应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2003)11-1179-07

流体运动稳定性方程组椭圆特性的分析与应用*

李明军, 高 智

(中国科学院 力学所 LHD 实验室,北京 100080)

(戴世强,吴望一推荐)

摘要: 利用抛物化稳定方程(PSE)特征分析得知,原始扰动量的线性和非线性 PSE 整体来说为抛物型· 利用 PSE 的次特征分析证明,对速度 U,在亚音速和跨音速区,线性 PSE 分别为椭圆型和双曲 - 抛物型;对速度 U + u,在亚音速和跨音速区,非线性 PSE 分别为椭圆型和双曲-抛物型(其中,U 和 u 分别为主流方向的扰动和未扰流速度分量)· 结论表明,流体运动稳定性方程组的"抛物化"简化,仅把信息的对流扩散传播抛物化,而保留了信息的对流扰动传播特性,PSE 实质上是扩散抛物化稳定性方程组· 根据特征次特征理论提出了消除 PSE 剩余椭圆特性的方法,所得结论对线性 PSE 已有结论一致,并给出了 Mach 数的影响· 同时,进一步给出了消除非线性 PSE 的剩余椭圆特性的方法·

关 键 词: 可压缩流; 抛物化稳定性方程; 特征; 次特征

中图分类号: O357.1 **文献标识码**: A

引 言

流体运动抛物化稳定性方程组(PSE)是由 Herbert 等人在 1987 年提出的[1],已成为流体运动稳定性计算和理论研究的一个重要手段· 流场计算分析表明,抛物化稳定性方程组并非完全抛物化,存在剩余的椭圆特性[2~5]· 由于 PSE 存在剩余的椭圆特性,直接求解 PSE 不仅耗费计算机时,甚至使得空间步长推进无法进行,不能得到适定解· Haj-Hariri 详细研究了 PSE 的数学性质[4],分析了 PSE 的椭圆特性,提出了消除 PSE 的椭圆特性的方法· Haj-Hariri 等人将 PSE 中的每一个物理量分解成快变波状分量和慢变形状函数,利用待定系数法阐明了椭圆特性的来源,从而,从声源和粘性源两个方面来消除其椭圆特性· 这样得到的 PSE 可用高效、经济的推进方法求解· 本文根据文献[2～5]研究流体力学层次结构方程组的特征和次特征方法,研究了 PSE 的特征次特征和消除 PSE 的剩余椭圆特性的问题· 数学特征、次特征分析表明,PSE 并非真正抛物化,扩散抛物化稳定性方程组(DPSE)的称呼才能真正反映它的数学物理特征· DPSE 的好处是:对流体运动稳定性问题的描述合理,DPSE 的空间推进计算与流动稳定性方程组时间相关计算相比可大大节省 CPU 时间和内存,且 DPSE 计算中勿需规定扰动量的

* **收稿日期**: 2001-08-21; **修订日期**: 2003-05-28
基金项目: 国家自然科学基金资助重点项目(10032050);国家 863 项目(2002AA633100)
作者简介: 李明军(1968 —),湖南人,副教授,博士(E-mail:limingjun@ouc.edu.cn)·

出流边界条件,这是一个实质性的简化·因此,本文进一步利用特征和次特征方法,研究 PSE 的数学性质和消除 PSE 的剩余椭圆特性的问题,对线性 PSE 消除剩余椭圆特性所得结论和文[4]一致,且给出了 PSE 的次特征与 Mach 数的关系,并进一步讨论非线性 PSE 的椭圆特性,给出了消除 PSE 的剩余椭圆特性的办法·

1 线性及非线性抛物化稳定性方程组(PSE)

本文考虑二维可压缩流体力学基本方程组[2]

$$S_t\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0,\tag{1a}$$

$$S_t\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho Re}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},\tag{1b}$$

$$S_t\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho Re}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},\tag{1c}$$

$$S_t\left(\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\right)+\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{C_p}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{p_r}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{p_r}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]+\frac{\mu}{Re}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right],\tag{1d}$$

$$p=\rho T\cdot\tag{1e}$$

对平板边界层,设基本流为

$$(U(x,y,t),0,T(x,y,t),\bar{\rho}(x,y,t)),$$

且满足流体力学基本方程组(1a)～(1e)·由于小扰动的基本思想是流动中迭加一个适应于流体力学基本方程组的微小扰动,所以流场中的运动参数可用基本流参数和扰动参数相迭加来表示·在直角坐标系中,速度、温度和密度可分别表示为

$$\widetilde{U}=U+u,\ \widetilde{V}=v,\ \widetilde{T}=T+\theta,\ \widetilde{\rho}=\bar{\rho}+\rho,\tag{2}$$

其中,(u,v,θ,ρ) 为小扰动的速度、温度和密度·

利用状态方程(1e)消去方程组(1a)～(1d)中的压强 p,并将式(2)代入方程组(1a)～(1d),即可得到如下二维可压缩稳定性方程组

$$(U+u)\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+(\bar{\rho}+\rho)\frac{\partial u}{\partial x}+(\bar{\rho}+\rho)\frac{\partial v}{\partial y}=F_1,\tag{3a}$$

$$\frac{T+\theta}{\bar{\rho}+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+(U+u)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{4\mu}{3(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{2\mu}{3(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}-\frac{\mu}{3(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2v}{\partial y\partial x}-\frac{\mu}{(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=F_2,\tag{3b}$$

$$\frac{T+\theta}{\bar{\rho}+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+(U+u)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\mu}{(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{2\mu}{3(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}-\frac{\mu}{(\bar{\rho}+\rho)Re}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{4\mu}{3(\rho+\bar{\rho})Re}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}=F_3,\tag{3c}$$

$$(\rho+\bar{\rho})(u+U)(C_p-1)\frac{\partial\theta}{\partial x}+(\bar{\rho}+\rho)v(C_p-1)\frac{\partial\theta}{\partial y}-(T+\theta)(u+U)\frac{\partial\rho}{\partial x}-$$

$$(T+\theta)v\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{C_p\mu}{PrRe}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{C_p\mu}{PrRe}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=F_4, \tag{3d}$$

其中 U, u, v 用 U_e 归一化；x, y 用 L 归一化；T, θ 和 C_p 用气体常数 R 归一化；ρ 和 μ 分别用 ρ_e 和 μ_e 归一化．Reynold 数 $Re=\rho_e U_e L/\mu_e$．F_1, F_2, F_3 和 F_4 表示方程组中 $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial y$ 的项之外的所有其它项．下文中，F_1, F_2, F_3 和 F_4 的意义与此相同，不再另加说明(参见[6～9])．

忽略方程组(3a)～(3d))中方向的粘性项，即可得到非线性扩散抛物化稳定性方程

$$(U+u)\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+(\bar\rho+\rho)\frac{\partial u}{\partial x}+(\bar\rho+\rho)\frac{\partial v}{\partial y}=F_1, \tag{4a}$$

$$\frac{T+\theta}{\bar\rho+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+(U+u)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\mu}{(\bar\rho+\rho)Re}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_2, \tag{4b}$$

$$\frac{T+\theta}{\bar\rho+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+(U+u)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{4\mu}{3(\rho+\bar\rho)Re}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F_3, \tag{4c}$$

$$(\rho+\bar\rho)(u+U)(C_p-1)\frac{\partial\theta}{\partial x}+(\bar\rho+\rho)v(C_p-1)\frac{\partial\theta}{\partial y}-$$
$$(T+\theta)(u+U)\frac{\partial\rho}{\partial x}-(T+\theta)v\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{C_p\mu}{PrRe}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=F_4. \tag{4d}$$

进一步，假设扰动非常小，即就是说，$u\ll U, v\ll V, p\ll P$ 且 $\theta\ll T$．从而，可以得到如下线性扩散抛物化稳定性方程

$$U\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+\bar\rho\frac{\partial v}{\partial y}=F_1, \tag{5a}$$

$$\frac{T}{(\rho+\bar\rho)}\frac{\partial\rho}{\partial x}+U\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\mu}{(\rho+\bar\rho)Re}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_2, \tag{5b}$$

$$U\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{T}{(\rho+\bar\rho)}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{4\mu}{3(\rho+\bar\rho)Re}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial\theta}{\partial y}=F_3, \tag{5c}$$

$$-\theta U\frac{\partial\rho}{\partial x}+(C_p-1)\bar\rho U\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{C_p\mu}{PrRe}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=F_4. \tag{5d}$$

通过下文的特征次特征分析可以知道，方程组(4a)～(4d)和(5a)～(5d)为抛物型方程组，且在亚声速区保留了剩余椭圆特性．因此，可称方程组(4a)～(4d)和(5a)～(5d)为扩散抛物化稳定性方程(DPSE)．

2 线性 PSE 的特征和次特征

根据文献[1]的理论分析，流场存在两种信息传播方式，一种是信息的对流扩散传播，另一种是信息的对流扰动传播．前一种由流体力学基本方程组的特征确定，后一种由流体力学基本方程组去掉粘性项得到的方程组的特征确定．下面根据文献[2]研究流体力学层次结构方程组的特征和次特征理论，研究线性 PSE 的特征次特征和消除 PSE 剩余椭圆特性的问题．为了定性分析线性 PSE 的特征，记

$$\frac{\partial u}{\partial y}=U^{(y)},\ \frac{\partial v}{\partial y}=V^{(y)},\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=\theta^{(y)}, \tag{6}$$

这时，线性扩散抛物化稳定性方程(5a)～(5d)可以表示为关于 $\mathrm{Z}=(\rho, u, U^{(y)}, v, V^{(y)}, \theta, \theta^{(y)})$ 的一阶拟线性偏微分方程组

$$\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}=\mathrm{F}, \tag{7}$$

其中，Z 和 F 为 7 阶向量，A 和 B 均为 7 ×7 阶矩阵．拟线性偏微分方程组(7)的特征方程为

$$\det(\sigma_1 a_{ij} + \sigma_2 b_{ij}) = 0, \tag{8}$$

其中

$$\det(\sigma_1 a_{ij} + \sigma_2 b_{ij}) =$$

$$\begin{vmatrix} U\sigma_1 & \bar{\rho}\sigma_1 & 0 & \bar{\rho}\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho+\bar{\rho}}\sigma_1 & U\sigma_1 & \frac{-\mu}{(\rho+\bar{\rho})Re}\sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ \frac{T}{\rho+\bar{\rho}}\sigma_2 & 0 & 0 & U\sigma_1 & \frac{-4\mu}{3(\rho+\bar{\rho})Re}\sigma_2 & \sigma_2 & 0 \\ -TU\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}U\sigma_1(C_p-1) & \frac{-C_p\mu}{PrRe}\sigma_2 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{4C_p\mu^3}{3Pr(\rho+\bar{\rho})^2 Re^3}\sigma_1^4\sigma_2^3,$$

特征根为

$$\sigma_1^4 = 0, \sigma_2^3 = 0 \cdot \tag{9}$$

所有特征根为零,表明抛物化稳定性方程组(5a)～(5d)为抛物型的·通过类似的运算,可以求得二维可压缩稳定性方程组(3a)～(3d)的特征根为

$$\sigma_1^3 = 0, \lambda_4 = \frac{v}{U+u}, \lambda_{5,6} = \pm i, \lambda_{7,8} = \pm i, \lambda_{9,10} = \pm i, \tag{10}$$

其中 $\lambda = -\sigma_1/\sigma_2 \cdot \sigma_1^3 = 0$ 的三重零特征相应于二维可压缩稳定性方程组(5a) ～ (5d) 中主部为 $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ 和 $\partial\theta/\partial x$ 的三个方程,它们与方程组中其它七个方程的主部无关;其它七个特征根除一个为实根外其余六个均为虚根,因此二维可压缩稳定性方程组(3a)～(3d)为椭圆型·

下面将通过次特征与 Mach 数的关系,说明线性扩散抛物化稳定性方程组(5a)～(5d)在亚声速区域,保留了部分椭圆性质·去掉线性抛物化稳定性方程组(5a) (5d)的所有粘性项,即可得到线性扩散抛物化稳定性方程组(5a)～(5d)的次特征稳定性方程组

$$U\frac{\partial\rho}{\partial x} + \bar{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho}\frac{\partial v}{\partial y} = F_1, \tag{11a}$$

$$\frac{T}{(\rho+\bar{\rho})}\frac{\partial\rho}{\partial x}U + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial x} = F_2, \tag{11b}$$

$$U\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{T}{\rho+\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial y} = F_3, \tag{11c}$$

$$-\theta U\frac{\partial\rho}{\partial x} + (C_p - 1)\bar{\rho}U\frac{\partial\theta}{\partial x} = F_4 \cdot \tag{11d}$$

记 $Z = (\rho, u, v, V^{(y)}, \theta)$, 则可以将上述次特征稳定性方程组化为如下一阶拟线性偏微分方程组

$$A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} = F \cdot \tag{12}$$

次特征方程为

$$\det(\sigma_1 a_{ij} + \sigma_2 b_{ij}) =$$

$$\bar{\rho}^2 U^2 (C_p - 1)\sigma_1^2[(U^2 - a^2)\sigma_1^2 - a^2\sigma_2^2] = 0, \tag{13}$$

其中 $TC_p/(C_p-1)=a^2$, a 为声速·由次特征方程(13)得到次特征根为

$$\sigma_1^2=0,\ \lambda_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{M_U^2-1}}, \tag{14}$$

其中 $\lambda=-\sigma_1/\sigma_2$, $M_U=U/a$ 为未扰流方向的Mach数· 显然,次特征与Mach数有关 · 若 $M_U>1$,则次特征为实根,说明线性 PSE 为双曲 - 抛物型;若 $M_U<1$, 则次特征为复根,说明线性 PSE 存在剩余椭圆特性· 显然,剩余椭圆性不是由粘性耗散项引起的· 我们将在第 4 节讨论消除线性 PSE 的剩余椭圆特性的方法·

3 非线性 PSE 的特征和次特征

下面分析非线性 PSE 的特征次特征, 进而分析线性 PSE 和非线性 PSE 的次特征的差别, 讨论非线性 PSE 的次特征和 Mach 数的关系·记

$$Z=(\rho,u,U^{(y)},v,V^{(y)},\theta,\theta^{(y)})\cdot \tag{15}$$

将非线性抛物化稳定性方程组(4a)～(4d)化为一阶拟线性偏微分方程组

$$A\frac{\partial Z}{\partial x}+B\frac{\partial Z}{\partial y}=F\cdot \tag{16}$$

其特征方程为

$$\det(\sigma_1a_{ij}+\sigma_2b_{ij})=-\frac{4C_p\mu^3}{3Pr(\rho+\bar{\rho})^2Re^3}[(U+u)\sigma_1+v\sigma_2]\sigma_1^3\sigma_2^3=0, \tag{17}$$

特征根为

$$\lambda_1=\frac{V}{U+u},\ \sigma_1^3=0,\ \sigma_2^3=0\cdot \tag{18}$$

所有特征根均为实根,表明非线性扩散抛物化稳定性方程组(4a)～(4d)整体来说是双曲 - 抛物型·下面通过次特征与 Mach 数的关系,说明非线性扩散抛物化稳定性方程组(4a)～(4d)实质上在亚声速区域,保留了部分椭圆性质·

去掉非线性扩散抛物化稳定性方程组(4a)～(4d)的全部粘性项,即可得到非线性 PSE 的次特征稳定性方程组

$$(u+U)\frac{\partial\rho}{\partial x}+(\bar{\rho}+\rho)\frac{\partial u}{\partial x}+(\bar{\rho}+\rho)\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}=F_1, \tag{19a}$$

$$\frac{T+\theta}{\bar{\rho}+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+(u+U)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial x}=F_2, \tag{19b}$$

$$(u+U)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{T+\theta}{\rho+\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\theta}{\partial y}=F_3, \tag{19c}$$

$$-(T+\theta)(u+U)\frac{\partial\rho}{\partial x}-(T+\theta)v\frac{\partial\rho}{\partial y}+(C_p-1)(\rho+\bar{\rho})(u+U)\frac{\partial\theta}{\partial x}+(C_p-1)(\rho+\bar{\rho})v\frac{\partial\theta}{\partial y}=F_4\cdot \tag{19d}$$

将上述次特征稳定性方程组表示为关于 $Z=(\rho,u,v,\theta)$ 的一阶拟线性偏微分方程组

$$A\frac{\partial Z}{\partial x}+B\frac{\partial Z}{\partial y}=F\cdot \tag{20}$$

其次特征方程为

$$\det(\sigma_1a_{ij}+\sigma_2b_{ij})=(\rho+\bar{\rho})[-(u+U)\sigma_1+v\sigma_2]^2(C_p-1)\times\left\{[(u+U)^2-a^2]\lambda^2+2v(u+U)\lambda-a^2\right\}=0, \tag{21}$$

其中 $\lambda = -\sigma_1/\sigma_2$, $a^2 \cong a'^2 = (T+\theta)C_p/(C_p-1)$, a'为声速 · 根据次特征方程(21) , 可以得到如下四个次特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{u+U},\ \lambda_{3,4} = \frac{M_v M_{u+U} \pm \sqrt{M_v^2 M_{u+U}^2 + M_{u+U}^2 - 1}}{\sqrt{M_{u+U}^2 - 1}}, \tag{22}$$

其中 $M_v = v/a$ 为法向 Mach 数 , $M_{u+U} = (u+U)/a$ 为流向 Mach 数 · 从特征根 $\lambda_{3,4}$ 可以看出 ,非线性 PSE 的次特征与 Mach 数 M_{u+U} 有关 · 若 $M_{u+U} > 1$,次特征根为实数 ,从而非线性 PSE 为抛物型的 ;若 $M_{u+U} < 1$, 次特征根为复数 , 从而非线性 PSE 为椭圆型的 · 下面将讨论消除非线性 PSE 的剩余椭圆特性的方法 ·

4 特征次特征理论在消除 PSE 椭圆特性中的应用

由第 2 节和第 3 节的分析 ,可以根据特征和次特征理论来消除 PSE 的剩余椭圆特性 · 对线性 PSE ,其次特征与 Mach 数 M_U 有关 · 若 $M_U > 1$,则次特征为实根 ,说明线性 PSE 的次特征方程组为完全双曲 - 抛物型 · 若 $M_U < 1$,则次特征为复根 ,说明线性 PSE 保留了(剩余) 椭圆特性 · 显然 ,椭圆性不是由粘性耗散项引起的 · 由特征次特征理论知 ,若去掉方程(5a) 中扰动速度 u 在主流方向的偏导数$\bar{\rho}\partial u/\partial x$ (或者去掉方程(5b) 中$(T/(\rho+\bar{\rho}))(\partial\rho/\partial x)$,或者去掉方程(5c) 中$(T/(\rho+\bar{\rho}))(\partial\rho/\partial y)$, 即可消除线性 PSE 的剩余椭圆特性 · 事实上 ,线性 PSE 经上述运算后次特征根简化为

$$\sigma_1^2 = 0,\ \sigma_2^2 = 0, \tag{23}$$

次特征根均为零根 ,表明线性 PSE 为抛物型 · 因此 ,线性 PSE 已经完全抛物化 ,所得结论和文献[4]的结论一致 ·

利用特征次特征方法 ,也可以进一步消除非线性 PSE 的剩余椭圆特性 · 非线性 PSE 的次特征与扰动流的 Mach 数 M_{u+U} 有关 · 若 $M_{u+U} > 1$,则次特征为实根 ,说明 PSE 的次特征方程组为双曲 - 抛物型 · 若 $M_{u+U} < 1$,则次特征为复根 ,说明非线性 PSE 为椭圆型的 ,非线性 PSE 保留了(剩余) 椭圆性质 · 显然 ,椭圆特性不是由粘性耗散项引起的 · 去掉方程(4a) 中速度 u 在主流方向的偏导数$(\bar{\rho}+\rho)\partial u/\partial x$, 即可消除非线性 PSE 的剩余椭圆特性 · 事实上 ,非线性 PSE 经上述“去掉”运算后次特征根简化为

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \dfrac{v}{u+U}, \\ \lambda_3 = \dfrac{(C_p-1)^{1/2}v - (T+\theta)^{1/2}C_p^{1/2}}{(C_p-1)^{1/2}v}, \\ \lambda_4 = \dfrac{(C_p-1)^{1/2}v + (T+\theta)^{1/2}C_p^{1/2}}{(C_p-1)^{1/2}v}, \end{cases} \tag{24}$$

次特征根均为实数 ,表明非线性 PSE 为双曲 - 抛物型 · 因此 ,非线性 PSE 已经完全抛物化 ·

5 结 论

本文利用特征和次特征理论[2]分析了流体运动抛物化稳定性方程组(PSE)[2~5]的扩散抛物化性质 ,这与抛物化 N-S 方程的数学性质其实为扩散抛物化[6~8]的情况类似 · 并提出消除 PSE 的剩余椭圆特性的方法 · 线性 PSE 和非线性 PSE 经本文“去掉”运算后 ,已经完全抛物化 · 本文根据特征次特征理论提出了消除 PSE 剩余椭圆特性的方法 ,所得结论对线性 PSE 与文[4]

一致，但本文给出了 Mach 数的影响·

[参 考 文 献]

[1] Herbert Th, Bertolotti F P. Stability analysis of non-parallel boundary layers[J]. Bull American Phys Soc, 1987, **32**(8): 2097.

[2] 高智. 流体力学基本方程组(BEFM)的层次结构理论和简化 Navier-Stokes 方程组(SNSE)[J]. 力学学报, 1988, **20**(2), 107—116.

[3] Herbert Th. Nonlinear stability of parallel flows by high-order amplitude expansions[J]. AIAA J, 1980, **18**(3): 243—248.

[4] Haj-Hariri H. Characteristics analysis of the parabolic stability equations[J]. Stud Appl Math, 1994, **92**(1): 41—53.

[5] Chang C L, Malik M R, Erleracher G, et al. Compressible stability of growing boundary layers using parabolic stability equations[Z]. AAIA91-1636, New York: AAIA, 1991.

[6] 高智. 简化 Navier-Stokes 方程的层次结构及其力学内涵和应用[J]. 中国科学, A 辑, 1987, **17**(10): 1058—1070.

[7] 高智, 周光炯. 高雷数流动理论、算法和应用的若干研究进展[J]. 力学进展, 2001, **31**(3): 417—436.

[8] GAO Zhi, SHEN Yi-qing. Discrete fluid dynamics and flow numerical simulation [A]. In: F Dubois, WU Hua-mu Eds. New Advances in Computational Fluid Dynamics [C]. Beijing: Higher Education Press, Beijing, 2001, 204—229.

[9] Schlichting H. Boundary-Layer Theory[M]. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 1979.

Analysis and Application of Ellipticity of Stability Equations on Fluid Mechanics

LI Ming-jun, GAO Zhi

(LHD, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: By using characteristic analysis of the linear and nonlinear parabolic stability equations (PSE), PSE of primitive disturbance variables are prored to be parabolic in total. By using sub-characteristic analysis of PSE, the linear PSE are proved to be elliptical and hyperbolic-parabolic, for velocity U, in subsonic and supersonic: respectively $U + u$ in subsonic and supersonic, respectively. The methods are gained that the remained ellipticity is removed from the PSE by characteristic and sub-characteristic theories, the results for the linear PSE are consistent with the known results, and the influence of the Mach number is also given out. At the same time, the methods of removing the remained ellipticity are further obtained from the nonlinear PSE.

Key words: compressible fluid; parabolic stability equations; characteristic; sub-characteristic