

求解双曲型守恒律方程的高精度 迎风紧致群速度控制法^{*}

朱庆勇 马延文

(LNM, 中国科学院力学所, 北京 100080)

摘 要 从迎风紧致逼近^[1]出发, 提出求解流体力学双曲型守恒律的一种高精度的数值方法, 同时采用群速度控制方法捕捉激波。该方法在光滑区具有三阶精度。

关键词 群速度控制法 迎风紧致格式 双曲守恒律 Euler 方程

中图分类号 O35 O241

0 引 言

近年来高精度格式的研究引起人们的注意。传统方法如二阶 TVD 类格式虽然能较好捕捉激波, 但却存在局部极值点降阶的问题, 而且由于一些格式的数值粘性过大, 掩盖了问题的物理粘性, 从而不能正确模拟热流值。文献[2]指出, 采用高精度格式可适当放松对网格雷诺数的要求, 以便正确模拟热流值。因此, 发展三阶或三阶以上格式是需要的。同时我们知道, 双曲型守恒律方程的解可能存在间断, 而高于一阶精度的数值解在激波附近会产生非物理振荡。因此如何克服激波附近的非物理振荡并提高激波解的分辨率就成为首先要解决的问题。而一些较优秀的方法, 如 TVD 和 ENO 等主要从数学的角度出发构造的, 并没有直接从物理角度出发分析非物理振荡产生的原因。群速度控制法^[3]是从物理角度分析非物理振荡产生的原因, 并提出改进激波解的办法。本文对迎风紧致格式进行了群速度控制, 使激波的分辨率得到了改进。迎风紧致格式精度高, 同时格式本身的耗散使计算易于稳定。数值实验表明, 该方法对流场中的激波有较高的分辨率, 优于通常二阶精度 TVD 格式。另外, 该方法还具有形式简单, 计算量小的优点。

1 数值方法

1.1 标量双曲型守恒律的空间离散方法

考虑如下模型方程及其半离散方程

$$\partial u / \partial t + \partial f / \partial x = 0, \quad f = f(u), \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

$$\partial u_j / \partial t + F_j / x = 0, \quad F_j / x \doteq \partial f / \partial x \quad (2)$$

这里 F_j / x 为 $\partial f / \partial x$ 的差分逼近式。对线性情况 $f = cu$ 。取初始条件为 $u(x, 0) =$

收稿日期: 1997-02-01; 修回日期: 1998-05-05

^{*} 本工作得到国家自然科学基金重大项目资助

朱庆勇 男 28 博士 广州市中山大学科学计算与计算机应用系 510275

$\exp(ikx)$, 式(1)有准确解

$$u(x, t) = \exp[ik(x - ct)] \quad (3)$$

对于(2)式初始条件为 $u_j = \exp(ikx_j)$, 其准确解为

$$u_j(t) = \exp(-c \frac{k_r}{x} t) \exp[ik(x_j - c \frac{k_i}{k x} t)], \quad 0 \leq k x \quad (4)$$

对具体的格式可求出 k 和 k_i 的分析表达式。从(3)式可以看出, 对于不同的波数 k , 所有波都有相同的传播速度和均一的群速度。由(4)式可以看出, 由于差分离散的误差导致对于不同的波数 k , 其传播速度是不相同的, 从而导致其群速度不均一。比较(3)式和(4)式要求 k_r/x 为 0 和 $k_i/k x = 1$ 。如果 $ck_r < 0$ 格式是反耗散的, $ck_r > 0$ 格式是耗散的, $ck_r = 0$ 则是非耗散的。群速度定义为 dk_i/dk , 这里 $k_i = k x$ 。文[3]中指出, 为克服数值振荡要求在激波前采用慢形格式($dk_i/dk < 1$), 在激波后采用快形格式($dk_i/dk > 1$)。本文对迎风紧致格式进行了群速度控制以达到提高激波解分辨率的目的, 同时提高了光滑区的精度。考虑取如下之与三个网格点相联系的差分逼近

$$F_{j+1} + F_j + F_{j-1} = (\frac{1}{6} + b_0) f_j \quad (5)$$

这里

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + b_0 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + 2 \cdot 3, & \frac{1}{6} - b_0 &= \frac{1}{6} - 2 \cdot 3 + 4, & \frac{2}{3} + 2 \cdot 3 \\ & & \frac{1}{2} - 2 \cdot 4, & b_0 &= \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

$\frac{1}{6} + b_0$ 和 $\frac{1}{6} - b_0$ 分别为两点前差和后差算子。泰勒展开后, 有

$$\frac{F_i}{x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{3} x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{4} x^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + O(x^4) \quad (6)$$

这里

$$\frac{1}{6} + b_0 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + 2(4 - 2), \quad \frac{1}{6} - b_0 = \frac{1}{6} - 2 \cdot 3 + 4 - 2 \cdot 2[3 + 4(4 - 2)^2]$$

考虑以下情况: 假设 ($c > 0$)

$$F_{j+1} = F_j = 0, \quad F_j = \text{const} \quad (7)$$

为了简化计算将三对角形式的(5)式简化为两对角形式, 取 $b_0 = 1/6$, 这样(5)式可写为

$$\frac{2}{3} F_j + \frac{1}{3} F_{j-1} = \frac{1}{6} F_j + \frac{5}{6} F_{j-1} \quad (8)$$

通过泰勒展开式我们不难发现 $T.E. = O(x^3)$ 。上式可很容易地自左向右进行求解。对于(7)式, 其 k_i 随 $k x$ 和 k_r 随 $k x$ 变化关系如图1所示。

数值实验表明, 简单采用(7)式过激波时存在非物理振荡。本文采用如下群速度控制方法以克服非物理振荡, 即在(2)式右端加入修正项以控制其群速度。具体为:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{x} = \frac{1}{x} [ss(u_j) (1 - j) / c / \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - j) / c / \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}] \quad (9)$$

其中 $ss(u_j) = \text{sign} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$, $j = 1 - j_{+1/2}$, $j_{+1/2} = \max(j, j_{+1})$ 。ct

在气动方程中 $ss(u_j)$ 可取 $ss(p_j)$, 这里 p 代表压力。这样就可使激波两侧振荡波向激波靠

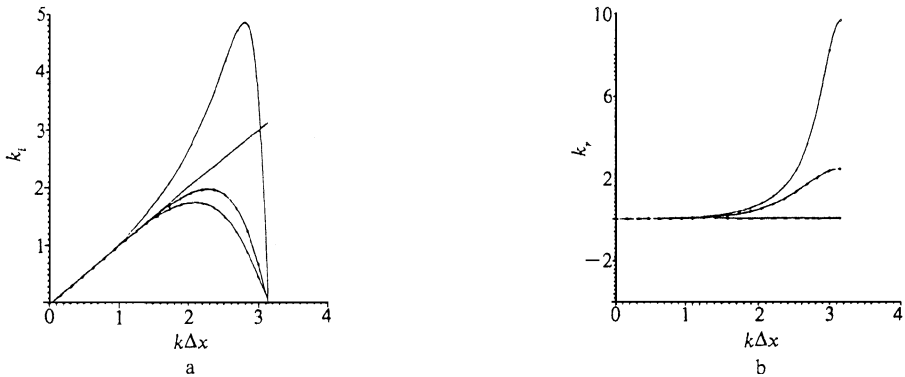


图 1 k_i, k_r 随 $k x$ 的变化

Fig. 1 Variation of k_i and k_r versus $k x$

拢, 从而克服非物理振荡。为了保证格式在光滑区的精度, 引入开关函数^[4],

$$j = \frac{|u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}|}{(1 - \beta)(|u_{j+1} - u_j| + |u_j - u_{j-1}|) + |u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1}|} \quad (10)$$

这里 $0 < \beta < 1$, 建议 $\beta = 1/2$, 对于气动方程以压力 p 代替上式的 u 从而确定 j 。在光滑区格式截断误差主导项为 $-x^3 \frac{1}{36} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ 。在激波附近, 三阶导数控制项 $x^2 \frac{\partial}{\partial x} [ss(u_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}]$ 。这样从上式可看出, 在光滑区格式具有三阶精度。

1.2 双曲型方程组的空间离散方法

以一维 Euler 方程为例进行讨论。一维 Euler 方程的守恒形式为

$$\partial U / \partial t + \partial F / \partial x = 0 \quad (11)$$

其中

$$U = [e, u, e]^T, \quad F = [u, u^2 + p, (e + p)u]^T$$

$$p = (e - u^2/2)$$

(12) 式的半离散差分格式可以写为

$$\partial U / \partial t + F_j / x = 0 \quad (12)$$

其中

$$F_j = F_j^+ + F_j^-$$

$$F_j^\pm = \frac{\frac{0}{x} - 2 \frac{\pm}{4} \frac{2}{x}}{1 + 2(\frac{\pm}{2} - \frac{\pm}{4}) \frac{0}{x} + (\frac{1}{6} - \frac{\pm}{3}) \frac{2}{x}} F_j^\pm \quad (13)$$

这里 F_j^\pm / x 是一阶导数 $\partial F^\pm / \partial x$ 的逼近式, 这里取 $\frac{\pm}{2} = \frac{\pm}{3} = 0$ 。为了简化三对角追赶为二对角追赶, 取 $\frac{+}{4} = 1/6, \frac{-}{4} = -1/6$, (13) 式可改写为

$$\begin{cases} \frac{2}{3} F_j^+ + \frac{1}{3} F_{j-1}^+ = \frac{1}{6} \frac{+}{x} F_j^+ + \frac{5}{6} \frac{-}{x} F_j^+ \\ \frac{1}{3} F_{j+1}^- + \frac{2}{3} F_j^- = \frac{5}{6} \frac{+}{x} F_j^- + \frac{1}{6} \frac{-}{x} F_j^- \end{cases} \quad (14)$$

为克服过激波的非物理振荡,在(12)式右端加入修正项控制其群速度,使振荡波向激波靠近。

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{F_j}{x} = -\frac{1}{x} \left[(1 - \epsilon_j) \text{ss}(p_j) / |j| \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(1 - \epsilon_j) / |j| \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \right] \quad (15)$$

其中

$$I \text{ 议} \quad \text{ss}(p_j) = \text{sign} \left[(\partial^2 p / \partial x^2) (\partial p / \partial x) \right]$$

ϵ_j 是最大特征值, p_j 是压力, j 与前相同。这样所构造的格式在光滑区具有三阶精度。在应用 Steger-Warming 的通量分裂技术时,在声速点附近会出现由于不连续可微性引起的数值解的振荡。为了克服这种不连续可微性引起的数值解的振荡,引入小参数进行修正。这样分裂后的特征值为

$$\epsilon_j = \left[\epsilon \pm (\epsilon^2 + \epsilon_j^2)^{1/2} \right] / 2, \quad \epsilon = 0.01 \quad (16)$$

其中 ϵ 是小的正常数。以上方法可直接推广到求解多维 Euler 方程。在时间方向本文采用三阶 R-K 方法进行时间离散。

2 数值试验

为了检验该方法的有效性,本文通过求解 Euler 方程对一维 Riemann 问题,激波反射问题及球头绕流问题等典型算例进行了计算。

算例 1 对于模型方程

$$\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0$$

其初始条件为

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 1/3 \\ 0, & x > 1/3 \end{cases}$$

这里 $t/x = 0.1$ 和 $IN = 201, 0 \leq x \leq 1$ 。 $t = 500$ 时刻结果见图 2。从图中我们可以看出,采用迎风紧致的群速度控制方法对间断的分辨率是高的。

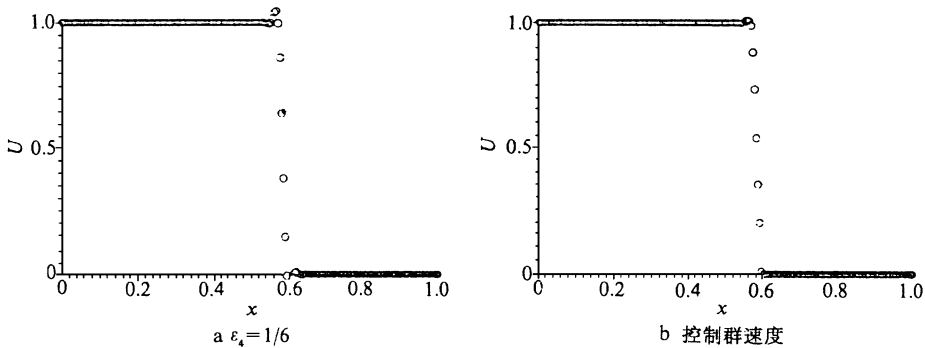


图 2 单波方程的解

Fig. 2 Solution of model equation

算例 2 一维 Riemann 问题

该问题常常用来检验格式对激波、膨胀波及接触间断分辨能力^[5]。这里取 $\epsilon = 0.01$ 和 $IN = 101$ 个网格点分布在 $[0, 1]$ 的区域内。图 3 为 $t = 0.14$ 的计算结果。从结果中可以看出,

迎风紧致的群速度控制法对激波和接触间断的分辨率较 TVD 格式有了显著提高。

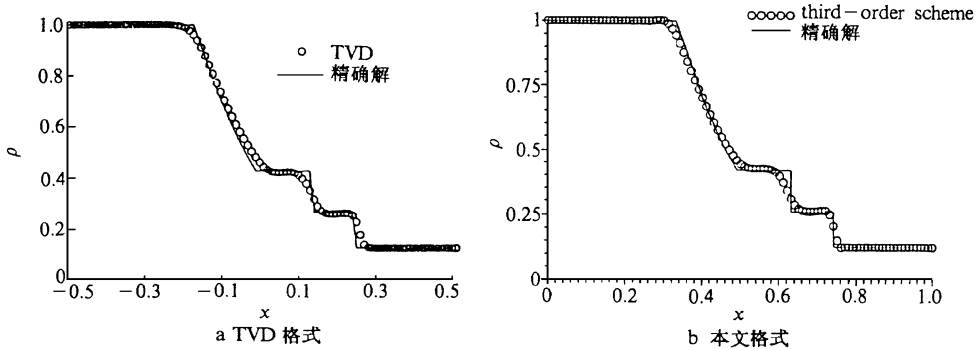


图 3 密度分布

Fig. 3 Density distribution

算例 3 激波反射问题

来流马赫数 $M = 2.9$, 激波入射角为 29° ; 计算区域为 $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$ 。计算中的网格点数为 81×41 。结果见图 4。从图中可见, 本文方法清晰地计算出流场中的激波, 分辨率高于 TVD 格式。

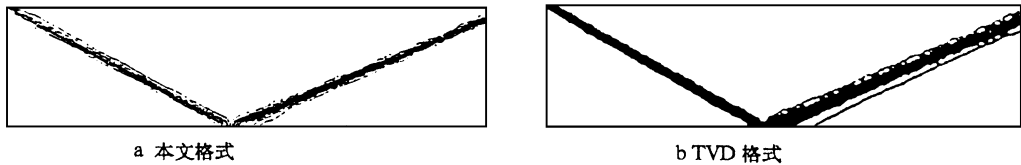


图 4 压力等值线

Fig. 4 Pressure contours

算例 4 球头绕流问题

图 5a 为计算网格, 网格点数 $19 \times 31 \times 15$ 。本文给出了来流马赫数为 $M = 7$ 的计算结果, 结果见图 5。从结果可以看出, 采用三阶迎风紧致的群速度控制方法对激波的分辨率是高的, 并且数值解过激波时也基本没有非物理振荡。

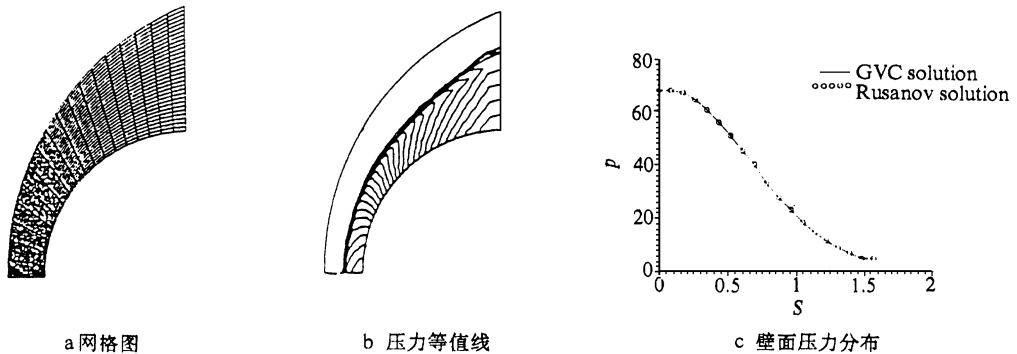


图 5 压力等值线

Fig. 5 Pressure contours

3 结论

本文基于迎风紧致方法求解流体力学双曲型守恒律方程,采用群速度方法克服激波附近非物理振荡。数值实验表明,该格式对流场中的激波有较高分辨率,且格式简单,计算量较小。

致谢 感谢科学与计算国家开放实验室和计算物理实验室在机时上提供帮助。

参考文献

- 1 傅德薰.流体力学数值模拟.国防工业出版社,1993.
- 2 Fu Dexun, Ma Yanwen. Computational Fluid Dynamics Review, 1995, by Hefez M. and Oshima K.
- 3 Fu Dexun, Ma Yanwen. Computational Fluid Dynamics Journal, 1995, 4(4).
- 4 Swanson R C. *Journal of Computational Physics*, 1992, 101:292 ~ 306.
- 5 Sod G A. *Journal of Computational Physics*, 1987, 27(1):1 ~ 31.

A HIGH ORDER ACCURATE UPWIND COMPACT SCHEME WITH GROUP VELOCITY CONTROL FOR SOLVING HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS

Zhu Qingyong Ma Yanwen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

ABSTRACT A high order accurate finite difference scheme is proposed in light of the upwind compact method^[1]. The flux vectors in Euler equations are approximated by using upwind compact difference. In order to prevent the nonphysical oscillations in the vicinity of the shock the group velocity control (GVC) method is used. The reason of oscillation production in numerical solutions is nonuniformity of group velocity of wave packets. GVC is for improvement of the shock resolution. The present scheme has third-order accuracy in smooth regions.

KEY WORDS GVC; upwind compact scheme; hyperbolic conservation laws; Euler equations.