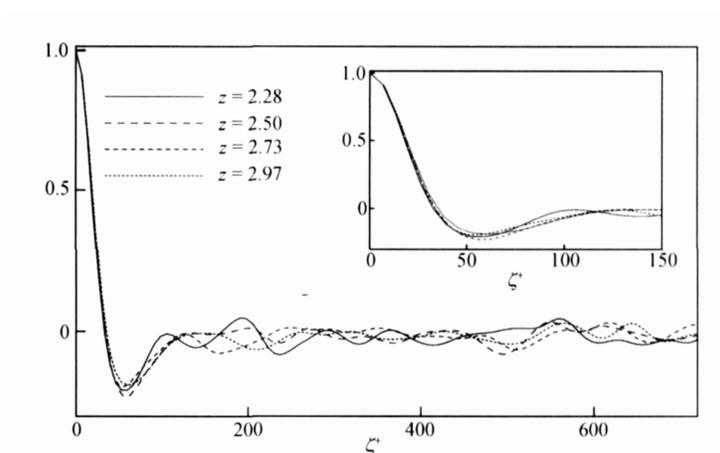


图 10 流向速度的两点周向相关量

线的最小值出现在  $s^+ = 60$  左右, 这说明近壁高速-低速条带之间的间隔约为  $s^+ \approx 60$ , 由此可知两个高速或低速条带之间的间距约为 120 个壁面长度. 以当地壁面尺度度量的条带间距沿流向并没有显著变化. 而由于锥体的周长沿流向逐渐增加, 由此作者推测近壁条带的数目沿流向会逐渐增加.

图 11~13 分别为垂直于流向剖面、轴截面以及平行于壁面的剖面上的密度分布, 从中可以看出边界层外缘的间歇性, 即边界层外缘处呈层流-湍流交替控制的一种状态, 湍流区与边界层外的层流区之间有明显的界面.

图 14(a) 为流场中速度梯度张量第二不变量  $Q^+ = 0.005$  的等值面, 其中  $Q^+ = Q/(U_\tau/l^*)^2$ ,  $U_\tau$  和  $l^*$  分别为  $z = 2.5$  处的壁面摩擦速度及壁面尺度.  $Q = II \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}$  为速度梯度张量的第二不变量. 通常认为, 速度梯度张量第二不变量的

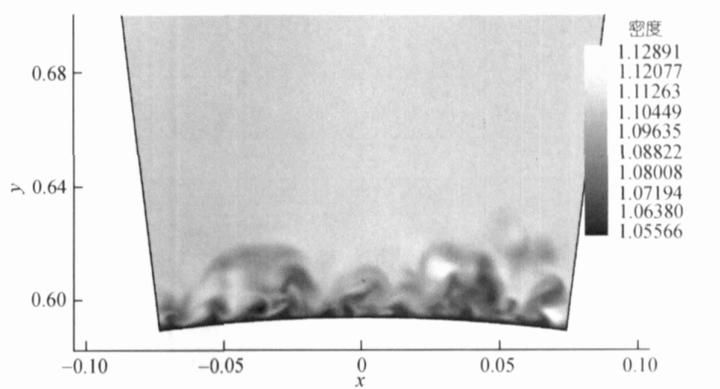


图 11 垂直于流向剖面上的密度分布( $z = 2.5$ )

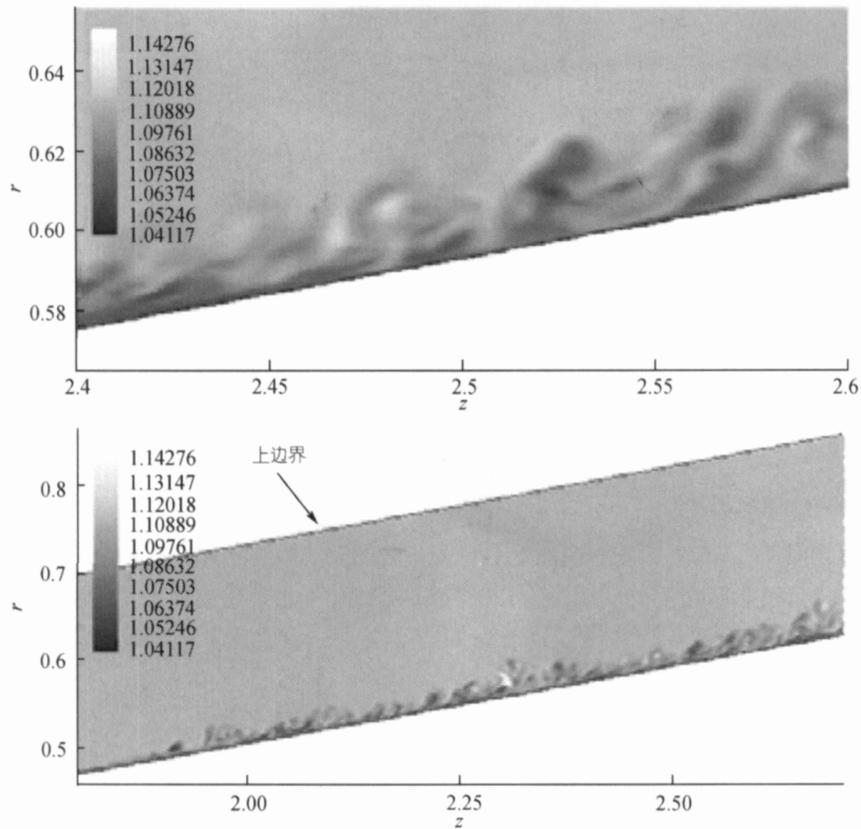


图 12 轴截面上的密度分布

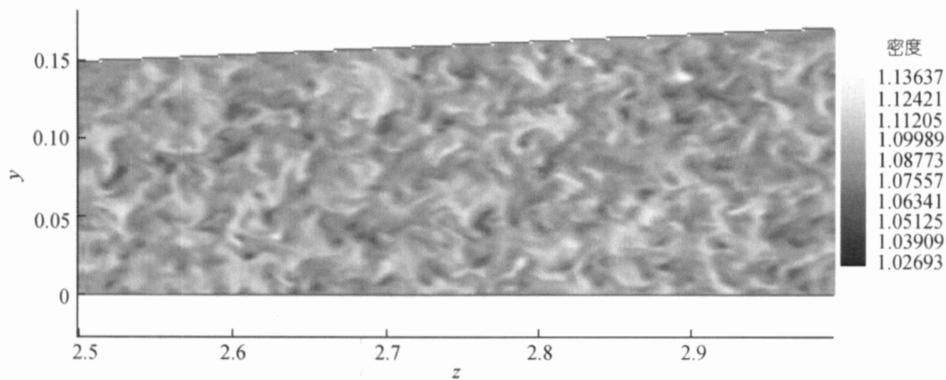


图 13 平行于壁面的剖面 $\eta=0.011$  ( $\eta^+=99.7$ )的密度分布

等值面可以很好地反映流场中的涡结构. 从图 14(a)可以看出, 在 $z=1.7$ 附近出现了发卡涡, 随后很快转捩. 图 14(b)为局部放大图, 可以看出, 转捩前期形成了一串发卡涡的结构. 而前面的发卡涡能够诱导出后面的发卡涡.

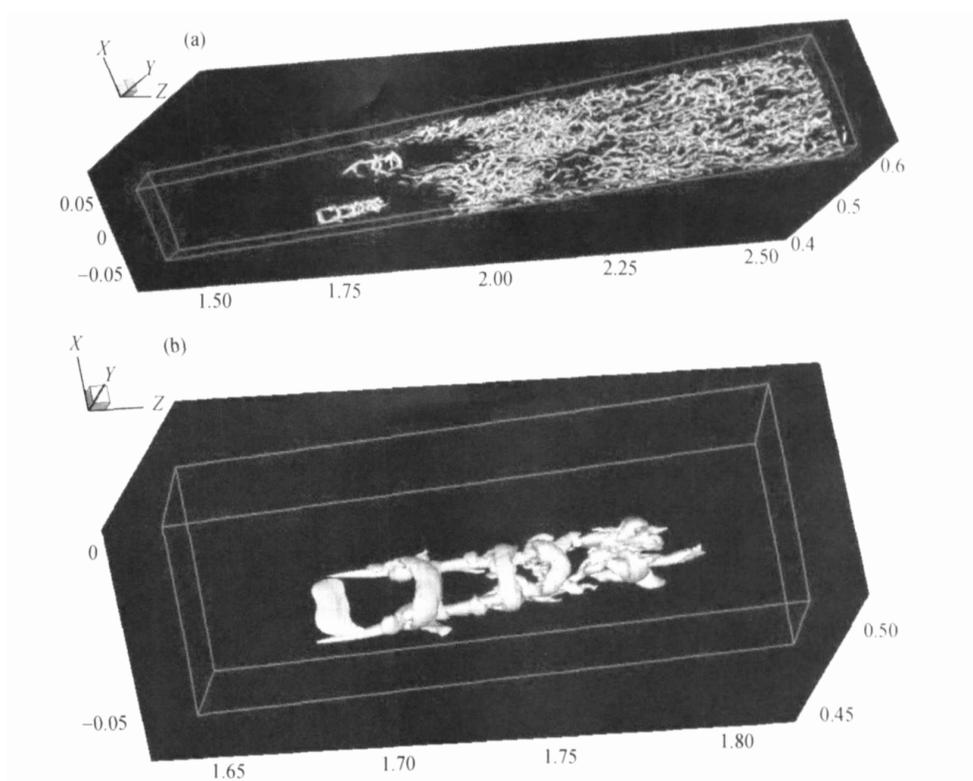


图 14 速度梯度张量第二不变量的等值面  
(a)  $Q^+ = 0.005$ ; (b)  $Q^+ = 0.005$ , 局部放大图

### 3 湍动能分析

首先给出柱坐标下可压湍流的湍能发展方程. 文献[5,6,8]给出了直角坐标下可压湍动能的发展方程, 但目前尚没有文献给出柱坐标下的可压湍动能发展方程, 因而本文列出了这个方程的推导过程.

写出柱坐标下的可压 N-S 方程的连续性方程和动量方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} + \frac{1}{r} \rho u_1 = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + s_i, \quad (2)$$

其中符号如下定义:  $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}$ ;  $u_1 = u_r$ ,  $u_2 = u_\theta$ ,  $u_3 = u_z$ , 其中  $s_i$  为自由

项  $s_1 = \frac{1}{r}(\rho u_2^2 + \sigma_{11} - \sigma_{22})$ ,  $s_2 = \frac{1}{r}(-\rho u_1 u_2 + 2\sigma_{12})$ ,  $s_3 = \frac{1}{r}\sigma_{13}$ . 定义  $\bar{\phi}$  为物理量  $\phi$  的 Reynolds 平均, 在本文中, 该平均是沿周向进行平均后再进行时间平均. 定义  $\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi} / \bar{\rho}$  为物理量  $\phi$  的 Favre 平

均. 定义  $\phi' = \phi - \bar{\phi}$ ,  $\phi'' = \phi - \tilde{\phi}$  为扰动量.

在等式(2)两端乘以  $u_i''$  并取平均得

$$\overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i'' \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij}} + \overline{u_i'' s_i}. \quad (3)$$

将  $u_i = \tilde{u}_i + u_i''$ ,  $p = \bar{p} + p'$ ,  $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij}$  代入上式, 并利用(1)式得

$$\begin{aligned} & \overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i'' \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\ &= \overline{u_i'' \rho \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}} + \overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_i''}{\partial t}} + \overline{u_i'' \rho (\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\partial (\tilde{u}_i + u_i'')}{\partial x_j}} \\ &= 1/2 \overline{\rho \frac{\partial}{\partial t} (u_i'' u_i'')} + \overline{\tilde{u}_j \rho u_i'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{u_i'' \rho u_j' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{u_i'' \rho u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} \\ &= 1/2 \overline{\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i'' u_i'')} - 1/2 \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\tilde{u}_j \rho u_i'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{u_i'' \rho u_j' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{u_i'' \rho u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) + \overline{\rho u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + 1/2 \overline{\frac{1}{r} u_i'' u_i'' \rho u_1} + 1/2 \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{u}_j \rho u_i'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{u_i'' \rho u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) + \overline{\rho u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + 1/2 \overline{\frac{1}{r} u_i'' u_i'' \rho u_1} + 1/2 \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho u_j''}{\partial x_j}} + 1/2 \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho \tilde{u}_j}{\partial x_j}} \\ &\quad + 1/2 \overline{\rho \tilde{u}_j \frac{\partial u_i'' u_i''}{\partial x_j}} + 1/2 \overline{\rho u_j'' \frac{\partial u_i'' u_i''}{\partial x_j}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) + \overline{\rho u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + 1/2 \overline{\frac{1}{r} u_i'' u_i'' \rho u_1} + \left( \overline{1/2 u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho u_j''}{\partial x_j}} + \overline{1/2 \rho u_j'' \frac{\partial u_i'' u_i''}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad + \left( \overline{1/2 u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho \tilde{u}_j}{\partial x_j}} + \overline{1/2 \rho \tilde{u}_j \frac{\partial u_i'' u_i''}{\partial x_j}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) + \overline{\rho u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + 1/2 \overline{\frac{1}{r} u_i'' u_i'' \rho u_1} + 1/2 \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i'' u_i''} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{\rho} K), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $K = 1/2 \overline{\rho u_i'' u_i''} / \bar{\rho}$  为湍动能.

再考虑湍动能方程的另一部分, (3)式右端的前两项为

$$\begin{aligned} -\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}} &= -\overline{u_i'' \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij})}{\partial x_j}} \\ &= \overline{u_i'' \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right)} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i'' p'}) + \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i'' \sigma'_{ij}} - \overline{\sigma'_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}. \end{aligned} \quad (5)$$

(3)式右端的自由项为

$$\begin{aligned}
 \overline{u_i'' s_i} - 1/2 \frac{1}{r} \overline{u_i'' u_i'' \rho u_1} &= \frac{1}{r} \overline{\rho(u_2'' u_1'' - u_1 u_2'' u_2'' - 1/2 u_i'' u_i'' u_1)} + \frac{1}{r} \overline{(\sigma_{11} - \sigma_{12}) u_1'' + 2\sigma_{12} u_2'' + \sigma_{13} u_3''} \\
 &= \frac{1}{r} (\tilde{u}_2 \overline{\rho u_1'' u_2''} - \tilde{u}_1 \overline{\rho u_2'' u_2''}) - 1/2 \frac{1}{r} \tilde{u}_1 \overline{\rho u_i'' u_i''} - 1/2 \frac{1}{r} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_1} \\
 &\quad + \frac{1}{r} (\overline{u_1'' (\sigma_{11} - \sigma_{12})} + 2\overline{u_2'' \sigma_{12}} + \overline{u_3'' \sigma_{13}}) + \frac{1}{r} \overline{(\sigma_{11}' - \sigma_{12}') u_1'' + 2\sigma_{12}' u_2'' + \sigma_{13}' u_3''}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

将这些表达式代入(3)式, 最终得到柱坐标下的湍能方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) = -C + P + T + \Pi_t + \Pi_d + D + M - \varepsilon, \quad (7)$$

其中

$$C = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{\rho} K) + \frac{1}{r} \tilde{u}_1 \bar{\rho} K$$

为对流项,

$$P = -\overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{r} (\tilde{u}_2 \overline{\rho u_1'' u_2''} - \tilde{u}_1 \overline{\rho u_2'' u_2''})$$

为湍流生成项,

$$T = -\left( \frac{\partial}{\partial x_j} (1/2 \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''}) + 1/2 \frac{1}{r} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_1} \right)$$

为湍能扩散项,  $\Pi_d = \overline{p' \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} + \frac{1}{r} u_1'' \right)}$  为压力-膨胀 (pressure-dilatation) 项,  $\Pi_t = -\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' u_j''} + \frac{1}{r} \overline{p' u_1''} \right)$  为压力输运项,  $M = \overline{u_i'' \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right)} + \frac{1}{r} (\overline{u_1'' (\sigma_{11} - \sigma_{12})} + 2\overline{u_2'' \sigma_{12}} + \overline{u_3'' \sigma_{13}})$  反映了由于密度的

脉动对湍能的贡献,  $D = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i'' \sigma'_{ij}} + \frac{1}{r} \overline{u_i'' \sigma'_{i1}}$  为黏性输运项,  $\varepsilon = \overline{\sigma'_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \frac{1}{r} \overline{\sigma'_{12} u_2'' - \sigma'_{12} u_1''}$  为湍能耗散项, 从中可以看出, 对流项、扩散项、黏性输运项和压力输运项均具有某函数散度的形式(柱

坐标下的散度为  $\text{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{r} u_1 = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r}$ ). 从总体上看这几项对湍动能没有

贡献, 只是把湍动能从某一区域输运到其他区域.

图 15 为  $z = 2.5$  处湍能方程中的各项沿壁面法向的分布. 可以看出, 起主要作用的是湍能生成项  $P$ , 湍能耗散项  $\varepsilon$ , 湍能扩散项  $T$  和黏性输运项  $D$ , 其他各项对湍能的贡献不大. 从图 15 中可以看出, 湍能的组成有以下特点:

(i) 湍能生成项  $P$  在  $\eta^+ = 11$  左右达到了最大值, 这个区域是介于黏性底层区和对数律区的过渡区, 是湍流脉动最强的区域.

(ii) 在黏性底层区 ( $\eta^+ < 5$ ), 湍能生成项不大, 而湍能耗散却很强, 该区域湍能得主要平衡机制是湍能扩散项、黏性扩散项与湍能耗散平衡. 从图 15 中可以看出, 湍流扩散项  $T$  和黏性输运项  $D$  由过渡区向黏性底层区输送湍能.

(iii) 在非常靠近壁面的区域, 湍能耗散很强. 湍能耗散和黏性输运平衡.

(iv) 由于平均流基本与壁面平行, 且沿流向变化较为缓慢, 因而对流输运较弱, 对流项  $C$  也较小. 但与平板边界层湍流相比<sup>[8]</sup>, 本工况的对流输运要略强一些, 这是因为相对与平板流动, 尖锥边界层的平均流沿流向的变化更加显著些.

图 16 为压力-膨胀项  $\Pi_d$ , 压力输运项  $\Pi_t$  和密度扰动项  $M$  的分布. 可以看出, 这 3 项均非常小, 与湍流生成项、湍流耗散项、湍流扩散项及黏性输运项相比, 这 3 项对湍能的作用可以忽略. 主要原因是本工况的 Mach 数不高, 内压缩性效应不明显.

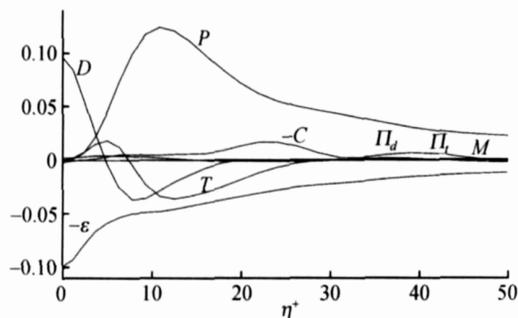


图 15 湍能方程中各项的分布( $z = 2.5$ )

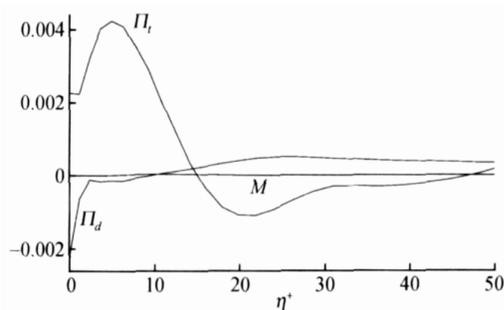


图 16  $\Pi_d$ ,  $\Pi_t$  和  $M$  的分布( $z = 2.5$ )

## 4 结论

本文采用高精度差分方法对来流马赫数 0.7, 来流 Reynolds 数 250000/Inch, 锥角  $20^\circ$  的尖锥边界层的整个空间转捩过程进行了直接数值模拟. 包括平均速度分布, 近壁湍流强度和雷诺应力等统计数据与平板边界层理论及实验吻合很好, 验证了结果的正确性. 对湍流场进行了统计分析和湍动能分析, 得出如下结论:

(i) 对于本问题, 周向曲率对平均速度分布及近壁湍流强度、Reynolds 应力分布等统计量影响不太.

(ii) 以当地壁面尺度度量的条带间距沿流向并没有显著变化.

(iii) 流动呈现出明显的 Bypass 转捩特征. 转捩过程中出现了发卡涡串结构. 而发卡涡出现之前, 没有出现从二维展向涡到  $\Lambda$  涡的发展过程.

(iv) 湍流生成项在过渡区达到最大值; 在黏性底层区, 湍动能主要通过湍流输运及黏性输运作用从过渡区获得湍能, 通过湍流耗散消耗湍能; 在极近壁区, 由黏性输运作用获得湍能, 并通过湍流耗散作用耗散掉, 该区域的黏性输运项和湍能耗散项均很强.

## 5 讨论

作者倾向于本计算的转捩为 Bypass 型转捩, 原因如下:

(i) 扰动强度相当大. 本计算采用流向位置  $1.5 \leq z \leq 1.8$  处的壁面的吹吸扰动, 扰动幅值为  $A = 0.2$  (最大扰动速度为来流速度的 0.2 倍), 这个扰动强度应当相当强了 (文献 [7, 8, 10] 计算平板湍流时, 采用了与本计算同样函数形式的壁面吹吸气扰动, 扰动幅值为  $A = 0.04$ , 即使这样, 仍认为扰动比较强, 流动不同于自然转捩).

(ii) 自然转捩在扰动区后, 应当有一个扰动被吸收, 形成 T-S 波并线性增长的过程. 线性增长到一定阶段后再进入扰动快速增长阶段. 从摩阻曲线上看, 如果是自然转捩, 扰动区后面似乎应当有一个稳定阶段(摩阻系数在扰动区后基本保持稳定, 或缓慢下降), 然后再快速增长. 而从本结果来看(图 4), 摩阻曲线甚至还没有离开扰动区就快速增长, 更像是 Bypass 型转捩.

**致谢** 感谢中国科学院网络信息中心超级计算中心及上海超级计算中心为本文的计算提供机时. 感谢天津大学周恒院士及罗纪生教授关于计算及湍流分析的有益指导.

### 参考文献

- 1 Schneider S P. Flight data for boundary-layer transition at hypersonic and supersonic speeds. *J Spacecr rockets*, 1998, 36(1): 8—20
- 2 Rabb L, Simpkinson H. Free flight heat transfer measurements on two 20° cone cylinders at Mach number from 1.3 to 4.9. *NACA Res Memor*, 1955, NACA-RM-E55F27
- 3 Rabb L, Disher J H. Boundary layer transition at high Reynolds numbers as obtained in flight of a 20° cone-cylinder with wall to local stream temperature ratios near 1.0. *NACA Res Memor*, 1955, NACA-RM-E55I15
- 4 Chauvin L T, Speegle K C. Boundary layer transition and heat transfer measurements for flight tests of blunt and sharp 50° cones at mach numbers from 1.7 to 4.7. *NACA Res Memor*, 1957, NACA-RM-L57D04
- 5 Guarini S E, Moser R D, Shariff K, et al. Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer at Mach 2.5. *J Fluid Mech*, 2000, 414: 1—33
- 6 Maeder T, Adams N A, Kleiser L. Direct simulation of turbulent supersonic boundary layer by an extended temporal approach. *J Fluid Mech*, 2001, 429: 187—216
- 7 Rai M M, Gatski T B, Erlebacher G. Direct numerical simulation of spatially evolving compressible turbulent boundary layers. *AIAA Paper*, 1995: 95—0583
- 8 Pirozzoli S, Grasso F. Direct numerical simulation and analysis of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer at  $M = 2.25$ . *Phys Fluids*, 2004, 16(3): 530—545
- 9 王新军, 罗纪生, 周恒. 平面槽道流中层流一端转捩的“breakdown”过程的内在机理. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2005, 35(1): 71—78
- 10 Gao H, Fu D X, Ma Y W, et al. Direct numerical simulation of supersonic boundary layer flow. *Chin Phys Lett*, 2005, 22(7): 1709—1712
- 11 李新亮, 傅德薰, 马延文. 可压缩钝楔边界层转捩到湍流的直接数值模拟. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2004, 34(4): 466—480
- 12 Li X L, Fu D X, Ma Y W. Direct numerical simulation of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer at  $Ma = 6$ . *Chin Phys Lett*, 2006, 23(6): 1519—1522
- 13 Horvath T J, Berry S A, Hollis B R, et al. Boundary Layer Transition on Slender Cones in Conventional and Low Disturbance Mach 6 Wind Tunnels. *AIAA Paper*, 2002, 2002—2743
- 14 Fu D X, Ma Y W. A high order accurate different scheme for complex flow fields. *J Comput Phys*, 1997, 134: 1—15
- 15 Fu D X, Ma Y W. High resolution schemes. In: Hafez M, Oshima K, eds. *Computational Fluid Dynamics Review 1995*. New York: John Wiley & Sons, 1995. 234—250
- 16 Li X L, Fu D X, Ma Y W. Optimized group velocity control scheme and DNS of decaying compressible turbulence of relative high turbulent Mach number. *Int J Numer Methods Fluids*, 2005, 48: 835—852
- 17 Karlson R I, Johansson T G. LDV measurements of higher-order moments of velocity fluctuations in a turbulent boundary layer. In: *International Symposium on Applications of Laser Anemometry to Fluid Mechanics*. Lisbon: Instituto Superior Tecnico, 1986