

[文章编号] 1001-246X(2001)04-0303-05

可压涡卷空间演化的迎风紧致差分数值模拟

王 强, 傅德薰, 马延文

(中国科学院力学研究所, 非线性连续介质力学开放研究实验室, 北京 100080)

[摘 要] 从数值算法的耗散和色散特征的时空全离散 Fourier 分析出发, 通过直接求解二维非常可压 Navier-Stokes 方程, 将发展的 5 阶迎风紧致差分格式用于无约束可压平面受迫剪切层中基频涡卷空间演化过程的数值模拟. 采用被动守恒标量等方法显示了基频涡卷的饱和、一次对并、二次对并等现象, 据此探讨了入口来流亚谐波扰动引起的初值效应问题, 表明可压大尺度涡结构空间演化形态与受迫扰动方式之间存在关联.

[关键词] 可压剪切层; 迎风紧致格式; 涡卷; 对并

[中图分类号] O354.1, V211.3

[文献标识码] A

0 引言

剪切层流动是湍流研究领域关注的一种典型流态. 早期关于剪切层中涡结构的数值模拟多限于不可压范围, 近些年, 可压剪切层的相关研究逐渐受到重视. 高精度高分辨率紧致有限差分算法具有类谱性质^[1,2], 是可压剪切层数值研究的主要手段之一. 全离散情形下, 对称紧致格式 (Symmetric Compact Difference, SCD) 对高波数 Fourier 分量基本无耗散, 色散引起的数值混淆误差问题突出. 迎风紧致格式 (Upwind Compact Difference, UCD) 的高波数耗散特性是内在的. Fu 和 Ma 基于控制方程对流通量正负分裂思想, 构造给出了一类迎风紧致格式^[2], 用其对时间发展可压剪切层中涡结构进行了直接数值模拟^[3-5], 得到和分析了涡/激波干扰、三次对并、菱纹涡、涡等现象, 显示了其算法的有效性.

本文从对文[2]发展的 5 阶迎风紧致格式的时空全离散数值行为分析出发, 将它用于空间发展可压剪切层中涡结构的直接数值模拟. 一个反映上下层流质混合特征的被动标量输运守恒方程与流体运动方程同时求解. 通过主动施加基频扰动及其亚谐波扰动, 计算得到了基频涡卷的不同相互作用形态, 进而讨论了入口扰动初值效应问题.

1 数值方法

1.1 无量纲控制方程

考虑二维空间发展模式. 笛卡尔坐标系下, 两股

气流在 xy 平面内由 $y=0$ 直线分界, 沿 x 轴做同向无约束平行剪切层流运动 (快速流在上层). 非定常可压全 N-S 方程用张量表作如下无量纲守恒形式

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j + p_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [(E+p)u_i]}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_k \tau_{kj} - q_j)}{\partial x_j}. \quad (1c)$$

其中 x_j, u_j, p, E 分别是笛卡尔坐标 (x, y) 、速度分量 (u, v) 、密度、压力、单位质量气体总能, 并由 $\rho^*, u_i^*, \tau_{ij}^*, u_i^* u_j^*, u_i^{*2}$ 无量纲化. 涡量厚度 $\delta^* = |u_1^* - u_2^*| / |du^*/dy^*|_{\max}$, u^* 是入口平均流向速度初始分布, 上标“*”表有量纲值, 下标“1”, “2”表上下层入口自由流值. 在 Stokes 假设下, 粘性应力 τ_{ij} 和热流量 q_j 分别满足 Newtonian 流体本构关系式和 Fourier 热传导定律. Reynolds 数 $Re = \rho^* u_1^* \delta^* / \mu^*$, 动力粘性系数 μ 由 Sutherland 公式确定, 并以 μ_1^* 无量纲化. 完全气体状态方程为 $p = T / (M_1^2)$, M_1 是上层入口来流 Mach 数. 此外, 比热比 $\gamma = 1.4$, Prandtl 数 $Pr = 0.75$, $T_1^* = 273 \text{ K}$, $E = p / [(\gamma - 1) \rho^* + (u^2 + v^2) / 2]$.

在数值模拟过程中, 同时求解下面关于被动标量 g 的输运守恒方程

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial (gu_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial g}{\partial x_k} \right]. \quad (2)$$

式中 Schmidt 数 $Sc = 1$. 变量 g 可看作冻结流场中

[收稿日期] 1999-12-24; [修回日期] 2000-06-19

[基金项目] 国家自然科学基金(19972070)及国家重点基础研究与专项经费(G1999032805)资助项目

[作者简介] 王强(1967-), 男, 安徽桐城, 博士, 工程师, 北京 7201 信箱 16 分箱, 100074.

某示踪组元的质量浓度, g 是该组元的质量分数, 反映的是剪切层的混合特性.

1.2 迎风紧致有限差分算法

守恒方程(1),(2)的对流项经矢通量特征分裂后,采用文[2]提出的5阶迎风紧致差分格式(UCD5)离散.以 x 方向为例,对流通量记作 f ,其 Jacobian 矩阵的互异特征值为 $\lambda_1 = u, \lambda_{2,3} = u \pm c, c$ 是声速,则它的 Steger-Warming 正负分裂形式为

$$f^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(\lambda_1 - 1) f_1^\pm + (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) \\ 2(\lambda_1 - 1) u_i f_1^\pm + u_i (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) + c(\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm) \\ 2(\lambda_1 - 1) (u_k u_k / 2) f_1^\pm + [c^2 / (\lambda_1 - 1) + u_k u_k / 2] (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) + cu(\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm) \\ g[2(\lambda_1 - 1) f_1^\pm + (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm)] \end{pmatrix},$$

这里 $f = f^+ + f^-$, 且 $\lambda_1^\pm = [\lambda_1 \pm (\lambda_1^2 + 4)^{1/2}] / 2, \lambda_{1,2,3}$ 正参数 $\ll 1$. 于是 f^\pm 的一阶导数变量 $\partial f^\pm / \partial x$ 的5阶迎风紧致差分离散形式为

$$f^\pm: \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)_i + \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)_{i \mp 1} = \frac{1}{24} \frac{1}{x} (\mp f_{i \pm 2}^\pm \pm 12 f_{i \pm 1}^\pm \pm 36 f_i^\pm \mp 44 f_{i \mp 1}^\pm \mp 3 f_{i \mp 2}^\pm), \quad (3)$$

在次边界点和边界点分别选用3阶迎风紧致格式^[2]和2阶普通偏心格式.式(3)连同边界附近离散格式一起组成关于变量 $\partial f^\pm / \partial x$ 的带状线性方程组,易于求解. y 方向类似.

守恒方程(1),(2)的耗散项采用6阶对称紧致 Collatz 格式(SCD6)差分离散^[11].方程空间半离散后由3步3阶紧致存储显式 Runge-Kutta 算法(RK3)时间推进求解.

1.3 定解条件

入口平均场解析设定.取 (u, v, T, p, g) 为独立变量,由一阶近似局部平行流假设,得 $\bar{v}(y) = 0$.平均流向速度 \bar{u} 表作双曲正切函数分布

$$\bar{u}(y) = [1 + R \cdot \tanh(2y)] / (1 + R),$$

$$Z_{x,y} = \left(-\frac{t}{h} \right) \cdot \left\{ \frac{18 - 16\cos(\kappa_{x,y}) - 2\cos(2\kappa_{x,y}) + [28\sin(\kappa_{x,y}) + \sin(2\kappa_{x,y})]i}{18 + 12\cos(\kappa_{x,y}) - 12\sin(\kappa_{x,y})i} \right\}.$$

以45°斜波为例.取 $x = y, u = v, c^2 = u^2 + v^2$, CHL 数为0.2,波数以归一化.图1(a)是UCD5-

速率比参数 $R = (1 - u_2) / (1 + u_2)$.平均温度 \bar{T} 满足修正 Crocco-Busemann 积分关系式

$$\bar{T}(y) = [T_2(1 - \bar{u}) + (\bar{u} - u_2)] / (1 - u_2) + \sqrt{Pr} \cdot (-1) M_1^2 (1 - \bar{u}) (\bar{u} - u_2) / 2.$$

平均压力 $\bar{p}(y) = 1 / (M_1^2)$.被动标量 $g(y) = \tanh(2y)$.入口扰动场叠加于平均场上.

在下游和出口边界设置时间相关 N-S 特征无反射边界条件.不妨以出口边界为例,现改记控制方程(1),(2)的守恒变元为 $U = (\rho, u_i, E, g)$,流向和横向对流通量为 E, F ,耗散项为 RHS ,则出口边界条件为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E^+}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = RHS, \quad (4)$$

式中 E^+ 是 E 的 Steger-Warming 正分裂部分,即与边界外法向一致的特征通量.在出口角点对 E, F 均选用特征分裂形式.可以证明,若将 RHS 看作源项,本文给出的无反射边界条件与 Thompson^[6]的非定常边界条件(time dependent boundary conditions)等价.

流向网格均匀分布,横向网格在 $y = 0$ 附近加密.

2 UCD5-RK3 格式的二维全离散数值行为特征

从二维非定常 Euler 方程的非守恒特征形式出发,在系数矩阵局部冻结线性化假设下,文[7]用离散 Fourier 变换方法,导出了UCD-RK m 格式(m 是显式 Runge-Kutta 时间推进精度)的二维时空全离散色散关系一般表达式

$$\hat{\Lambda}(\kappa_x, \kappa_y) = i \cdot \ln \left[\prod_{s=0}^m \frac{1}{s!} \hat{\Lambda}_i^s(\kappa_x, \kappa_y) \right], \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

其中 κ_x, κ_y 是无量纲波数.无量纲频率 $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_r + i \hat{\Lambda}_i, \hat{\Lambda}_r, \hat{\Lambda}_i$ 为数值色散误差, $\hat{\Lambda}_i$ 为数值耗散误差, $\hat{\Lambda}_i = 0$ 时,算法稳定.在算法形成的二维数值色散介质中, $\hat{\Lambda}_{1,2} = Z_x u + Z_y v$,对应数值流波; $\hat{\Lambda}_{3,4} = \hat{\Lambda}_{1,2} \pm c(Z_x^2 + Z_y^2)^{1/2}$,对应数值声波.对UCD5格式,令网格间距 $h = (x, y)$,有

RK3格式在 (κ_x, κ_y) 平面上的 $\hat{\Lambda}_i$ 等值线,耗散误差集中于高波数区,可将网格分辨率不足引起的非物

理波动衰减掉,精度相近的 SCD6-RK3 格式的耗散误差离低波数区较近,在高波数区角点基本无耗散(图 1(b)).图 2(a)是 UCD5-RK3 格式的 \hat{v}_r 等值线,色散误差也集中于高波数区,约在 $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ 区域里,算法正确模拟到了流波和声波的方向特征,从各向异性角度来看,它好于精度相近的对称紧致格式(图2(b)),可捕捉小尺度范围更大.可见,高精度迎风紧致格式对复杂流动具有较好的数值稳定性和尺度分辨率.

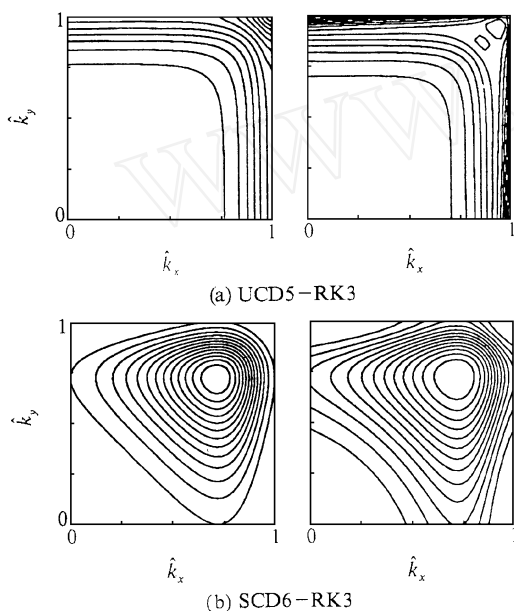


图 1 耗散误差(左: \hat{v}_r , 右: \hat{v}_θ)

Fig.1 Dissipation errors

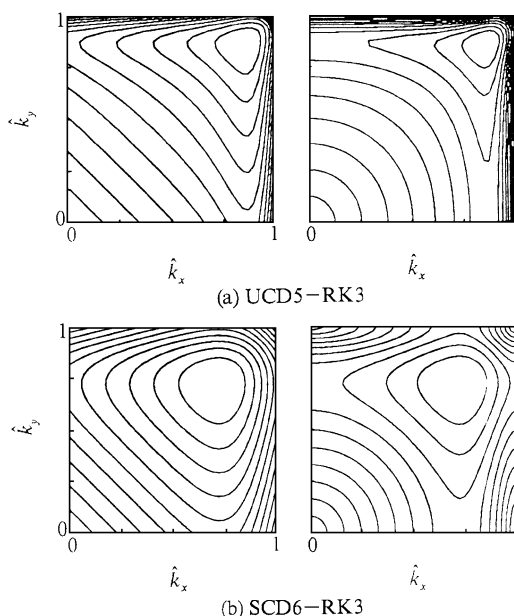


图 2 色散误差(左: \hat{v}_r ; 右: \hat{v}_θ)

Fig.2 Dispersion errors

3 数值模拟结果及分析

观察扰动初值效应对无约束可压平面受迫剪切层中大尺度涡空间演化形态的影响.在入口来流横向速度 v 上叠加 n 个非定常正弦扰动波,形如

$$v(x=0, y, t) = e^{-y^2} \cdot \sum_{m=1}^n a_m \sin(\omega_m t + \phi_m),$$

其中 a_m, ω_m, ϕ_m 是扰动振幅、频率及相差.亚谐扰动频率 $\omega_m = \omega_1 / 2^{m-1}, m > 1$.以下对 $n = 1, 2, 3$ 三种扰动情形,取 $a_m = 0.02, \omega_1 = 0.6, \phi_1 = 0$.来流条件为, $Re = 600, M_1 = 0.8, u_2 = 1/3, T_2 = 1$.可以推知,对流 Mach 数 $M_c = 0.267$,对流速度 $U_c = 0.667$.

因无亚谐扰动, $n = 1$ 算例只有基频涡卷出现,图 3 是其沿流向空间周期演化的时间序列.饱和态基频涡卷的形态及尺度向下游的变化微弱,运动速

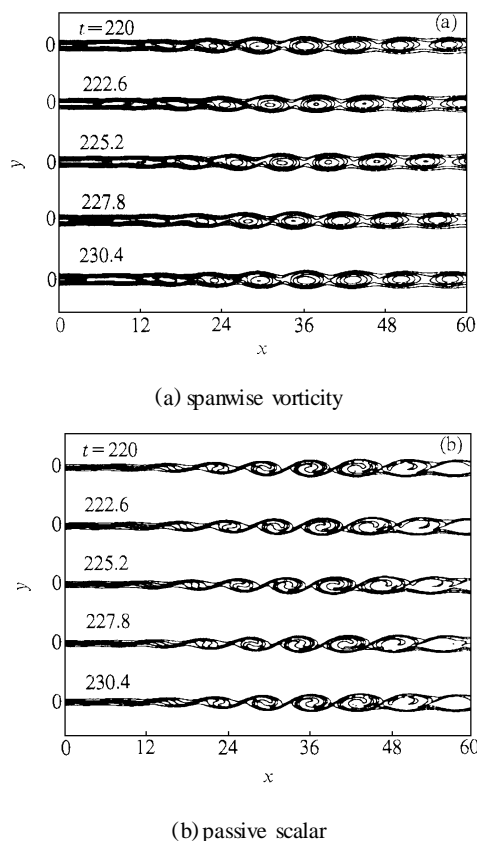


图 3 基频涡卷饱和

Fig.3 The primary vortex saturating

度近于常值,约等于对流速度 U_c ,这是剪切层时间模式数值研究的依据之一.首末时刻的等值线图基本重合,表明算法对网格可分辨流动尺度的耗散和色散误差较小,且该数值误差随非定常计算的时间累积量不大,同第 2 节的分析结论一致.在出口边界,较小的反射误差效应对展向涡量场和被动标量场无明显影响,式(4)的简单无反射边界条件的设置

和使用是有效的。

沿 $y = 0$ 直线流向等分截取 4 个站位,得瞬时流向速度 u 随时间变化曲线(图 4),直观显示了特定站位达到周期态的时刻和历程,据此可观察剪切层

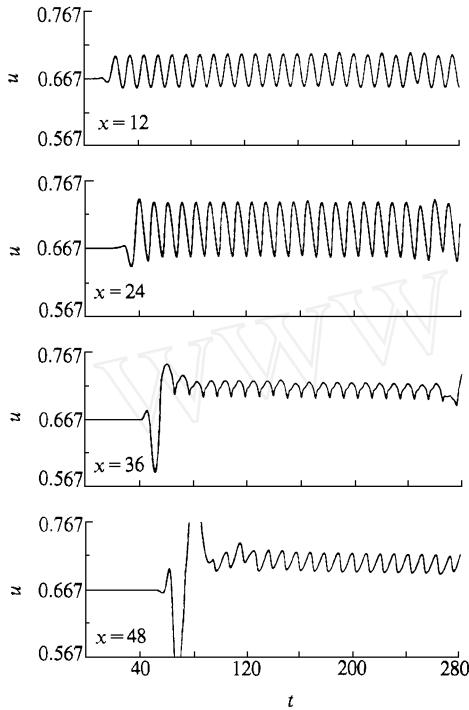


图 4 中心流向速度 ($n = 1$)
Fig. 4 Central streamwise velocity

中不同空间位置对入口受迫扰动的响应特征. $t = 142$ 时,扰动在整个计算域内遍历.以基频涡卷的饱和为标志, u 的平均值和脉动量由增转缓,前者总大于来流平均速度 $\bar{U} = 0.667$,意味着剪切层中 $\bar{u} = \bar{U}$ 的位置曲线在 $y = 0$ 直线下方,即大尺度涡结构偏于剪切层下层,这与 Weisbrodt 和 Wagnanski^[8] 的实验吻合.图 5 是时均涡量厚度曲线,以 $x = 35$ 分界,流场形成第 1 线性增长区和第 2 增长率饱和区两部分,与 Oster 和 Wagnanski^[9] 的三个实验分区中的前两个相当.在第 2 区后段,呈平台状轻微下降,这是文[9]所述流动将进入第 3 准线性增长区前的过渡段特征.

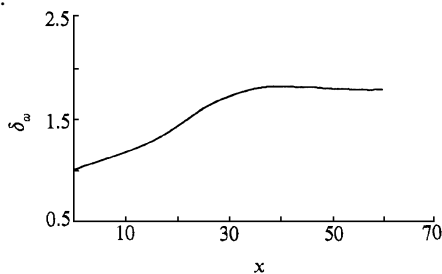


图 5 涡量厚度 ($n = 1$)
Fig. 5 Vorticity thickness

图 6 是 $n = 2$ 算例在 $t = 350$ 时的瞬时流态.基频涡卷饱和后,剪切层的卷吸能量向亚谐波扰动传递,伴随亚谐波放大,相邻基频涡卷在 $x = 40$ 附近一次对并,形成亚谐波涡卷.饱和亚谐波涡卷也由涡瓣连成等距大尺度涡阵列,剪切层厚度增长率减缓.图 7 是 $y = 0$ 直线上一次对并前后两站位 $x = 23.8, 71.4$ 处的瞬时流向速度 u 曲线,主周期与亚谐波扰动相同, $\bar{u} = \bar{U}$ 的位置曲线也在 $y = 0$ 直线下方,主涡结构偏于剪切层下层.

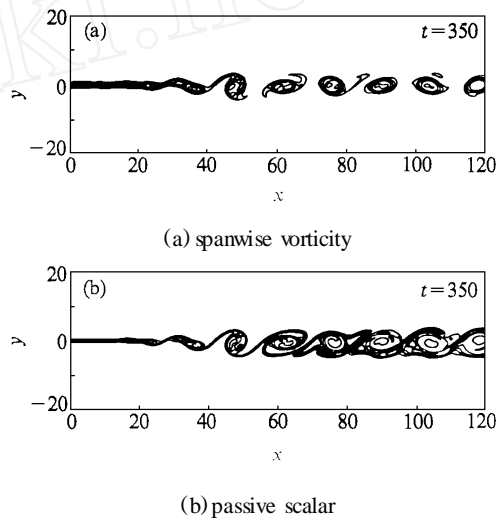


图 6 涡卷一次对并

Fig. 6 The first vortex pairing

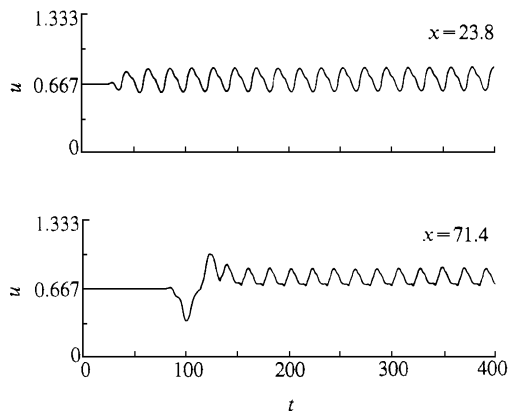


图 7 中心流向速度 ($n = 2$)

Fig. 7 Central streamwise velocity

图 8 是 $n = 3$ 算例在 $t = 280$ 瞬时被动标量等值线.当第一亚谐波扰动强度超过基频扰动时,相邻基频涡卷在流向约 $1/3$ 处一次对并,形成第一亚谐波涡卷,涡层变厚.这与图 6 中 $x < 70$ 段十分相象,表明一次对并过程中,第二亚谐波扰动强度很弱,对涡结构无明显影响.第一亚谐波涡卷饱和后,第二亚谐波扰动快速增长,在出口附近促生涡的二次对并,涡层再次增厚.二次对并在时间和空间上均长于一次对并过程.图

9是相应的展向涡量等值线时间变化序列,反映了大尺度涡形成和演化的动态过程,图中主涡结构也偏于剪切层低速一侧。

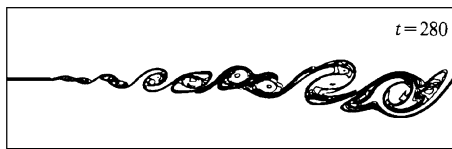


图8 被动标量等值线 ($n=3$)

Fig. 8 Passive scalar contours

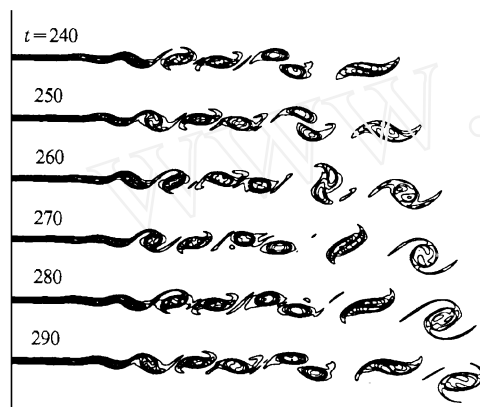


图9 涡卷二次对并

Fig. 9 The secondary vortex pairing

4 结论

本文实现了高精度迎风紧致差分算法对空间发展可压平面自由剪切层的直接数值模拟。通过对入

口扰动波的个数和频率的控制,得到了基频涡卷的饱和、一次对并、二次对并等现象。结果显示,空间发展主涡结构偏于剪切层低速一侧,其演化形态与受迫扰动方式密切相关。可压平面剪切层中涡的多次对并是其涡尺度复杂演化的体现,高精度迎风紧致差分算法较好地模拟出了这些过程,显示了其有效处理复杂多尺度流动问题的能力。

[参 考 文 献]

- [1] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *J Comput Phys*, 1992, **103**(1): 16 - 42.
- [2] Fu D X, Ma Y W. A high order accurate difference scheme [J]. *J Comput Phys*, 1997, **134**(1): 1 - 15.
- [3] 傅德薰,马延文. 平面混合流拟序结构的直接数值模拟 [J]. *中国科学*, 1996, **A26**(7): 657 - 664.
- [4] 傅德薰,马延文. 时间发展平面混合层的三维演化 [J]. *力学学报*, 1998, **30**(2): 129 - 137.
- [5] 傅德薰,马延文,张林波. 可压混合层流动转捩到湍流的直接数值模拟 [J]. *中国科学*, 2000, **A30**(2): 161 - 168.
- [6] Thompson K W. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems [J]. *J Comput Phys*, 1987, **68**(1): 1 - 24.
- [7] 王强. 可压平面混合层稳定性分析及数值模拟 [D]. 中国科学院力学研究所, 1999.
- [8] Weisbrot I, Wygnanski I. On coherent structures in a highly excited mixing layer [J]. *J Fluid Mech*, 1988, **195**: 137 - 159.
- [9] Oster D, Wygnanski I. The forced mixing layer between parallel streams [J]. *J Fluid Mech*, 1982, **123**: 91 - 130.

NUMERICAL SIMULATIONS OF SPATIALLY-DEVELOPING COMPRESSIBLE VORTEX ROLL UP USING A UPWIND COMPACT DIFFERENCE METHOD

WANG Qiang, FU De-xun, MA Yan-wen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

[Abstract] The temporal-spatial discrete Fourier transformation is employed to analyze the dissipation and dispersion errors of the numerical algorithm used here. Based on directly solving the two-dimensional time dependent compressible Navier-Stokes equations, the spatial evolution of primary vortex generated in forced compressible plane free shear layers is simulated numerically by using a new fifth-order upwind compact difference scheme. The phenomena, including the primary vortex saturating, the first pairing, and the second pairing, are shown with the passively conserved scalar method and so on. The initial value effect related to subharmonic disturbances in incoming flows is studied. The results show that the spatial evolution type of large scale compressible vortices is associated with the disturbance modes.

[Key words] compressible shear layer; upwind compact scheme; rollup; pairing