第21卷 第6期 2004年12月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 21 No. 6 Dec. 2004

文章编号:1005-3085(2004)06-0900-05

强粘性剪切流稳定性方程组的简化及计算判据

李明军[1,2]， 高 智[2]

(1-湘潭大学数学与计算科学学院，湘潭 411105；2-中国科学院力学所，北京 100080)

摘 要: 研究强粘性剪切流稳定性方程组的物理尺度及其相互关系。同时，对强粘性剪切流稳定性方程组作 GCS 分析，从而解决强粘性剪切流稳定性方程组的某些计算问题。作为应用，给出 Orr-Sommerfeld 方程的一种新的简化形式。

关键词: 强粘性; 剪切流; 流稳定性方程组; GCS 分析

分类号: **AMS**(2000) 34K20 **中图分类号**: O175.21 **文献标识码**: A

流体质点在外力作用下，流动本身使之具有一定的稳定性（保持层流运动状态），它能抵抗微弱的扰动，使之消失。当雷诺数超过临界雷诺数(记为 Re_{cr}), 流动便失去了(层流)稳定性，这时只要有微弱扰动就会使之扩展，逐渐过度到湍流(流动的另一种稳定状态)。确定层流稳定性的理论研究已有许多，最有代表性的理论是 Rayleigh 的无粘稳定性理论，Orr-Sommerfeld 方程和林家翘的稳定性理论[1,2]。

强粘性流动指高雷诺数流场中这样的流场区域，其中至少有一个粘性项与惯性项同量阶。在强粘性流以外的流动区域中粘性项比较次要。强粘性剪切流和强粘性扩散迎风流动是最主要的强粘性流动[3]。本文主要研究强粘性剪切流稳定性方程组的物理尺度及其相互关系，对强粘性剪切流稳定性方程组 GCS 分析。作为应用，给出 Orr-Sommerfeld 方程的一种新的简化形式。最后，讨论强粘性剪切流稳定性方程组的计算问题。

1 强粘性剪切流稳定性方程组

利用小扰动法的基本思想，即流动中迭加一个适用于 N-S 方程组的微小扰动，流场中运动参数可用基本流迭加微小扰动来表示。考虑具有无穷小对流不稳定性的剪切流(例如, 非曲屈表面)。为讨论方便起见, 本文仅考虑平行平板边界层。设基本流为 $(U,0,\overline{P})$，且满足不可压 Navier-Stokes 方程组。设线性不可压缩小扰动为 (u,v,p), 则剪切流的速度、温度和密度分别为

$$\tilde{U}=U+u,\tilde{V}=v,\tilde{P}=\bar{P}+p \tag{1}$$

将(1)代入不可压 Navier-Stokes 方程组，并利用状态方程消去 Navier-Stokes 方程组中的压强，即可得到如下二维不可压缩稳定性方程组

$$\frac{\partial(U+u)}{\partial x}+\frac{\partial(v)}{\partial y}=0, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial(U+u)}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial(U+u)}{\partial x}+v\frac{\partial(U+u)}{\partial y}$$

[1]收稿日期: 2002-05-27. **作者简介**: 李明军(1966年8月生)，男，博士，副教授，研究方向：计算流体力学.

基金项目: 国家863计划（2002AA633100）和国家自然科学基金重大项目（40333030）资助.

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x} + +\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2(U+u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U+u)}{\partial y^2}) \tag{2b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (U+u)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \tag{2c}$$

其中 U, u, v 由 Ue 归一化; x, y 由 L 归一化; ρ 和 μ 分别由 ρ_e 和 μ_e 归一化；Reynold 数 $\mathrm{Re} = \frac{\rho_e U_e L}{\mu_e}$, 它们是流场工程计算常用的参考尺度。

若忽略小扰动量的二次项，并考虑到基本流本身所满足的 Navier-Stokes 方程组，则由(2a)~(2c)式得到线性不可压缩稳定性方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \tag{3b}$$

$$\frac{U^2}{\mathrm{Re}^{q/2}} \qquad \frac{U^2}{\mathrm{Re}^{-(1-5q/2)}} \qquad \frac{U^2}{\mathrm{Re}^{q/2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \tag{3c}$$

$$\frac{U^2}{\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}(3-7q)}} \qquad \frac{U^2}{\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}(1-3q)}}$$

式(3a)~(3c)是关于小扰动量 (u, v, ρ, θ) 的线性偏微分方程组。虽然方程组 (3a)~(3c) 是从流体力学基本方程组导出的，但与基本方程组不同，他们是线性的偏微分方程组，因而有可能利用分离变量法求解，并具有解可以叠加的性质。下面考虑线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)的简化及计算判据。

2 强粘性剪切流稳定性方程组的物理尺度

二维线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)的物理尺度(包括长度尺度 x_p, y_p 和速度尺度 u_p, v_p) 可表示为

$$(x_p, y_p; u_p, v_p) \cong (\mathrm{Re}^{-n_x}, \mathrm{Re}^{-n_y}; \mathrm{Re}^{-n_u}, \mathrm{Re}^{-n_v}) \tag{4}$$

由文[5]知，二维线性化扰动存在与其未扰二维粘性流同一的对流-扩散相互作用结构，且时间、空间和速度尺度（简称物理尺度）相同；反之亦然。即有 $(x_p, y_p; u_p, v_p) \cong (\bar{x_p}, \bar{y_p}; Up, Vp)$, 其中 $(\bar{x_p}, \bar{y_p}$ 为未扰流的长度尺度（见文[5]）。强粘性剪切流的近似主流方向为 $x-$ 方向，则由二维线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)推知: $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$, $U\frac{\partial u}{\partial x} \sim \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。假使能量耗散率 $\frac{\partial u^3}{\partial x} \sim \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}$ 与 Re 近似无关(该假使的正确性的证明见下文)，可导出强粘性剪切流稳定性方程组的的物理尺度为

$$(x_p, y_p; u_p, v_p) \cong (\mathrm{Re}^{-\frac{3}{2}q}, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}(1+q)}; \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}q}, \mathrm{Re}^{-\frac{3}{2}(1-q)}) \tag{5a}$$

$$q = ln\frac{u_p}{x_p}/ln\mathrm{Re} = -n_u + n_x \tag{5b}$$

强粘性小扰动引起的能量耗散率 ϕ_m 的形式和流体主运动能量的粘性耗率 Φ_m 相同，可表示为

$$\phi_m = -\nu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{6}$$

$$\frac{U^3}{L}\mathrm{Re}^{-(1-2q)} \quad \frac{U^3}{L}\mathrm{Re}^0$$

由上式可知，在 Re 数很大的极限意义下，当 $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ 时，强粘性小扰动引起的能量耗散率 ϕ_m 与 Re 数近似无关的假设成立。

3 强粘性剪切流稳定性方程组的 CGS 分析

对于典型流动，物理尺度（包括长度尺度和速度尺度）可表示为[4]

$$(x_p, y_p; u_p, v_p) \cong (\mathrm{Re}^{-n_x}, \mathrm{Re}^{-n_y}; \mathrm{Re}^{-n_u}, \mathrm{Re}^{-n_v})$$

$$\cong \begin{cases} (\mathrm{Re}^0, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}, \mathrm{Re}^0, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}), & \text{边界层}, \\ (\mathrm{Re}^{-\frac{3}{8}}, \mathrm{Re}^{-\frac{5}{8}}, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{8}}, \mathrm{Re}^{-\frac{3}{8}}), & \text{干扰边界层主层}, \\ (\mathrm{Re}^{-1}, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}, \mathrm{Re}^0, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}), & \text{扩散迎风层}, \\ (\mathrm{Re}^{-\frac{7}{8}}, \mathrm{Re}^{-\frac{5}{8}}, \mathrm{Re}^{-\frac{1}{8}}, \mathrm{Re}^{-\frac{3}{8}}), & \text{干扰扩散迎风层}. \end{cases} \tag{7}$$

N-S 方程组包含宽广的空间尺度范围，因而其稳定性方程组也包含宽广的空间尺度范围。对于稳定性方程组的计算，惯性项和强粘性项不应落入其差分格式修正微分方程的截断误差项中。同时，计算某一物理尺度范围内的流动特性，网格尺度也必须很小于该物理尺度。因此，网格尺度应满足如下关系

$$\triangle x \ll \min(x_p, \triangle x_{cgs}), \triangle y \ll \min(y_p, \triangle y_{cgs}) \tag{8}$$

其中$\triangle x$和$\triangle y$为$x-$和$y-$坐标方向的网格尺度，x_p 和 y_p 为流动物理尺度，$\triangle x_{cgs}$ 和 $\triangle y_{cgs}$ 为临界网格尺度 (CGS) 。对于强粘性剪切流的 CGS 定义为：若网格尺度大于 CGS，所有粘性项将落入稳定性方程组差分格式修正微分方程的截断误差项中。

为了给出临界网格尺度 (CGS) 的合理估计，考虑线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)的半离散差分格式的如下修正微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \Sigma\alpha_n \frac{\partial^{2n+1} p}{\partial x^{2n+1}}\triangle x^{2n} \\ +\Sigma\beta_n U\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\triangle x^{2n-1} + \Sigma\beta_n^{'}(U\frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + \frac{\beta_n^{''}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^{2n+2} u}{\partial x^{2n+2}})\triangle x^{2n} \\ +\frac{\gamma_n^{''}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^{2n+2} u}{\partial y^{2n+2}})\triangle y^{2n} \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\alpha_n, \beta_n, \beta_n^{'}, \beta_n^{''}$, 和 $\gamma_n^{'}$ 为常数。假使不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)的半离散差分格式的精度为：x-方向为 m 阶，y-方向为 t 阶。由修正微分方程(9)能够推出最大粘性项 $\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 落入截断误差项的临界网格尺度 (CGS)$\triangle x_{cgs}$ 和 $\triangle y_{cgs}$ 分别为：

$$(\triangle x_{cgs}, \triangle y_{cgs}) \cong (\mathrm{Re}^{-n_x - \frac{1}{m}(1-n_u+n_x-2n_y)}, \mathrm{Re}^{-n_y}) \tag{10}$$

如果需要计算完全线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)，必须使得惯性项和所有粘性项不应落入其差分格式修正微分方程的截断误差项中，这时，网格尺度应满足如下关系

$$\triangle x \ll \min(x_p, \triangle \bar{x}_{cgs}), \triangle y \ll \min(y_p, \triangle \bar{y}_{cgs}) \tag{11}$$

其中 $\triangle x$ 和 $\triangle y$ 为 x- 和 y-坐标方向的网格尺度，x_p 和 y_p 为流动物理尺度，$\triangle \bar{x}_{cgs}$ 和 $\triangle \bar{y}_{cgs}$ 为准临界网格尺度 (NCGS)。准临界网格尺度 (NCGS) 的定义为：若网格尺度小于 NCGS，所有粘性项均不落入稳定性方程组差分格式修正微分方程的截断误差项中，且 NCGS 为满足这种要求的最大的网格尺度。最小粘性项 $\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 不落入截断误差项的准临界网格尺度 (NCGS) 的 $\triangle \bar{x}_{cgs}$ 和 $\triangle \bar{y}_{cgs}$ 分别为：

$$
\begin{aligned}
&(\triangle \bar{x}_{cgs}, \triangle \bar{y}_{cgs}) \cong (\mathrm{Re}^{-n_x-\frac{1}{m}(1-n_u-n_x)}, \mathrm{Re}^{-n_y-\frac{1}{t}(2n_y-2n_x)}) \\
&= \triangle x_{cgs} \cong (\mathrm{Re}^{-\frac{1}{m}(-2n_y-2n_x)}, \triangle y_{cgs}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{t}(2n_y-2n_x)}) \\
&\cong \begin{cases}
(\triangle x_{cgs}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{m}}, \triangle y_{cgs}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{t}}), & \text{边界层}, \\
(\triangle x_{cgs}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2m}}, \triangle y_{cgs}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2t}}), & \text{干扰边界层主层}, \\
(\triangle x_{cgs}\mathrm{Re}^{\frac{1}{m}}, \triangle y_{cgs}\mathrm{Re}^{\frac{1}{t}}), & \text{扩散迎风层}, \\
(\triangle x_{cgs}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2m}}, \triangle y_{cgs}\mathrm{Re}^{\frac{1}{t}}), & \text{干扰扩散迎风层}.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

式(18)表明，扩散迎风层和干扰扩散迎风层的准临界网格尺度 (NCGS) 无需考虑。而边界层和干扰边界层主层在高 Re 数流场的计算中要保证最小粘性项不若入截断误差项十分困难。例如对边界层流动，若 $\max\{m,t\} \le 2$ 时，若 $\mathrm{Re} = 10^6$, 则 $(\triangle \bar{x}_{cgs}, \triangle \bar{y}_{cgs}) \ge \mathrm{Re}^{-1/2}(\triangle x_{cgs}, \triangle y_{cgs})$。由物理尺度关系知，$(\triangle \bar{x}_{cgs}, \triangle \bar{y}_{cgs}) \ll (\mathrm{Re}^0, \mathrm{Re}^{-1/2})$。从而，$(\triangle x_{cgs}, \triangle y_{cgs}) \ll (\mathrm{Re}^{-1/2}, \mathrm{Re}^{-1})$。另一方面，又要求 $(\triangle x_{cgs}, \triangle y_{cgs})$ 很大于分子平均自由程 $M\mathrm{Re}^{-1}$，这里，$M = U/a$ 为 Mach 数，a 为声速。因此，当差分格式精度较低 $(m \le 2)$, Mach 数 M 不很小于1时，上述要求得不到满足。即使格式精度高 $(m \ge 3)$，由于接近固壁时格式不得不降阶，因此在固壁附近，上述要求更难满足。

4　Orr-Sommerfeld 方程的一种新的简化形式

由于小扰动是二维的，所以由扰动连续性方程可以引进扰动流函数 $\Psi(x,y,t)$ ，它与扰流速度关系为

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{13}$$

而扰动流函数可表示为坐标变量的分离形式

$$\Psi(x,y,t) = \psi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \tag{14}$$

从扰动的时间增长理论(即假使 α 为实数，β 为复数)出发，将流函数(14)代入线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)，且利用如下无量纲量

$$y^* = \frac{y}{l_0}, U^* = \frac{U}{u_0}, c^* = \frac{c}{u_0}, a_l = al_0, \mathrm{Re} = \frac{u_0 l_0}{\nu} \tag{15}$$

即可得到如下 Orr-Sommerfeld 方程

$$(U^* - c^*)(\phi'' - a_l^2\phi) - U^{*''}\phi = -\frac{i}{a_l\mathrm{Re}}(\phi^{(4)} - 2a_l^2\phi'' + a_l^4\phi) \tag{16}$$

其中，$c = \frac{\alpha}{\beta}$ 。Orr-Sommerfeld 方程主要适合于平行平板间流动、槽渠流动和边界层流动。Orr-Sommerfeld 方程是一个四阶常微分方程，利用不同的边界条件，可以得到它的不同简化形式[8]。下面利用强粘性剪切流流场特点，对 Orr-Sommerfeld 方程本身进行简化。

利用物理尺度关系(5)容易推出二维线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)中诸项的下方标出。尺度关系(8)与强粘性剪切层流的物理尺度关系[3]一致，并有 $0 \le q \le \frac{1}{2}$，当 $q = \frac{1}{2}$ ，所有的粘性诸项具有相同的数量级，二维线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)中所有惯性项和粘性项具有相同量阶，这时称为完全的二维线性不可压缩稳定性方程组。$q = \frac{1}{4}$ 时为多层边界层(三层)下层[3,5]；$q < \frac{1}{2}$ 时剪切粘性项很大于其它的粘性项，剪切流及其外流在 x-方向可取扩散抛物化近似，即可忽略对 x-求偏导的粘性诸项[3]。若平均运动为

$$(U, V, P) = (U(y), 0, P(x, y)) \tag{17}$$

则二维线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3d)可以简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{18a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{18b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{18c}$$

将流函数(13)代入线性不可压缩稳定性方程组(3a)~(3c)，且利用无量纲量(15), 即可得到如下 Orr-Sommerfeld 方程的简化形式

$$(U^* - c^*)(\phi'' - a_l^2\phi) = -\frac{i}{a_l \mathrm{Re}}(\phi^{(4)} - a_l^2\phi'') \tag{19}$$

若记$T = \phi'' - a_l^2\phi$，则(19)式可以表示为

$$(U^* - c^*)T = -\frac{i}{a_l \mathrm{Re}}T'' \tag{20}$$

参考文献：

[1] Cebeci J *et al*. Modeling and computation of boundary-layer flows[M]. Springer Springer-Verlag Press, 1999

[2] 张涵信等. 网格与高精度差分计算问题[J]. 力学学报，1999; 31(4): 398-405

[3] 高智. 强粘性流动理论和流体运动诸方程组[M]. 北京: 北京计算流体力学讨论会文集（第十二辑), 2000

[4] J D 欣茨. 湍流（黄永念等译）[M]. 北京: 科学出版社，1985

[5] 高智. 对流-扩散相互作用结构的不变性[J]. 力学学报, 1992; 24（6）：661-670

[6] Rogers D F. Laminer flow analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1992

[7] 高智. Navier-Stokes方程组计算中物理尺度和网格尺度作用问题的讨论与建议[J]. 科学通报，将发表

[8] 是勋刚. 湍流[M]. 天津: 天津大学出版社，1994

The Simplification of the Fluid Mechanics Equations on the Strong Viscous Shear Flow and Its Computational Criterion

LI Ming-jun[1,2], GAO Zhi[2]

(1-Hunan,Xiangtan University, Inst of Math and Comput Sci, Xiangtan 411105;
2-Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract: The physics scales and their relations of the fluid mechanics equations are investigated on the strong viscous shear flow. On the same time, GCS analysis is done on the strong viscous fluid stability equations. Then, some questions are resolved on the strong viscous fluid stability equations. As applications, a new simplified form of Orr-Sommerfeld equation is gained.

Keywords: strong viscous; shear flow; the fluid mechanics equations; GCS analysis