

文章编号: 1005-9865 (2001) 03-0060-08

# 面板局部屈曲的船体双层板架整体屈曲分析

曾晓辉, 柳春图, 杨丽敏

(中国科学院 力学研究所工程科学部, 北京 100080)

**摘 要:** 首先应用 von Kármán 大挠度薄板方程, 对有初挠度的船体板进行后屈曲特性分析。以此为基础, 导出屈曲后板的减缩有效宽度。进而用减缩有效宽度作为双层板架中受压纵桁的带板宽度, 将双层板架模型化为四边弹性转角约束的正交异性板, 考虑横向剪切变形的影响, 提出了一种求解双层板架临界应力的方法。

**关键词:** 屈曲; 后屈曲; 有初挠度船体板; 双层板架; 横向剪切变形

**中图分类号:** U661.4 **文献标识码:** A

## Overall buckling analysis of double-wall ship grillage considering postbuckling behavior of flange

ZENG Xiao-hui, LIU Chun-tu, YANG Li-min

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** First, the postbuckling behavior of a simply-supported rectangular plate with initial deflection loaded along two opposite straight edges is analyzed using von Kármán equations. Then, a theoretical formula for calculating the reduced effective width is derived. The postbuckling plate is dealt with as an attached flange of the compressed beam, whose width is taken as the reduced effective width. After that, the double-wall grillage is simplified to an orthotropic plate with transverse shear deformation, whose boundary condition is elastic angle constrained. With such a simplified approach, a method for calculating double-wall grillage is proposed.

**Key words:** buckling; postbuckling; ship plate with initial deflection; double-wall grillage; transverse shear deformation

舰船的甲板(或船底)板架(即沿两个正交方向布置加筋的加筋板)发生整体屈曲是船体总纵弯曲时一种主要的失效模式。因此合理确定板架的临界应力,是船体强度评定中的一个重要问题。一些大型船舶及特种舰船(如航空母舰)的甲板和船底往往是双层板架,其中有的板在整体结构屈曲之前就已经屈曲了,从而处于后屈曲状态。对这种非常大型的结构进行非线性有限元分析代价十分高昂,在方案设计阶段,如此处理很不经济。为此,需要寻找准确、实用的计算双层板架临界应力的方法。

考虑到板架中的面板有可能处于后屈曲状态,首先对面板进行后屈曲分析,求得它的减缩有效宽度,将这一宽度作为板架中受压纵桁的带板宽度,进而就可计算板架的抗弯刚度。算得抗弯刚度后,就可将双层板架模型化为正交异性板(在分析弯曲问题时,一般是将双层板架化为正交异性板来处理。这样做不仅计算相对快速,而且也有足够的精确度<sup>[1]</sup>)。考虑到周围结构的影响,该正交异性板的边界条件应取为四边弹性转角约束。此外,由于双层板架的弯曲刚度很大,而剪切刚度相对较小,所以横向剪切变形不能忽略。

分析矩形板后屈曲特性的文献较多,但这些工作基本上只是给出某些特定边长比和初挠度下的荷载——挠度曲线(或应力分布示意图)<sup>[2,3]</sup>。这些结果并不能反映出矩形板的全部后屈曲特性,若欲全面了解板屈曲后的强度和刚度特性,还需要得到对任意边长比和初挠度均适用的  $\sigma_c$  和  $\sigma_a$  之间,  $\sigma_c$  和  $\sigma_a$  之间,  $d_a/d_c$  和  $\sigma_c$  之

收稿日期: 2000-06-28

作者简介: 曾晓辉(1972 - ),男,湖南新化人,博士后,主要从事船舶与海洋工程力学方面的研究。

间的函数关系。这些关系不仅能够更全面地反映出屈曲后板的基本特性,而且也是进行船体板架整体屈曲分析时不可缺少的关系式。Walker<sup>[4]</sup>给出了正方形板的上述显式关系,但对于具有任意边长比的矩形板,并未见到有学者给出类似解答。

计及横向剪切变形矩形板的屈曲分析已有一些,但目前仅能对简支和固支等边界条件下的各向同性板进行计算<sup>[5-8]</sup>,尚无学者给出适用于四边弹性转角约束正交异性板的处理方法。本文将给出上述问题的解。

### 1 船体板的后屈曲分析及减缩有效宽度

#### 1.1 von Kàrmàn 方程和边界条件

由于多种原因,船体板通常均有一定的初挠度,因此在分析时须考虑到这一点。有初挠度矩形薄板的 von Kàrmàn 大挠度方程为<sup>[2]</sup>:

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = - \frac{1}{2} L(W + W_0, W - W_0) \tag{1}$$

$$D \nabla^4 (W - W_0) = p_z + t \cdot L(W, F) \tag{2}$$

上两式中,  $L$  是微分算子:  $L(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}$ 。矩形板的几何形状和受力情况如图 1 所示。图中 2(a)、2(b) 分别为矩形板的长和宽,  $P$  为作用在  $X$  方向的压力,  $t$  为板厚,  $F$  为应力函数, 满足关系:  $\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \sigma_y, \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = \sigma_x, -\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  为作用在中面的正应力和剪应力,  $E$  为杨氏模量,  $W, W_0$  为总挠度和初挠度,  $D$  为板的弯曲刚度。  $p_z$  是法向压力, 文中  $p_z$  为 0。

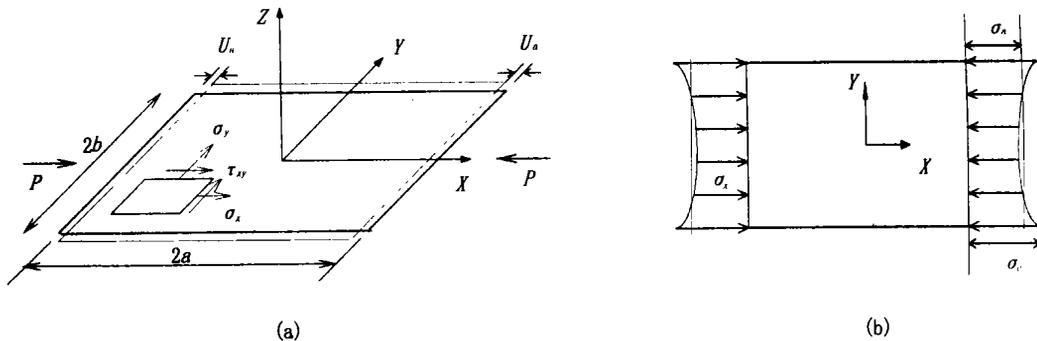


图 1 矩形板的几何形状和受力情况

Fig. 1 Geometric figure and load case of rectangular plate

由于船体结构中加强筋的抗扭刚度很小,所以可将船体板看作是四边简支的矩形板,其边界条件为:

- 1)  $W|_{\substack{X=\pm a \\ Y=\pm b}} = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}|_{X=\pm a} = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}|_{Y=\pm b} = 0。$
- 2) 在板的受压边 ( $X = \pm a$ ) 上,  $P = t \int_{-b}^b \sigma_x dY = 2bt \sigma_a。$
- 3) 在板的支持边 ( $Y = \pm b$ ) 上,  $\int_{-a}^a \sigma_y dX = 0。$
- 4) 板的四边保持直线。
- 5) 板的四边剪应力为零。

#### 1.2 von Karman 方程的解

可以将初挠度、总挠度、应力函数分别表示为:

$$W_0 = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{0(mn)} \cos \frac{mX}{2a} \cos \frac{nY}{2b} \tag{3}$$

$$W = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{(mn)} \cos \frac{mX}{2a} \cos \frac{nY}{2b} \tag{4}$$

$$F = \frac{1}{2} a Y^2 + \sum_{p=0,2,\dots} \sum_{q=0,2,\dots} (b_{pq} - b_{0(pq)}) \cos \frac{pX}{2a} \cos \frac{qY}{2b} \tag{5}$$

将式(3)、(4)、(5)代入方程(1)、(2),可得到<sup>[2]</sup>:

$$D \left[ \left( \frac{r}{2a} \right)^2 + \left( \frac{s}{2b} \right)^2 \right] [W_{rs} - W_{0(rs)}] + at \left( \frac{r}{2a} \right)^2 W_{rs} - \frac{t^4}{64 a^2 b^2} [A_n - A_{0(n)}] = 0 \quad (6)$$

式中:  $r, s = 1, 3, 5 \dots, A_n, A_{0(n)}$  是  $W_{mn}, W_{0(mn)}, b_{pq}, b_{0(pq)}$  的函数。解非线性方程组(6)就可以得到板的后屈曲解。

先以边长比  $a/b = \sqrt{2}$  矩形板为研究对象,用参数摄动法解方程组(6),进而给出上述显式关系。后面的分析表明,此类矩形板的结果可推广到  $a/b > \sqrt{2}$  的矩形板。

由文献[9, 10]的实际测量结果知,  $a/b = \sqrt{2}$  的船用钢板的初挠度可用下式表达:

$$W_0 = W_{0(11)} \cos \frac{X}{2a} \cos \frac{Y}{2b} \quad (7)$$

船体板中的  $w_{cr}$  很少超过  $3^{[11]}$ 。由文献[2]可知,此时挠度函数表达式(4)可以只取含  $W_{11}, W_{13}, W_{31}$  的前三项而保证足够精度。因此本文将总挠度取为如下形式:

$$W = W_{11} \cos \frac{X}{2a} \cos \frac{Y}{2b} + W_{13} \cos \frac{X}{2a} \cos \frac{3Y}{2b} + W_{31} \cos \frac{3X}{2a} \cos \frac{Y}{2b} \quad (8)$$

把式(7)、(8)代入(6),可得如下三个方程:

$$f_i(W_{11}, W_{13}, W_{31}) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

式中:  $w_{mn} = W_{mn}/t$ 。令  $x = 2bP/Et^3, \quad \eta = (x - c)/c$ ,  $c$  为某一选定的参考点。以  $\eta$  为摄动参数,把  $w_{11}, w_{13}$  和  $w_{31}$  展开成  $\eta$  的幂级数 ( $\eta = W_{0(11)}/t$ ):

$$\left. \begin{aligned} w_{11} &= w_c + k_1 \eta + k_2 \eta^2 + k_3 \eta^3 + k_4 \eta^4 \\ w_{13} &= w_{c2} + k_{21} \eta + k_{22} \eta^2 + k_{23} \eta^3 + k_{24} \eta^4 \\ w_{31} &= w_{c3} + k_{31} \eta + k_{32} \eta^2 + k_{33} \eta^3 + k_{34} \eta^4 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),令方程左右两边关于  $\eta$  的同阶幂的系数分别相等,可获得式(10)中各未知系数的值。

本文计算了边长比  $a/b = 1$ , 无量纲初挠度  $\eta = 0.1$  时  $w_{11}, w_{13}$  和  $w_{31}$  的值,并与 Yamaki<sup>[3]</sup> 给出的解作了比较,见表 1。由该表可见,只要把  $c$  选在  $x$  附近,即  $(x - c)/c$  不太大(小于 0.4),摄动展开式就是足够精确的(误差最大为 5%)。

表 1  $a/b = 1, \eta = 0.1$  时的  $w_{mn}$

Tab. 1 The value of  $w_{mn}$  when  $a/b = 1, \eta = 0.1$

		$w_{11}$		$w_{13}$		$w_{31}$	
$\eta$	$\eta_c$	Yamaki <sup>[3]</sup>	式(10)	Yamaki <sup>[3]</sup>	式(10)	Yamaki <sup>[3]</sup>	式(10)
0.282	0.213	0.35	0.349 0	$-2.7 \times 10^{-4}$	$-2.4 \times 10^{-4}$	$-3.5 \times 10^{-4}$	$-3.37 \times 10^{-4}$
0.356	0.282	0.60	0.612 9	$-1.38 \times 10^{-3}$	$-1.36 \times 10^{-3}$	$-1.99 \times 10^{-3}$	$-1.93 \times 10^{-3}$
0.375	0.356	0.68	0.677 2	$-1.97 \times 10^{-3}$	$-1.97 \times 10^{-3}$	$-2.95 \times 10^{-3}$	$-2.89 \times 10^{-3}$
0.418	0.375	0.85	0.847 3	$-3.78 \times 10^{-3}$	$-3.78 \times 10^{-3}$	$-5.59 \times 10^{-3}$	$-5.81 \times 10^{-3}$
0.487	0.418	1.10	1.098 2	$-7.82 \times 10^{-3}$	$-7.79 \times 10^{-3}$	$-1.29 \times 10^{-2}$	$-1.28 \times 10^{-2}$
0.654	0.487	1.60	1.597 7	$-2.11 \times 10^{-2}$	$-2.05 \times 10^{-2}$	$-4.04 \times 10^{-2}$	$-3.94 \times 10^{-2}$
0.965	0.654	2.10	2.079 4	$-4.14 \times 10^{-2}$	$-3.96 \times 10^{-2}$	$-9.33 \times 10^{-2}$	$-8.81 \times 10^{-2}$

### 1.3 几种显式函数关系式

获得如式(10)所示的挠度系数关于荷载参数  $\eta$  的展开式后,就可以推导出所需要的显式关系。

板边应力  $\sigma_e$  为:  $\sigma_e = x \Big|_{Y=\pm b}^{X=\pm a} = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \Big|_{Y=\pm b}^{X=\pm a}$ 。考虑到式(5),用挠度系数  $w_{mn}, w_{0(mn)}$  替换应力函数系数  $b_{pq}, b_{0(pq)}$ ,并注意到式(10)和  $\eta = (x - c)/c$ ,可推出:

$$\sigma_e = H(\eta) \quad (11)$$

式(11)就是希望获得的  $\sigma_e$  与  $\eta$  之间的显式函数关系。

接下来推导另两个关系。平均应变为  $\epsilon_a = U_a/a$ ,  $U_a$  为板受压边沿  $x$  方向的位移(如图 1)。

$$a \cdot a = U_a = \int_0^a \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_0}{\partial X} \right)^2 J / Y = \pm b dx$$

把式(5)、(7)、(8)、(10)代入上式,并注意到  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ,有:

$$a = \frac{a}{E} - \frac{2t^2}{32a^2} H(a) \tag{12}$$

对式(12)左右两边求关于  $a$  的导数,并做必要的变换得:

$$\frac{d}{d a} = E \cdot S(a) \tag{13}$$

$d/d a$  反映了矩形板的刚度特性。本文用式(12)和式(13)计算了几种情况下的矩形板后屈曲特性曲线(如图2、图3所示),并与 Walker<sup>[4]</sup>在退化情况下的相应解(正方形板)做了比较。显而易见,本文式(12)和式(13)给出的解与 Walker 的解非常吻合。

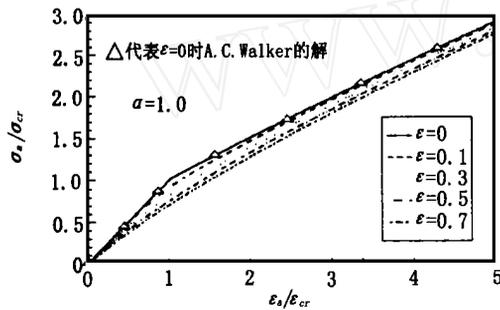


图2 正方形的  $d/d a \sim d/d a$  曲线

Fig.2  $d/d a \sim d/d a$  curve of square plate

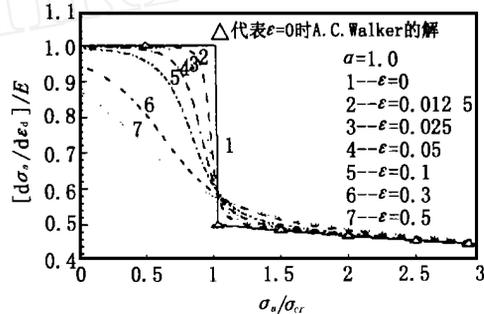


图3 正方形的  $(d/d a) / E \sim d/d a$  曲线

Fig.3  $(d/d a) / E \sim d/d a$  curve of square plate

### 1.4 减缩有效宽度

在考虑屈曲后板对板架整体稳定性的贡献时,采用减缩有效宽度  $B_e$  作为受压纵桁的带板宽度更为合理<sup>[12]</sup>,但文献[12]中只给出了该宽度的定义式,并未给出可实用的计算公式。基于上面所做的后屈曲分析,本文推得该宽度的计算公式。由文献[12]知,  $B_e$  的定义为:

$$B_e = B \cdot (d/d a)$$

其中,  $B = 2b$ , 是板宽。对式(11)的左右两边求  $a$  的导数,并代入上式,可得到:

$$B_e = B / \frac{dH(a)}{d a} \tag{14}$$

以上工作是在边长比  $a/b = \sqrt{2}$  的情况下进行的。下面说明上述结果如何推广应用于  $a/b > \sqrt{2}$  的矩形板。

### 1.5 边长比大于 $\sqrt{2}$ 的情况

$a/b > \sqrt{2}$  的长矩形板的初挠度通常由许多余弦形式的模态分量共同组成(见式(3))。Ueda<sup>[9]</sup>等人用有限元法对一些初挠度含许多模态分量的长矩形板进行了后屈曲计算。以计算结果为基础,Ueda 提出“等效矩形板”(equivalent rectangular plate)的概念和“挠度方法”(deflection method)来计算矩形板的后屈曲强度。取等效矩形板的宽、厚与原矩形板相等,长度分别取为原矩形板屈曲时的半波长,或比屈曲波形高一至二阶波形的半波长。取初挠度波形的半波长与等效矩形板的板长相等。对这三种板长的等效板进行后屈曲强度分析,承载能力最低的等效板的后屈曲特性就代表了原矩形板的后屈曲特性。

根据 Ueda 的这一方法,可以采用这样的步骤分析  $a/b > \sqrt{2}$  的长矩形板:1)先取出它的三种等效矩形板。2)按本文前面提到的方法对三种等效板进行后屈曲分析(可以证明,这三种等效板的边长比都小于 $\sqrt{2}$ )。3)在这三种等效板中,当板边应力  $\sigma_e = \sigma_s$  ( $\sigma_s$  为材料屈服极限)时,对应的平均应力  $\sigma_a$  最小的板就是承载能力最小的板,它的后屈曲特性就反映了原矩形板( $a/b > \sqrt{2}$ )的后屈曲特性,其减缩有效宽度就是原矩形板的减缩有效宽度。

## 2 双层板架的整体屈曲分析

### 2.1 双层板架的正交异性板化

在求得了板的减缩有效宽度之后,对双层板架进行模型化。由于大型船舶双层板架的纵横桁材较密集,板厚、纵骨、纵横桁材腹板的尺寸沿板架长度及宽度基本保持不变,因此可以通过引进如下的三个量把这种双层板架模型化为正交异性板(文献[1]较详细地阐明了理由,双层板架如图 4 所示):

$$D_x = \frac{EI_{xe}}{(1 - \mu^2) s_x}, D_y = \frac{EI_{ye}}{(1 - \mu^2) s_y}, D_{xy} = \frac{Eh^2 \uparrow R_s}{2(1 + \mu)}$$

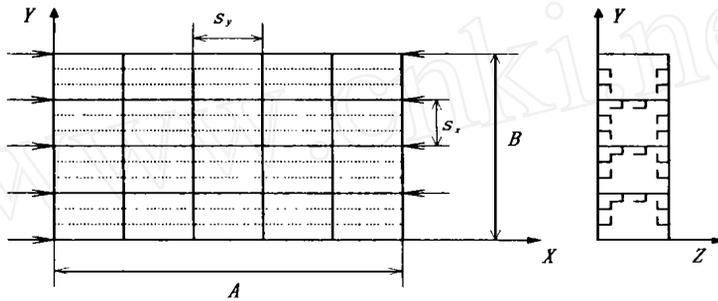


图 4 双层板架结构示意图

Fig.4 The sketch of double-wall grillage

双层板架的长、宽为  $A$ 、 $B$ ,纵、横腹板间距为  $s_x$ 、 $s_y$ 。上式中,  $E$  是弹性模量,  $\mu$  是泊松比,  $I_{xe}$  是间距  $s_x$  内的纵桁与面板的组合惯性矩。在计算  $I_{xe}$  时, 屈曲后面板计入到组合惯性矩中的宽度应取为减缩有效宽度, 由式(14)给出。  $h$  是双层板架的高度,  $R_s$  是考虑腹板发生剪切畸变而引入的减缩因子<sup>[1]</sup>。  $\uparrow = 2t_u t_l / (t_u + t_l)$ ,  $t_u$ 、 $t_l$  是上、下面板厚度。由于各国船级社建造规范均要求支持于横构件上的单跨纵骨的临界应力不小于材料的屈服极限, 所以在讨论板架整体屈曲时不必考虑纵骨的局部屈曲, 在计算组合惯性矩时应将纵骨全部计入。

将双层板架从相邻结构中分离出来, 相邻结构对它的约束作用就构成了双层板架的边界条件。实际板架结构的边界条件是介于简支和固支之间的弹性转动约束。通常把板架边界的这种约束看成线弹性转动弹簧, 用弹性常数  $C$  来表示约束程度 ( $C$  的含义是板端部产生单位弧度转角所需的力矩)<sup>[1]</sup>。

至此, 双层板架结构已可以转化成正交异性板, 其弯曲和扭转刚度分别为  $D_x$ 、 $D_y$ 、 $D_{xy}$ , 边界条件为弹性转角约束, 弹性常数为  $C$ 。那么, 对双层板架屈曲问题的分析此时已可以转化为对相应正交异性板的分析。需说明的是: 本文考虑的双层板架屈曲模式为包括面板局部屈曲的整体屈曲, 不考虑其它形式的屈曲。

### 2.2 考虑横向剪切变形的正交异性板的临界载荷

由于双层板架的剪切刚度较小, 横向剪切变形已成为不可忽略的量<sup>[1]</sup>, 因此在将其模型化为正交异性板后, 不能采用直法线假设。放弃直法线假设, 计入横向剪切变形的的方法较多。本文采用如下方法: 认为变形前中面的法线变形后仍为直线, 但不再正交于变形后的中面。这时板的变形由三个广义位移来描述, 即中面挠度  $w(x, y)$  和板变形前中面法线的两个转角  $(x, y)$ 、 $(x, y)$ 。其中  $(x, y)$  是法线在  $xz$  平面的转角,  $(x, y)$  是法线在  $yz$  平面的转角。约定从  $x$  轴正向向  $z$  轴正向转动为正, 从  $y$  轴正向向  $z$  轴正向转动为正。

以下采用能量法来求正交异性板的临界载荷。其中的关键是给出满足弹性转角约束边界条件的三个广义位移函数。经过反复分析、试算和验证, 本文构造出满足这种边界条件的下列位移函数:

$$\begin{cases} w(x, y) = Bw_{mn}w_m(x)w_n(y) \\ (x, y) = mn_m(x)w_n(y) \\ (x, y) = mnw_m(x)w_n(y) \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$w_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + G_{xm}} \left\{ \sin \frac{m-x}{A} + G_{xm} \left[ 1 - \frac{2x}{A} + \frac{2}{m} \sin \frac{m-x}{A} - \cos \frac{m-x}{A} \right] \right\} & m \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{1 + G_{xm}} \left\{ \sin \frac{m-x}{A} + G_{xm} \left[ 1 - \cos \frac{(m+1)x}{A} \right] \right\} & m \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (16)$$

$$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + G_{xm}} \left\{ \cos \frac{m-x}{A} + G_{xm} \left[ m \sin \frac{m-x}{A} - 4 \sin^2 \left( \frac{m-x}{2A} \right) \right] \right\} & m \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{1 + G_{xm}} \left\{ \cos \frac{m-x}{A} + G_{xm} \sin \frac{(m+1)x}{A} \right\} & m \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (17)$$

$$G_{xm} = \begin{cases} \frac{mR}{(m+1)^2} & m \text{ 为奇数} \\ \frac{mR}{2} & m \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (18)$$

$w_{mn}$ 、 $m_n$ 、 $m_n$ 分别为三个位移的幅值参数。 $R = CL/D$ 为无量纲边界约束弹性常数,式(16)、式(17)中自变量为  $x$  时, $L$  取为板长  $A$ ;自变量为  $y$  时, $L$  取为板宽  $B$ 。同样, $D$  也取相对应的刚度值。只要把  $w_m(x)$ 、 $m(x)$  中的  $m$ 、 $A$ 、 $x$  取为相应的  $n$ 、 $B$ 、 $y$ ,即可得到  $w_n(y)$ 、 $m_n(y)$ 。 $m$  是方程  $\tan(m/2) = m/2$  的第  $m$  个正实根。容易验证,式(15)~式(18)所给出的位移模式完全满足板的边界条件, $R=0$  和  $R \rightarrow \infty$  这两种极端情况分别对应于板的简支(挠度为 0,转角不为 0)和固定(挠度、转角均为 0)边界条件。

### 2.3 临界载荷的计算

计及横向剪切的正交异性板的应变能为:

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint_A D_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + D_{33} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + A_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 dx dy \quad (19)$$

其中, $D_{ij}$ 和  $A_{kk}$ 分别是弯曲和剪切刚度。转角约束变形能为:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_x \int_0^b [(\theta/x=0)^2 + (\theta/x=a)^2] dy + \frac{1}{2} C_y \int_0^a [(\theta/y=0)^2 + (\theta/y=b)^2] dx \quad (20)$$

外力的力函数为:

$$W = \frac{1}{2} N \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (21)$$

其中, $N$  为单位宽度的力,由势能极小原理有:

$$(U_0 + U_1 - W) = 0 \quad (22)$$

将式(15)~(21)代入式(22),经过复杂的计算,可得到:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{mn} \\ m_n \\ w_{mnp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

其中, $K_{ij}$ 是与板的几何尺寸、刚度、屈曲波形的半波数  $m$ 、 $n$  等有关的参数。板发生屈曲时, $w_{mn}$ 、 $m_n$ 、 $w_{mnp}$ 不全为 0,于是令式(23)的系数行列式等于 0,即可得到对应于给定的各  $m$ 、 $n$  的特征值。其中的最小值就是所求的临界载荷。

### 2.4 算例及分析

为验证上述方法的正确性,下面退化到四边简支和固支各向同性板的情况进行计算,并与现有解做比较。之后,对文献[1]给出的一个双层板架进行了计算。

先对两种边界条件下的各向同性矩形板进行计算,宽厚比  $B/t$  分别取为 100 和 20,引入系数  $k$  表示临界应力: $k = \sigma_{cr} / (\sigma_0^2 D/B^2 t)$ 。当  $B/t=100$  时,是很薄的板,剪切影响很小,本文给出的结果与不考虑横向剪切的经典解非常一致,见表 2 和表 3 的第三行。表 2 和表 3 的第四行列出  $B/t=20$  时,两种边界条件下的临界应力系数。通过与不考虑剪切的解(文献[13,14])比较可看出,随着板厚的增加,剪切变形明显使临界应

力系数降低。

表 2 四边简支矩形板的临界应力系数  $k$

Tab. 2 The critical stress coefficient  $k$  of simply-supported rectangular plate

$A/B$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
文献[13]	8.41	6.25	5.14	4.53	4.20	4.04	4.00	4.04	4.13	4.28	4.47
本文( $B/t=100$ )	8.39	6.24	5.13	4.53	4.20	4.04	4.00	4.03	4.13	4.28	4.47
本文( $B/t=20$ )	7.98	6.03	5.00	4.43	4.12	3.98	3.94	3.98	4.08	4.23	4.42

表 3 受载边固支, 支持边简支矩形板的临界应力系数  $k$

Tab. 3 The critical stress coefficient  $k$  of clamped and simply-supported rectangular plate

$A/B$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.73	1.8	2.0
文[14]	13.38	8.73	6.74	5.84	5.45	5.33	5.18	4.85
本文( $B/t=100$ )	13.30	8.66	6.68	5.78	5.43	5.28	5.12	4.79
本文( $B/t=20$ )	12.30	8.27	6.48	5.66	5.35	5.15	5.00	4.70

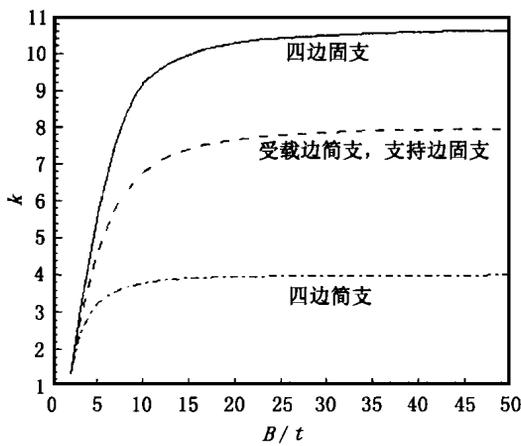


图 5 板厚对临界载荷的影响

Fig. 5 Effect of thickness on critical stress

文献[5]~[8]考虑了横向剪切变形的影响, 分析了四边简支和固支各向同性板的屈曲问题。表 4 和表 5 列出了本文计算结果与文献[5]~[8]的比较, 从中可看出吻合良好。图 5 给出  $A/B=1$  时, 三种边界条件下临界应力系数  $k$  随板厚的变化曲线。

最后对文献[1]给出的用于弯曲试验的双层板架进行屈曲计算。由于该板架的原始数据较多, 为节省篇幅, 以下只给出简化为正交异性板后的有关参数(原始数据可参见文献[1])。经过计算, 该板架的面板未局部屈曲, 因此计算弯曲刚度时面板全部有效, 横向剪切的影响通过将剪切刚度  $A_{11}$ 、 $A_{22}$  代入式(23)中的  $K_{ij}$  加以考虑, 板架的边界条件取为简支。该板架的几何尺寸、经上述计算后得到的刚度参数和进而算得的临界应力列于表 6。

表 4 四边简支正方形板的临界应力系数  $k$

Tab. 4 The critical stress coefficient  $k$  of simply-supported square plate

$B/t$	本文	文献[5]	文献[6]	文献[7]	文献[8]
100.0	4.000 00	4.000 0	4.000 0	4.062 5	4.025
2	3.944 38	3.944 4	3.911	3.999 1	3.981
10	3.786 45	3.786 5	3.741	3.829 9	3.849
6.666 7	3.549 58	3.549 6	—	3.584 0	3.643

表 5 四边固支正方形板的临界应力系数  $k$

Tab. 5 The critical stress coefficient  $k$  of clamped square plate

$B/t$	本文	文献[6]	文献[5]
100.0	10.655 5	10.811	10.990 3
20	10.280 1	10.318	10.378 8
10	9.272 2	9.151	8.915 9
6.666 7	7.491 3	7.692	7.191 6

表 6 某双层板架的临界应力相应参数

Tab.6 The critical stress of a double-wall grillage

$D_x/(N \cdot m)$	$D_y/(N \cdot m)$	$D_{xy}/(N \cdot m)$	$A_{11}/(N/m)$	$A_{22}/(N/m)$	$A/m$	$B/m$	$t/m$	板架的临界应力
$4.43 \times 10^6$	$3.79 \times 10^6$	$9.02 \times 10^5$	$3.48 \times 10^7$	$2.64 \times 10^7$	3.314 7	2.235 2	0.141 5	$\sigma_{cr} = 1.412 3 \times 10^8 N/m^2$

### 3 结 语

合理确定双层板架的临界应力,是船体强度评定中的一个重要问题。对于大型船舶的屈曲分析而言,采用正交异性板理论可较为快速、合理地算得其临界应力。本文综合考虑了板架中面板的后屈曲状态、板架的横向剪切变形以及四边弹性角约束的边界条件,给出了一种计算双层板架临界应力的方法,得出以下结论:

1) 应用 von-Karman 大挠度薄板方程,对四边简支的有初挠度矩形板在承受单向面内压力情况下的后屈曲特性进行了较全面的分析,其中挠曲函数取为双傅氏级数展开式的前三项。

2) 采用参数摄动法求解非线性代数方程组(10),得到板边应力  $\sigma_e$  与平均应力  $\sigma_a$  之间、平均应变  $\epsilon_a$  与  $\epsilon_e$  之间、刚度  $d_e/d_a$  与  $\sigma_a$  之间的显式函数表达式(11)~(13)。应用得到的显式表达式计算了边长比和初挠度不同的若干种受压板,获得了减缩有效宽度公式(14)。

3) 由于双层板架的剪切刚度较小,在按正交异性板理论进行屈曲分析时,必须计及横向剪切变形效应。本文通过放弃直法线假设,引入三个广义位移来考虑这种影响。另外本文方法还考虑了弹性角约束边界条件。

4) 对几种边界条件下,不同边长比和宽厚比的一系列矩形板进行了屈曲计算。与退化情况下的解(包括不考虑剪切的解和某些特定边界条件下计及剪切的各向同性板的解)的比较表明,本文所提出的方法是合理的、可行的。遗憾的是,至今尚未见到有关双层板架屈曲实验的资料。为了进一步完善本文的方法,今后应开展这方面的研究工作。

### 参考文献:

[1] Hughes O F. Ship structural design (a rational-based, computer-aided, optimization-approach) [M]. New York:John & Sons,1983.

[2] Coan J M.Large deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression[J].J. of Applied Mechanics,1951, 18:143-151.

[3] Yamaki N. Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression[J].J. of Applied Mechanics,1959,26:407-414.

[4] Walker A C. The postbuckling behaviour of simply-supported square plates[J]. The Aeronautical Quarterly,1969,20:203-222.

[5] Rao G V, Venrataramana J, Raju K K. Stability of moderately thick rectangular plates using a high precision triangular finite element [J]. Comp. & Struct.,1975,5:257-259.

[6] Srinivas S, Rao A K. Buckling of thick rectangular plates[J]. AIAA J., 1969,7:1645-1646.

[7] 罗继伟. 中厚板屈曲的平衡模型有限分析[J]. 固体力学学报,1983,(2):177-185.

[8] 华伯浩,吴长春,刘小玲. 模糊试解和杂交方法对厚、薄板屈曲的统一分析[J]. 固体力学学报,1985,(2):160-169.

[9] Ueda Y, Yao T. The influence of complex initial deflection mode on the behavior and ultimate strength of rectangular plates in compression[J].J. of construct. Steel Research,1985,5:265-302.

[10] Kniecik M, Jastrzebski T, Kuzniar J. Statistic of ship plating distortions[J]. Marine Structures,1995,8:119-132.

[11] Bleich F. Buckling strength of metal structures[M]. New York:McGraw Hill,1952.

[12] Faulkner D. A review of effective plating for use in the analysis of stiffened plating in bending and compression[J].J. of Ship research, 1975,19(1):1-17.

[13] Timoshenko S. Theory of elastic stability[M]. New York:McGraw-Hill,1961.

[14] 西曼斯基, A. 船舶结构力学手册(2) [M]. 上海:上海科学技术出版社,1966.