

砌体结构开裂过程细观损伤数值模型及其分析方法

王述红¹, 唐春安^{1,2}, 朱浮声¹, 朱万成¹

(1. 东北大学 岩石破裂与失稳研究中心 辽宁沈阳 110004 2. 中国科学院力学所非线性力学国家重点实验室 北京 100080)

摘要:考虑材料的非均匀性特点,基于损伤力学和弹性脆性理论,提出了块体结构开裂过程数值分析方法,采用复合材料破裂过程数值分析(MFPA^{2D})模型,从细观力学层次上模拟了砌体结构试件局部荷载下从损伤到开裂破坏的全过程,数值模拟结果与试验结果较为吻合。验证了该理论分析方法的正确性和模型的合理性,对于理解砌体结构开裂的非线性过程、结构可靠性分析等具有重要意义。同时为砌体结构的破坏与失稳预测预报基础理论的研究提供新的分析方法。

关键词:细观损伤模型;不均匀性;裂缝群开展与贯通;砌体结构开裂;数值分析

中图分类号:TU528 文献标识码:A

Constitutive damage model and its numerical method of cracking process of masonry structure

WANG Shuhong¹, TANG Chun'an^{1,2}, ZHU Fusheng¹, ZHU Wancheng¹

(1. Center for Rock Instability and Seismicity Research, Northeastern University, Shenyang 110006, China;

2. National Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083, China)

Abstract: In consideration of the heterogeneous characteristic of material and by virtue of the damage mechanics and elastic-brittle theory, the numerical method was brought out to simulate the cracking process of masonry structure. The material failure process analysis (MFPA^{2D}) model was set up to simulate the whole failure process of the masonry structure specimen from initiation to cracking. The numerical results keep in accordance with the experimental results, and validate the correctness of analysis method and the rationality of the model. It is helpful to research the non-linear failure process of masonry structure and make the reliability analysis, and at the same time, a new method is applied to research the basic theory of forecasting the failure and seismicity of masonry structure.

Keywords: Constitutive damage model; heterogeneity; crack formation and coalescence; cracking of masonry structure; numerical analysis

1 引言

砌体材料结构是我国应用最广泛的结构形式。但是砌体结构房屋普遍存在着结构、温度、干缩裂缝,尤其是国家大力推广的节土节能、取代粘土砖的新型砌体材料结构的裂缝更为严重。砌体裂缝有损观感,影

响结构的耐久性,严重危及结构的承载能力和抗震能力,已引起国家主管部门和社会的极大关注。近年来,国际上对砌体结构中裂缝(群)相互作用及其断裂问题,大多集中在结构试验研究阶段,如 Miha 和 Abrams 对不同荷载下砌体结构的性能进行了实验研究,并得出了滞回曲线^[1,2]; Yaw-Jeng Chiou、Milad M ALShebani 等对砌体结构的轴力、弯矩作用下的性能进行了研究^[3,4],提出了抗弯、抗剪承载力的计算公式。我国从 70 年代后期开始进行试验研究,取得了一些研究成果^[5-8]。

目前科学工作者正在试图寻求一种近似算法,结合理论、试验及数值模拟来研究砌体结构的性能,力图在细观裂缝发展和宏观力学性能之间架起一座桥梁。数值模拟方法被看成是解决这一问题的有效途

基金项目:国家杰出青年科学基金资助(59525408),辽宁省自然科学基金资助(00021008),中国博士后科学研究基金资助(0001-14 第 30 批)

作者简介:王述红(1969-),男,江苏泰州人,工学博士,讲师。

收稿日期:2002 年 4 月

径。S Briccoli Bati、周炳章、曾晓明等人已开展过这方面的研究^[9-11]。但总体上说,砌体结构破裂机理研究无论是国外还是国内主要是集中在假设模型基础上的静力性能分析和利用有限元提出一些简化模型对砌体的性能进行研究,目前有关砌体破裂模式数值模拟的研究,由于所处理破坏问题的复杂性,很难对砌体材料从变形、破裂全过程进行数值模拟,更难以给出有关破裂过程的时空分布图象。

由东北大学开发的用于复合材料破坏全过程分析的软件系统 MFPA^{2D},就是基于弹性损伤模型的一个数值模拟工具,从复合材料的细观结构入手,来研究复合材料的破坏规律。该数值模拟方法认为材料的细观非均匀性是造成其宏观非线性的根本原因^[12],充分考虑了材料性质的非均匀性,认为材料宏观破坏是细观单元破坏的积累过程。从细观的角度来说,认为构成材料的每一个微元体可以认为是均匀、连续的介质,但是这些微元体之间的力学性质(弹性模量、强度等)可能千差万别,包含缺陷多的微元体间表现出很大的离散性。MFPA^{2D}方法采用了 Weibull 分布来描述微元体的力学属性的离散性,用弹性损伤力学进行应力分析。该系统自开发以来,已经成功地应用于岩石和混凝土等准脆性材料破裂过程的研究^[13,14]。关于 MFPA^{2D}理论方面更为详尽的介绍参见文献[12]和[17]。

本文采用 MFPA^{2D}对砌体结构试件从损伤到开裂破坏过程进行了数值模拟方面的研究,不但可以得到各个加载步的位移场和应力场,而且能够通过逼真的图形显示观察到砌体结构中裂纹的萌生、扩展、贯通直至整个结构破裂的全过程。该方法的提出对于了解砌体结构开裂的非线性过程及进行结构可靠性分析等具有借鉴意义。

2 模型建立

砌体结构破裂过程在细观上是非均匀渐进变形诱致破裂的非线性过程,在宏观上是连续被破裂成非连续的多裂缝萌生和扩展过程。砌体结构材料力学性质的弱化是由于内部结构在受力作用后不断损伤导致裂纹产生而引起的。对于砌体结构内部结构弱化的研究,细观损伤力学是一有效的工具。本文基于对砌体细观结构的认识,假定砌体结构为由砂浆基质、块体材料及它们之间的粘连带组成的三相复合材料,为了

考虑各相组分的非均匀性,各组分的材料性质按照某个给定的 Weibull 分布来赋值。细观单元满足弹性损伤的本构关系。应用弹性有限元法作为应力分析工具,计算分析对象的应力场和位移场。同时,最大拉应力准则和摩尔库仑准则分别作为该损伤本构关系的损伤阈值,即单元的应力或者应变状态达到最大拉应力准则和摩尔库仑准则时,认为单元开始发生拉伸或者剪切初始损伤。

尽管从宏观上讲砌体结构材料可能具有明显的宏观非线性性质,但从细观上讲,局部细观单元体的破裂性质可以假定为弹-脆性行为。细观单元体尺寸取得越小,材料越均匀,这种弹-脆性的性质就越明显。从这种意义上说,假定细观单元体为弹-脆性材料是合理的。在一个统一的变形场中,微破裂不断产生的原因除了载荷不均、单元外形不够光滑等结构因素形成应力集中之外,更主要的是细观单元体力学性质的不均匀性。可以认为材料的非线性特征与其细观非均匀性有直接联系。

为了描述材料性质的非均匀性,假定组成材料细观单元的力学性质满足 Weibull 分布,该分布可以按照如下分布密度函数来定义

$$f(u) = \frac{m}{u_0} \left(\frac{u}{u_0}\right)^{m-1} \exp\left(-\frac{u}{u_0}\right)^m \quad (1)$$

式中, u 代表满足该分布参数(例如强度、弹性模量、泊松比等)的数值;而 u_0 是一个与所有单元参数平均值有关的参数,但其数值并不是该平均值。形状参数 m 定义了 Weibull 分布密度函数的形状。我们把 u 和 m 称为材料的 Weibull 分布参数,对于材料的每个力学参数都必须在给定其 Weibull 分布参数的条件下按照式(1)给定的随机分布赋值。当 $u_0 = 100$, m 分别为 1.5、3.0 和 6.0 时,Weibull 分布密度函数的曲线如图 1 所示。Weibull 分布参数 m 反映了参数的离散程度,当其由小到大变化时,材料细观单元强度分布密度函数由矮而宽到高而窄变化,细观单元强度分布变得较为集中,材料强度的均质性较为均匀,材料内部所包含的大部分细观单元近乎相同,接近于参数 u_0 。显然,参数 m 反映了数值模型中材料结构的均质性,我们称之为均质度, m 越大,组成材料细观单元越趋于均匀。

各个试样内不同强度的单元数目的分布满足图 1 定义的 Weibull 分布。随着形状参数 m 的增加,各个单元的强度接近于给定的参数 u_0 ,这表示该试样的强度分布较为均匀;反之,则试件的强度分布较为离散。模

型中,研究对象被离散为等面积的长方形(或者正方形)单元。该单元也被作为有限元应力分析的四边形等参元。为了使模型能够反映研究对象(例如砌体结构)的细观特征,单元的数目尽可能足够多。但由于现阶段计算机速度的限制,过多的单元数目往往在计算时间上是不允许的。单元的尺寸选择应根据所研究问题的精度、范围和计算条件而定。但对于某一特定模型,单元应足够小,以能够精确地反映材料的非均匀性质。因此,对于非均匀性描述而言,要包含与问题有关的最重要的信息,但是又不因为过于繁杂而失去可操作性。

在上面的数值试样中,所有单元的参数分布就由一个 Weibull 分布来表达,调整不同的均质度参数 m 将生成不同的数值试样。在实际应用中可以指定局部区域材料的性质,以使试样更符合实际的非均匀材料试样。例如砌体结构的数值模拟中,其细观的结构特征特别明显,可以先用一个 Weibull 分布来描述块体材料的非均匀性,进而指定局部区域的单元为砂浆基质、界面,以取代原来该单元的力学性质。当然,对于砌体结构而言,各组块体的弹性模量和强度远远地高于砂浆基质和界面的,一般按照有关手册选取。砂浆相对较弱,其强度和弹性模量都比块体材料低。在块体材料和砂浆基质之间有一层代表界面的单元。

此外,由式(1)定义的非均匀性特征实际上包括两方面的内容,其一,不同的 Weibull 分布参数(均质度)往往可以代表不同的非均匀材料;其二,对于相同的 Weibull 分布参数,每一次随机产生的试样,其材料参数的空间分布往往是不同的,这种不同可能要影响试样的宏观响应。

分布密度 $F(u)$

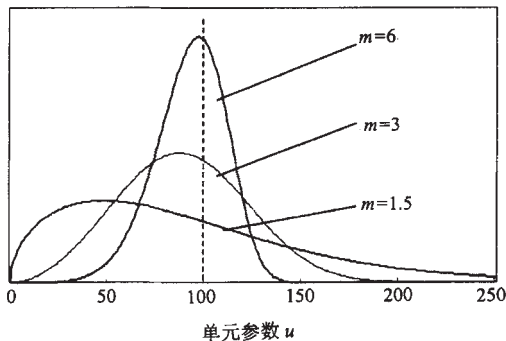


图1 不同均质 m 时单元参数的分布密度函数曲线

Fig. 1 The distributed density function of element parameters at different heterogeneity m

在初始状态,细观单元是弹性体,其力学性质可以完全由其弹性模量和泊松比来表达。随着单元应力的增加,当单元的应力或应变状态将满足某个给定的损伤阈值(准则)时,单元开始损伤。这里选择两个准则,其一是最大拉应变准则,认为当细观单元的最大拉伸主应变达到其给定的极限值时,该单元开始发生拉伸损伤;其二是摩尔库仑准则,认为当细观单元的应力状态满足摩尔库仑准则时,该单元发生剪切损伤。同时,拉伸准则具有优先权,若细观单元满足最大拉应变准则,则不需要再判断该单元是否满足摩尔库仑准则。只有未满足拉伸准则的单元才判定其是否满足摩尔库仑准则。

在本次模拟中假定损伤变量 D 的表达式为

$$D = \begin{cases} 0 & \varepsilon < \varepsilon_{10} \\ 1 - \frac{f_{tr}}{E_0 \varepsilon} & \varepsilon_{10} \leq \varepsilon < \varepsilon_{tu} \\ 1 & \varepsilon \geq \varepsilon_{tu} \end{cases} \quad (2)$$

式中, f_{tr} 是单元的残余强度, ε_{10} 是弹性极限所对应的拉伸应变,该应变可以叫做拉伸损伤应变阈值。 ε_{tu} 是单元的极限拉伸应变,当单元单轴拉伸应变达到极限拉伸应变时,单元将完全损伤达到拉伸断裂(破坏)状态,即 $D = 1$ 。这里用 $\varepsilon_{tu} = \eta \varepsilon_{10}$ 来定义极限应变系数 η 。单轴拉伸应力状态下,定义关系式 $f_{tr} = \lambda f_i = \lambda E_0 \varepsilon_{10}$ 是成立的, f_i 和 λ ($0 < \lambda \leq 1$) 分别为单轴抗压强度和残余强度系数。因此,式(2)可以简化为

$$D = \begin{cases} 0 & \varepsilon < \varepsilon_{10} \\ 1 - \frac{\lambda \varepsilon_{10}}{\varepsilon} & \varepsilon_{10} \leq \varepsilon < \varepsilon_{tu} \\ 1 & \varepsilon \geq \varepsilon_{tu} \end{cases} \quad (3)$$

我们将细观单元损伤分为两种,即拉伸损伤和剪切损伤,前者是由于应变状态达到了最大拉应变准则引起的,而后者是由压应力或者剪应力引起的,其应力状态满足了摩尔库仑准则。另外,需要说明的是,这里单元的本构关系都用弹性损伤力学来表达,当单元在卸载或重新加载时不发生损伤,其材料性质(弹性模量)保持不变,全部卸载(具有的应力全部释放)时单元保留残余变形。

当用该数值模型进行材料在静力作用下的破裂过程分析时,外部载荷(或位移)是逐步施加的。对于每一步施加的载荷(或位移),用弹性有限元程序进行应力分析,得到所有单元的应力场和节点的位移场。然后,根据损伤阈值准则判断单元是否开始损伤,假如该

加载步有单元损伤,则按照以上的弹性本构关系计算损伤变量以及损伤后的弹性模量,需要重新组集弹性矩阵和最终的刚度矩阵,进行在外部载荷不变条件下的重新计算,以反映由于单元损伤及破坏所造成的应力重分布,直到该加载步没有新的单元损伤为止。然后,继续增加外部载荷(或位移)进入下一步的分析,直到加载完毕为止。这样就可以得到整个试样的变形及整个断裂过程。

需要说明的是,在本文的本构关系中之所以没有引入弹塑性的本构关系是由于两个方面的原因:其一,砌体结构属于典型的准脆性材料,其破坏过程主要是由于内部微裂纹的萌生和扩展所造成的,所以其变形的塑性成份相对较小,并且该模型是在砌体结构的细观尺度描述其本构特性的,在考虑材料非均匀性的前提下,即使采用简单的细观单元本构关系就足以描述复杂的宏观力学特征;其二,如果在单元本构关系中引入非线性本构,势必大大增加计算量。这样,由于微机容量的限制,所能够分析的单元数目将更加有限。数值模拟的后处理部分不仅可以给出整个破坏过程的应力场和位移场,而且可以给出裂缝的扩展、贯通过程及其形态。

3 数值分析

数值模拟中选用的砌体结构试件尺寸为 $1400\text{mm} \times 700\text{mm}$,把砌体材料视为砂浆基质、块体及两者粘结带构成的三相复合材料,简化成平面应力问题来研究。砂浆基质和块体的参数参照有关手册选取,粘结带的弹性模量和强度比较弱,参照混凝土与水泥浆的粘结强度选取。每种材料的力学参数都在给定其平均值和均质度的条件下由程序进行随机赋值。试件跨度为 $S = 1000\text{mm}$,在跨度中间作用有局部载荷 P ,局部荷载的跨度为 600mm 。考虑砌体结构试件中裂缝扩展路径的影响,这里砂浆的强度较低,约为块体强度的 $1/5$,其表现分布如图2a所示。试件被划分成 $200 \times 100 = 20000$ 个四边形单元,采用位移控制的分步加载方式,每步的加载位移为 0.01mm 。

图2a~2e给出了试件模拟过程的裂缝的扩展与相互作用贯通的剪应力分布特征。由于这里采用等位移间距的位移控制加载方式,每个加载步的加载量为 0.01mm ,所以载荷-加载步曲线实际上与载荷-加载

点位移曲线($P-\Delta$ 曲线)是一致的。对于砌体结构试件,当载荷达到极限荷载27%时,试件中开始有微破裂产生,此后,伴随着试件的变形,微破裂就不断产生,这时如果停止加载,裂缝不发展。加载到极限荷载的65%时,虽并未立即发生失稳,但结构已出现危险状态的特征,此后,随着加载位移的继续增加,裂缝会很快加长、加宽,砌体被压碎而产生失稳,直至砌体完全破坏。

从图2中可以看出,随着纵向载荷的增加,砌体呈现出拉剪破坏。由于砂浆的强度明显低于砖的强度,破坏首先是沿着垂直缝隙拉坏,进而是沿水平缝隙剪坏,破坏模式基本沿中线左右对称分布,数值模拟再现了砌体破坏的全过程。另外,还可看出,该试件受载后,裂缝尖端拉应力集中,随着裂缝的扩展,拉应力集中也转移到新的裂缝尖端;而压应力在加载点和两个支撑点集中。这说明拉应力是促使裂缝扩展的因素,产生的裂缝为拉裂缝。由于砌体结构材料性质的非均匀性,裂缝的扩展也完全受这种非均匀性控制,块体能够阻止裂缝向前扩展,裂缝多沿着砂浆和粘结带中扩展,所以裂缝扩展路径呈现曲折性。由于在MFPA^{2D}的模拟中,单元的破坏裂缝产生后,单元的弹性模量要作相应的调整,所以从图2a~2e中可以清晰地观察到裂缝的扩展轨迹。

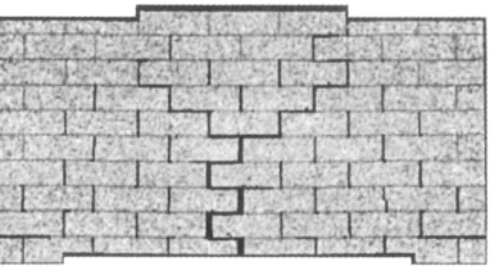
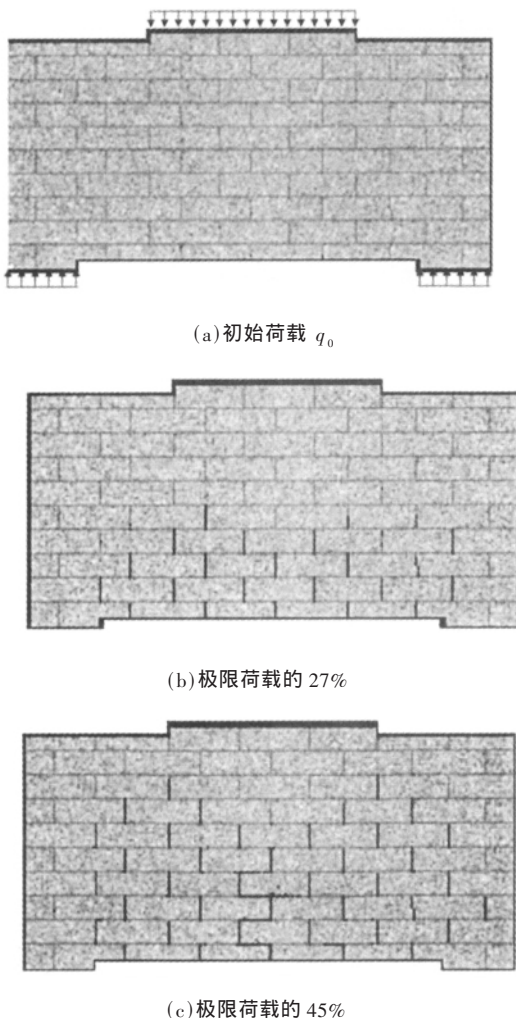
当从细观尺度出发研究砌体结构的断裂过程时,其最重要的特点是可以而且必须考虑砌体结构所具有的细观非均匀性。因此,在细观尺度的研究中,必然打破以往模型中材料的均匀性假设,使其更符合实际。在数值模拟中考虑非均匀性后,就可以发现其中应力分布的非均匀性,进而就可以研究断裂的局部化以及裂缝的萌生和扩展,乃至整个断裂过程。本文中的裂缝模拟与分散裂缝模型以及钝化裂缝模型中的方法类似,假定裂缝分散在整个单元,单元的力学性质仍然是均匀和各向同性的。另外,达到损伤阈值的单元仍然具有一定的刚度和承载力。对于损伤的单元,只有其最大主拉应变达到了给定的极限应变 ε_m 时,则认为该单元完全失损伤断裂,并将单元的弹性模量赋一个小数(1.0×1.0^{-5}),此时在后处理图上该单元以黑色显示为裂缝。在本文的数值模型中,拉伸损伤是导致裂缝萌生和扩展的直接原因。剪切损伤也会导致单元力学性质的弱化,不直接产生裂缝,但是剪切损伤同样可以导致损伤单元周围的应力重分布,从而诱发新的

应力集中,促使周围单元发生拉伸损伤,形成裂缝。

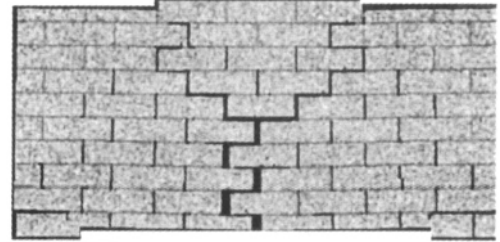
4 结语

本文考虑材料的非均匀性特点,建立砌体结构开裂数值模型,应用复合材料断裂过程数值分析(MFPA^{2D})方法,从细观力学层次上,模拟了砌体结构试件局部荷载下从损伤到开裂破坏的全过程,并进行了数值分析,得到如下结论:

(1) 在引入统计分布描述砌体结构材料的非均匀性后,构建砌体结构基元简单的力学模型,利用该细观数值模型模拟砌体结构试样在局部荷载下的破裂,其结果与实验结果具有较好的相似性^[16],很好地反映砌体结构的宏观力学行为,该模型和模拟方法的提出给砌体结构断裂力学的发展和裂纹的扩展问题的研究带来了新的契机。



(d) 极限荷载的 65%



(e) 极限荷载的 95%

图 2 无筋砌块砌体墙试件在局压作用下开裂过程

Fig. 2 The cracking process and the displacement field distribution of masonry model under local compression (simulated by MFPA^{2D})

(2) 应用 MFPA^{2D} 系统能够模拟砌体结构裂纹的开展、贯通直至破坏的全过程,清晰反映实验不易获取的应力场以及损伤演化过程在破裂过程中的调整、迁移以及相互作用。

当然,砌体结构开裂机理及发展砌体结构数值计算方法研究在我国尚处于初始阶段,还有许多工作有待进一步努力。

本文得到了国家标准《砌体结构设计规范》(GB5003)管理组组长、中国工程建设标准化协会砌体结构委员会秘书长苑振芳教授、东北大学博士生导师刘之洋教授、吴献副教授的指点,在此表示感谢!

参 考 文 献

- [1] MIHA Tomazevic, NIGEL Cooke, SHIVAS S. Singh. Seismic behavior of masonry walls: experimental simulation[J]. Journal of Structural Engineering., ASCE, 1996, 122(9): 1040 - 1047.
- [2] ABRAMS D P, PAULSON T J. Modeling earthquake response of masonry building structures[J]. ACI Structural Journal, July-August, 1991: 475 - 485.
- [3] CHIOU Yaw-Jeng, TZENG Jyh-Cherng, LIOU Yuh-Wehn. Experimental and analytical study of masonry infilled frames[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1999, 125(6): 1109 - 1125.
- [4] MILAD, M A, SINHA S N. Stress-strain characteristics of brick masonry under uniaxial cyclic loading[J]. Journal

- of Structural Engineering, ASCE 1999, 125(6): 600 – 604.
- [5] 施楚贤, 谢小军. 砌体结构小型空心砌块砌体受力性能[J]. 建筑结构, 1999, (3): 13 – 16.
- [6] 苑振芳. 砌体结构砌块建筑发展现状及展望[J]. 墙体革新与建筑节能, 1999, (4): 25 – 29.
- [7] 肖小松. 砌体结构的力学性质及数值模拟[D]. 同济大学, 1995.
- [8] 唐岱新, 马晓儒. 多层砌块房屋的变形裂缝成因与防治[J]. 建筑砌块与砌块建筑, 2000, (1): 6 – 11.
- [9] BATI S B, RANOCCHIAI G, ROVERO L. A micromechanical model for linear homogenization of brick masonry[J]. Materials and Structures/Materiaux et Constructions. January-February, 1999, 32: 22 – 30.
- [10] 周炳章, 郑伟, 关启勋, 刘彤程, 何西令, 王增培. 小型砌体结构空心砌块六层模型房屋抗震性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 2000, 21(4): 13 – 21.
- [11] 曾晓明, 杨伟军, 施楚贤. 砌体受压本构关系模型的研究[J]. 四川建筑科学研究, 2001, (3) 8 – 10.
- [12] TANG C A. Numerical simulation on progressive failure leading to collapse and associated seismicity[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 1997, 34 (2): 249 – 261.
- [13] 朱万成, 王述红, 唐春安. 混凝土三点弯曲试验的计算机模拟[J]. 东北大学学报, 1999, 20(5): 533 – 535.
- [14] LIU Guangting, WANG Zongmin. Numerical simulation study of fracture of concrete materials using random aggregate model[J]. Journal of Tsinghua University (Sci. & Tech.), 1996, 36(1): 84 – 89.
- [15] TANG C A, THAM L G, LEE P K K et al. Numerical studies of the influence of microstructure on rock failure in uniaxial compression (I)[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 2000, 37(6): 571 – 583.
- [16] CHIOU Yaw-Jeng, TZENG Jyh-Cherng, HWANG Shuenn-Chang. Discontinuous deformation analysis for reinforced concrete frames infilled with masonry walls[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1998, 6(2): 201 – 215.
- [17] 唐春安, 王述红, 傅宇方. 岩石破裂过程数值试验[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

(上接第 53 页)

5.3 工程三

结构参数: 跨度 24m, 拱高 6m, 板厚 1.1mm, 板型 MMR-238, 支座类型为铰支座, 钢板屈服强度 280MPa, 设计强度 240MPa。

荷载标准值: 自重 0.14kN/m^2 , 基本雪压 0.30kN/m^2 , 活荷载 0.30kN/m^2 , 基本风压 0.35kN/m^2 。

计算结果: 截面最大应力 $148.7\text{MPa} < 235\text{MPa}$ 结构安全。

此工程的背景在北京, 北京建有大量的采用此结构参数的金属拱型波纹屋盖结构, 到目前为止尚无一例发生工程事故。

6 小结

本文在明确金属拱型波纹屋盖结构受力机理的基础上, 通过对这种结构的几何非线性分析结果及线性分析结果的, 提出了基于线性计算的结构简化设计方法, 给出了简化设计公式中所有设计参数的推导过

程。本文给出的试设计结果可在一定程度上验证这套简化设计方法的合理性。另外, 由于设计计算需求解不同荷载作用下拱型结构的内力并验算结构各截面上的应力, 因此设计计算量很大, 本文提出的这套方法更适合计算机编程计算。

参 考 文 献

- [1] 刘锡良. 一种新型的空间钢结构——银河金属拱型波纹屋顶[J]. 建筑结构学报, 1996, 17(6).
- [2] 张勇, 刘锡良, 王元清, 石永久. 金属拱型波纹屋盖结构静力性能研究[J]. 建筑结构学报, 2001, 22(4).
- [3] 刘锡良, 张勇, 张福海. 金属拱型波纹屋盖结构的拱计算模型[J]. 钢结构增刊, 2000.
- [4] 张勇, 刘锡良, 石永久, 王元清. 金属拱型波纹屋盖结构弹性稳定承载力公式[J]. 工业建筑, 2001, (11).
- [5] 张勇, 刘锡良, 张福海. 银河金属拱型波纹屋顶的静力稳定承载力试验研究[J]. 建筑结构学报, 1997, 18(6).
- [6] 刘锡良, 张勇, 张福海. 金属拱型波纹屋顶在我国的应用现状及存在的问题[J]. 工程力学增刊, 1998.
- [7] 张勇. 金属拱型波纹屋盖结构分析、设计理论与试验研究[D]. 天津大学, 2000.