

三维链网模型及其参数标定*

刘晓宇 梁乃刚 李 敏

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 提出一种材料模型, 由三维空间取向的平行弹簧束作为构架, 讨论了按空间取向进行离散的方式, 实现立体角划分的最优化. 构造了由一维构元组成的三维链网胞, 给出了胞几何、物理参数的标定方法. 证明该胞能精确模拟 Poisson 比从 0~1/2 的材料行为, 突破了已往模型模拟范围 0~1/3 的限制. 探讨了模型简化问题, 实现了模拟精度高而计算费用低的统一. 举例论述了该模型模拟短纤维增强复合材料的独特优点.

关键词 应变能 刚度张量 取向构元 链网模型 Poisson 比

近 40 年来, 链网模型在许多领域得到了应用. 在计算机技术广泛应用之前, 针对大型桁架类工程结构, 人们开始使用离散模型进行力学分析^[1,2]. 20 世纪 80 年代中后期, 随着计算机技术的发展, 理论物理学家开始建立由二维链网构成的数值模型来分析无序介质在脆性断裂过程的统计规律^[3]. 20 世纪 90 年代, 二维链网模型在混凝土^[4]、陶瓷^[5]、粒子增强复合材料^[6]、短纤维增强复合材料^[7-9]等材料的力学性能预测及损伤演化研究中发挥了巨大作用.

对于二维链网模型, 由于链网胞所具有的空间对称性, 按照应变能相等的原则, 可惟一确定不同拓扑结构二维链网模型的几何、物理参数^[10]. 同时证明了, 当二维链网胞尺寸趋于零时, 链网模型模拟的变形场满足连续介质力学的 Lamé 方程^[7]. 然而, 到目前为止三维链网模型的理论研究与应用很少见. 原因是三维链网模型的构造较为复杂、难以按几何对称性直观标定各种取向构元的几何、物理参数.

Ostojastarzewski 在文献[10]中指出: “链网模型在本质上基于材料的原子链模型”. 本文从材料内原子间相互作用出发, 建立一种材料模型并讨论其离散方式, 构造出三维链网模型. 论述标定链网模型构元几何、物理参数的依据, 导出标定公式. 接着提出一种简化的链网模型, 分析简化模型的精度. 最后讨论用链网模型模拟短纤维增强复合材料的优势和潜力.

1 基于原子间相互作用的材料模型

1.1 材料单元的应变能与弹簧束组合材料模型

在微观尺度, 任意宏观材料单元都包含无穷多原子, 材料单元的应变能取决于原子间相互作用. 由嵌入原子方法(the embedded-atom method)^[11]可知, 材料单元的应变能由原子核之间及原子核与其周围电子云相互作用的势能构成, 即

2001-12-28 收稿

* 国家自然科学基金(批准号: 19872065, 19732060)和中国科学院(KGCX1-11)基金资助项目

$$W = \sum_i [\Phi_i + U_i(\rho_i)], \quad (1)$$

其中 i 遍历材料单元中的所有原子, Φ_i 为原子 i 与周围原子核的相互作用势能, ρ_i 为原子 i 周围的电子云密度, U_i 为将 i 嵌入电子云密度 ρ_i 所要求的能量.

根据(1)式, 可将真实材料看作两种简单材料的复合. 第 1 种简单材料与第 2 种简单材料经历同样的变形, 它们共同分担真实材料承受的载荷, 其应变能分别由(1)式右端的两项描述.

在第 1 种简单材料中, 将任意原子, 例如图 1 中的 A, 与其他各原子间的相互作用用一根弹簧代替. 在图 2 所示坐标系, 记方向 (θ, ϕ) 上的方向余弦为

$$n_1 = \sin \phi \cos \theta, \quad n_2 = \sin \phi \sin \theta, \quad n_3 = \cos \phi \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

则方向 (θ, ϕ) 邻域内的立体角可记为 $\Delta\Omega = \sin \phi \Delta\phi \Delta\theta$. 设想垂直于 (θ, ϕ) 方向有一尺度远比原子间距大的单位面积截面 P , 见图 2. 当材料单元沿方向 (θ, ϕ) 上有一应变增量 $\Delta\varepsilon$ 时, 记取向落在 $\Delta\Omega$ 内的弹簧力在 P 上的合力变化为 ΔF , 可定义材料单元在方向 (θ, ϕ) 上的弹性模量为

$$H(\theta, \phi) \Delta\Omega = \Delta F / \Delta\varepsilon, \quad (3)$$

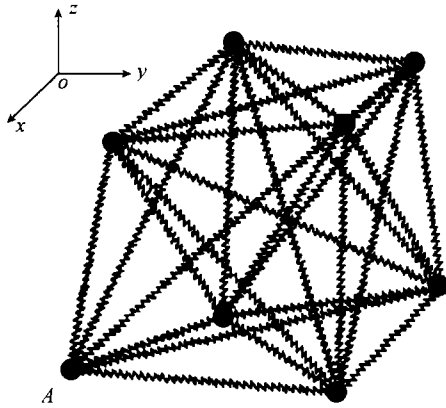


图 1 用弹簧表示原子间相互作用

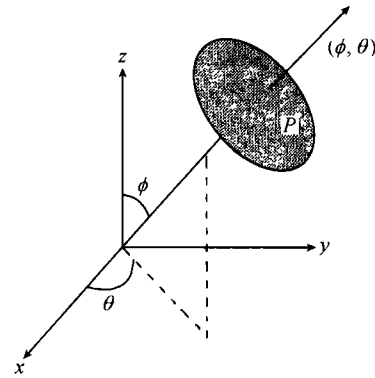


图 2 坐标系与方向 (θ, ϕ) 上单位横断面面积(阴影)

因此, 在宏观应变 ε_{ij} 作用下, 单位体积材料中取向落在方向 (θ, ϕ) 的 $\Delta\Omega$ 邻域内所有弹簧束的应变能总和为

$$\Delta W_1(\theta, \phi) = \frac{1}{2} H(\theta, \phi) n_i(\theta, \phi) n_j(\theta, \phi) n_r(\theta, \phi) n_s(\theta, \phi) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \sin \phi \Delta\phi \Delta\theta, \quad (4)$$

由于取向 n_i ($i = 1, 2, 3$) 遍及 $z \geq 0$ 的上半个立体角, 单位体积材料的应变能为

$$W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \left[\int_0^{2\pi} H(\theta, \phi) n_i(\theta, \phi) n_j(\theta, \phi) n_r(\theta, \phi) n_s(\theta, \phi) d\theta \right] d\phi, \quad (5)$$

对于各向同性材料, 弹性模量 H 为常数, 上式将为

$$W_1 = \frac{\pi}{15} H \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} (\delta_{ij} \delta_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}), \quad (6)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

第 2 种简单材料的应变能仅与体积变形有关, 因此在宏观应变 ε_{ij} 作用下, 应变能可写为

$$W_2 = \frac{1}{2} \rho_c \delta_{ij} \delta_{rs} \epsilon_{ij} \epsilon_{rs} \quad (7)$$

其中 ρ_c 为体积模量.

1.2 空间取向离散

对于第 1 种简单材料, 按空间取向进行积分时(5)式成为

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{rs} \iint_{\Omega} H(\Omega) n_i(\Omega) n_j(\Omega) n_r(\Omega) n_s(\Omega) d\Omega, \quad (8)$$

其中 Ω 表示取向 $n_i(\Omega)$ 遍及的立体角. 将上半空间 ($0 \leq \phi \leq \pi/2$) 离散成 M 个立体角, 第 α 个立体角的代表取向为 $n^{(\alpha)}$, (8)式的离散形式为

$$W_1 = \sum_{\alpha=1}^M \Delta W^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{rs} \sum_{\alpha=1}^M H^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_r^{(\alpha)} n_s^{(\alpha)} \Delta \Omega^{(\alpha)}, \quad (9)$$

另一方面, 对于取向为 $n_i^{(\alpha)}$ 、刚度模量为 $K^{(\alpha)}$ 的平行弹簧束, 其单位体积的应变能

$$W^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{rs} K^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_r^{(\alpha)} n_s^{(\alpha)}, \quad (10)$$

比较(9)与(10)式可知, 材料单元被离散为 M 个取向的弹簧束, 刚度模量

$$K_0^{(\alpha)} = H^{(\alpha)} \Delta \Omega^{(\alpha)}. \quad (11)$$

1.3 离散立体角的代表方向

要保证计算精度, 必须合理选择立体角离散的个数 M 及各离散立体角的代表方向 $n^{(\alpha)}$.

考虑对直角坐标系的对称性, 极射赤面投影图 3(a)~(d)中显示了几种可能的离散方式. 其中, 图 3(a)表示 9 个代表方向的离散方案, 其方向数分别为 $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[0,1,1]$, $[1,\bar{1},0]$, $[\bar{1},0,1]$, $[0,\bar{1},1]$ ($\bar{1}$ 表示 -1 , 下同); 图 3(b)表示 7 个代表方向的离散方案, 其方向数分别为 $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$, $[\bar{1},1,1]$, $[1,\bar{1},1]$, $[\bar{1},\bar{1},1]$; 图 3(c)表示 13 个代表方向的离散方案, 其方向数分别为 $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[0,1,1]$, $[1,\bar{1},0]$, $[\bar{1},0,1]$, $[0,\bar{1},1]$, $[1,1,1]$, $[\bar{1},1,1]$, $[1,\bar{1},1]$, $[\bar{1},\bar{1},1]$; 图 3(d)表示 37 个代表方向的离散方案, 5 种典型代表方向的方向数分别为 $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,1,1]$, $[2,1,0]$ 和 $[2,1,1]$. 随着离散立体角个数增加, 各个离散立体角内的取向偏差减小, 离散精度提高. 当然, 离散立体角个数的增多引起计算代价的增加. 计算结果表明, 选用图 3(c)所示的离散方式可以兼顾计算精度与计算费用.

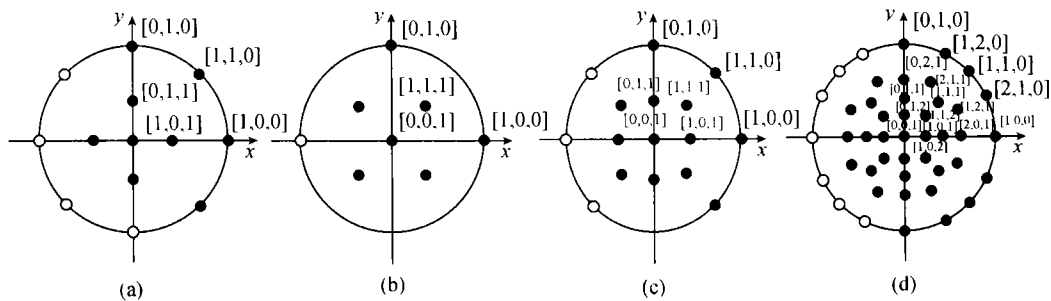


图 3 代表取向的极射赤面图

不失一般性, 下文针对图 3(c)所示的离散方式进行讨论. 将(8)式按所示的 13 种取向进行

离散, (9)式成为

$$W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \sum_{\alpha=1}^{13} H^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_r^{(\alpha)} n_s^{(\alpha)} \Delta \Omega^{(\alpha)}. \quad (12)$$

1.4 离散立体角大小的确定

图 3(c)中的代表取向分 3 组. 第 1 组为[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]; 第 2 组为[1,1,0], [1,0,1], [0,1,1], [1,1,0], [1,0,1], [0,1,1]; 第 3 组为[1,1,1], [1,1,1], [1,1,1], [1,1,1]. 分别记其立体角 $\Delta \Omega^{(1)}$, $\Delta \Omega^{(2)}$ 与 $\Delta \Omega^{(3)}$. 于是, 对于各向同性材料单元, (12)式成为

$$W_1 = \frac{1}{2} H \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \left\{ \Delta \Omega^{(1)} (\delta_{i1} \delta_{j1} \delta_{r1} \delta_{s1} + \delta_{i2} \delta_{j2} \delta_{r2} \delta_{s2} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{r3} \delta_{s3}) \right. \\ \left. + \frac{\Delta \Omega^{(2)}}{2} [(\delta_{ij} \delta_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) - (\delta_{i1} \delta_{j1} \delta_{r1} \delta_{s1} + \delta_{i2} \delta_{j2} \delta_{r2} \delta_{s2} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{r3} \delta_{s3})] \right. \\ \left. + \frac{\Delta \Omega^{(3)}}{9} [4(\delta_{ij} \delta_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) - 8(\delta_{i1} \delta_{j1} \delta_{r1} \delta_{s1} + \delta_{i2} \delta_{j2} \delta_{r2} \delta_{s2} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{r3} \delta_{s3})] \right\}, \quad (13)$$

比较(6)与(13)式得

$$\Delta \Omega^{(1)} + \Delta \Omega^{(2)} + \frac{4}{9} \Delta \Omega^{(3)} = \frac{2}{5} \pi \quad (14)$$

$$\text{与} \quad \frac{1}{2} \Delta \Omega^{(2)} + \frac{4}{9} \Delta \Omega^{(3)} = \frac{2}{15} \pi. \quad (15)$$

各离散立体角的大小越接近, 离散精度越高. 因而最优离散方案应使

$$\chi = \max(\Delta \Omega^{(1)}, \Delta \Omega^{(2)}, \Delta \Omega^{(3)}) / \min(\Delta \Omega^{(1)}, \Delta \Omega^{(2)}, \Delta \Omega^{(3)}), \quad (16)$$

取最小值. 令 $\xi = \Delta \Omega^{(3)} / \Delta \Omega^{(2)}$ 并将其带入(14)与(15)式, 可得

$$\Delta \Omega^{(1)} : \Delta \Omega^{(2)} : \Delta \Omega^{(3)} = \left(\frac{8}{9} \xi + \frac{1}{2} \right) : 1 : \xi, \quad (17)$$

因而, χ 随 ξ 的变化规律见图 4. 当 $\xi = 1$ 时(17)式取极小值. 联立(14)和(15)式, 取 $\Delta \Omega^{(2)} = \Delta \Omega^{(3)}$ 得

$$\Delta \Omega^{(1)} = \frac{10}{51} \pi, \quad \Delta \Omega^{(2)} = \frac{12}{85} \pi, \quad \Delta \Omega^{(3)} = \frac{12}{85} \pi. \quad (18)$$

同样的方法可用于确定其他离散方式的立体角大小.

2 三维链网模型

基于如图 3(c)所示的离散方式, 材料单元离散为 13 种取向的弹簧束, 弹簧束的刚度模量由(13)式决定. 如果将各个弹簧束用取向相同、刚度模量相同的一维构元代替, 可以得到图 5(a)所示的三维链网胞单元.

特别地, 对于体积为 a^3 的正六面体链网胞, 可知第 1 组构元长度为 $a/2$; 第 2 组构元长度为 $a\sqrt{2}/2$; 第 3 组构元长度为 $a\sqrt{3}/2$. 根据(11)

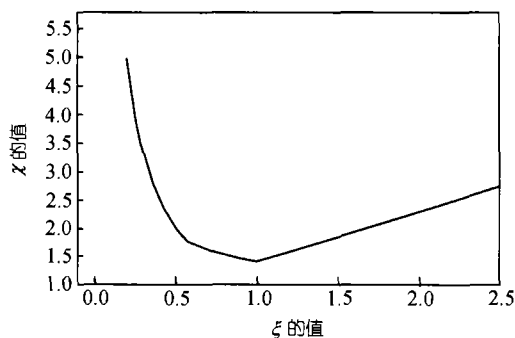


图 4 χ 随 ξ 的变化曲线

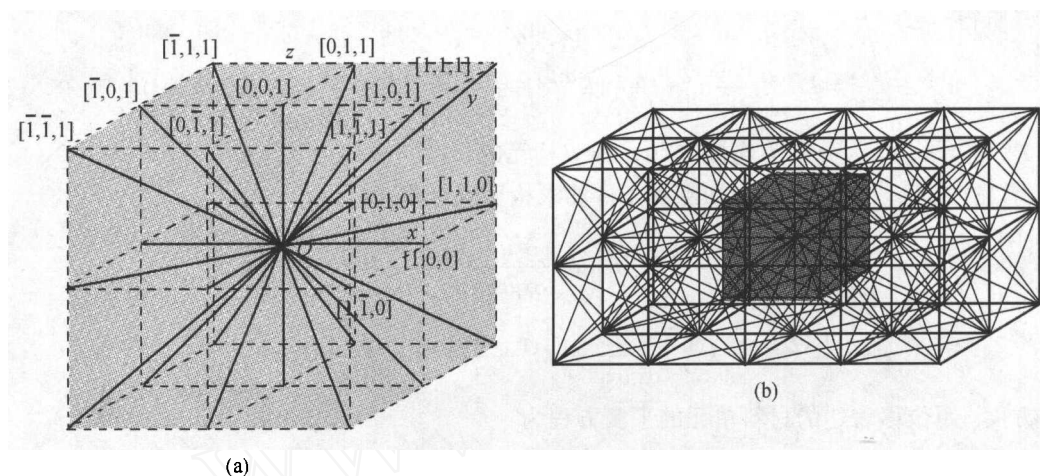


图 5 三维链网胞单元(a)及其构成的三维链网离散方式(b)

和(18)式及长度的变化, 链网胞中第 α 个构元的刚度

$$k^{(\alpha)} = a^3 H^{(\alpha)} \Delta \Omega^{(\alpha)} / (L^{(\alpha)})^2, \quad (19)$$

因此, 这 3 组构元的刚度 $k^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) 满足

$$k^{(1)} : k^{(2)} : k^{(3)} = 25 : 9 : 6. \quad (20)$$

3 链网胞参数标定

3.1 链网胞应变能

使用链网胞模拟材料时, 链网的应变能

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} k^{(\alpha, \beta)} [(\mathbf{u}^{(\alpha)} - \mathbf{u}^{(\beta)}) \cdot \mathbf{n}^{(\alpha, \beta)}]^2, \quad (21)$$

其中 α 和 β 为节点序列号; $\langle \alpha, \beta \rangle$ 对所有构元求和; $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{u}^{(\beta)}$ 分别为节点 α 和 β 的位移; $\mathbf{n}^{(\alpha, \beta)}$ 为从节点 α 和 β 到单位矢量; $k^{(\alpha, \beta)}$ 为构元的轴向刚度, 它们分别为相应的 $k^{(i)}$.

在纯剪切变形($u_1 = \gamma x_3, u_2 = 0, u_3 = \gamma x_1$)情况下, 图 5(a)所示边长为 a 链网胞的应变能

$$U_\gamma = \left(k^{(2)} + \frac{4}{3} k^{(3)} \right) a^2 \gamma^2. \quad (22)$$

在纯体积变形($u_1 = \eta x_1, u_2 = \eta x_2, u_3 = \eta x_3$)情况下, 链网胞的应变能

$$U_e = \left(\frac{3}{4} k^{(1)} + 3k^{(2)} + 3k^{(3)} \right) a^2 \eta^2. \quad (23)$$

3.2 平衡条件与对坐标系选择无关性条件

应变能 U 对位移 $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ 求偏导数为作用于节点 α 上的总合力. 节点平衡条件要求合力为零, 从而

$$F_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}^{(\alpha)}} = \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} k^{(\alpha, \beta)} \{ [(\mathbf{u}^{(\beta)} - \mathbf{u}^{(\alpha)}) \cdot \mathbf{n}^{(\alpha, \beta)}] \mathbf{n}^{(\alpha, \beta)} \} = 0. \quad (24)$$

当链网胞的尺寸越来越小时, 节点 β 趋近于节点 α , 可在节点 α 附近将 $\mathbf{u}^{(\beta)}$ 展开为 Taylor 级数,

取前二阶得

$$u_i^{(\beta)} - u_i^{(\alpha)} = L^{(\alpha,\beta)} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} n_s^{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{2} [L^{(\alpha,\beta)}]^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_s \partial x_t} n_s^{(\alpha,\beta)} n_t^{(\alpha,\beta)} \quad (i=1,2,3), \quad (25)$$

其中 $L^{(\alpha,\beta)}$ 与 $n_s^{(\alpha,\beta)}$ 为分别为连接节点 α 和 β 构元的长度与方向余弦.

将(25)式代入(24)式中, 可知平衡条件要求构元刚度满足

$$a^2 \left[\left(k^{(1)} - k^{(2)} - \frac{8}{3} k^{(3)} \right) \right] \left[\delta_{i1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \delta_{i2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_2} - \delta_{i3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_3} \right] + a^2 \left(2k^{(2)} + \frac{8}{3} k^{(3)} \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \left(k^{(2)} + \frac{4}{3} k^{(3)} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0, \quad (26)$$

另一方面, 用位移表达的材料单元的平衡方程为

$$(\lambda - \rho_c + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0, \quad (27)$$

式中 λ 和 μ 为材料的 Lamé 系数. 对照(26)式与(27)式知, 链网模型构元的刚度应满足

$$k^{(1)} - k^{(2)} - \frac{8}{3} k^{(3)} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{2k^{(2)} + \frac{8}{3} k^{(3)}}{k^{(2)} + \frac{4}{3} k^{(3)}} = \frac{\lambda - \rho_c + \mu}{\mu}, \quad (29)$$

可以验证, (28)式正是对坐标系选择无关性, 即对材料模型的客观性要求. 显然, (20)式所规定的刚度满足(28)式. 而由(20)和(29)式知, 可取第 2 种简单材料的体积模量

$$\rho_c = \lambda - \mu. \quad (30)$$

3.3 剪切模量要求及参数标定

由(22)式知, 要模拟材料单元的剪切模量, 模型构元的刚度必须满足

$$k^{(2)} + \frac{4}{3} k^{(3)} = 2a\mu. \quad (31)$$

于是, 满足离散条件表达(20)式和剪切模量表达(31)式的构元刚度

$$k^{(1)} = \frac{50}{17} \mu a, \quad k^{(2)} = \frac{18}{17} \mu a, \quad k^{(3)} = \frac{12}{17} \mu a. \quad (32)$$

可以验证, 标定后的链网胞满足材料单元的体积模量要求, 即

$$\left(\frac{3}{4} k^{(1)} + 3k^{(2)} + 3k^{(3)} \right) a^2 = \frac{3}{2} (3\lambda + 2\mu) a^3 - \frac{9}{2} \rho_c a^3. \quad (33)$$

且满足单轴拉伸模量要求, 即

$$\left(\frac{1}{4} k^{(1)} + \frac{1}{2} k^{(2)} + \frac{1}{3} k^{(3)} \right) a^2 = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) a^3 - \frac{1}{2} \rho_c a^3. \quad (34)$$

4 简化的三维链网模型

当 Poisson 比为 1/4 时, $\lambda = \mu$ 且 $\rho_c = 0$, 第 2 种简单材料的应变能可为零. 由于大多数工程材料的泊松比都接近 1/4, $\rho_c \ll k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}$, 于是可忽略第 2 种简单材料的作用. 实际上, 在

很多情况下静水应力和体积变形并不是所考虑的主要因素. 因此, 忽略 ρ_c 并令

$$\mu = \frac{8+8\nu'}{9+4\nu'}\mu', \quad E = \frac{10}{9+4\nu'}E', \quad (35)$$

从而

$$k^{(1)} = \frac{400(1+\nu')}{17(9+4\nu')}\mu'a, \quad k^{(2)} = \frac{144(1+\nu')}{17(9+4\nu')}\mu'a, \quad k^{(3)} = \frac{96(1+\nu')}{17(9+4\nu')}\mu'a, \quad (36)$$

式中 μ' , E' 和 ν' 分别为被模拟材料的剪切模量、杨氏模量和 Poisson 比. 这样, 链网模型简化为简单弹簧链网模型.

图 6 显示使用简单弹簧链网模型时杨氏模量和剪切模量相对误差随 Poisson 比 ν' 的变化规律, 其相对误差不大于 11%. 对于大多数 Poisson 比在 0.15~0.35 之间的工程材料, 相对误差小于 5%. 简化链网模型能够兼顾计算费用和精度.

可以验证^[11,12], 对于工程短纤维复合材料, 基体可以用链网体胞模拟, 针状增强体可直接用附加一维长构元模拟. 在大尺度模拟时, 如图 7 所示的离散方式可以大大简化计算规模. 同时, 链网模型便于根据材料内微裂纹损伤的物理机制建立简单明确的一维构元失效准则. Liu 等^[11,12]利用这种模型, 成功地研究了短纤维增强复合材料中应变分布规律.

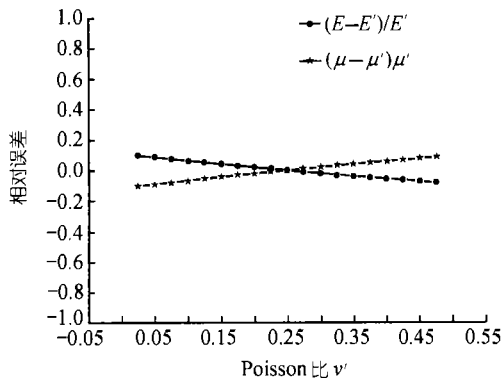


图 6 简化模型模拟刚度模量的相对误差

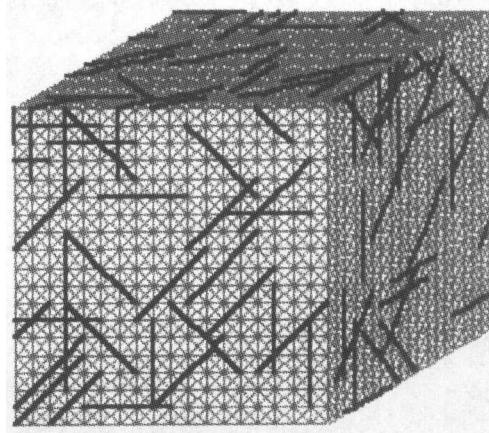


图 7 短纤维增强复合材料的离散模型

5 结论

(i) 本文基于离散质点间相互作用, 提出了三维空间取向的弹簧束组合作为构架的材料模型. 导出了优化离散方式, 构造了由一维构元组成的三维链网体胞单元.

(ii) 文中给出链网体胞构元几何、物理参数的标定方法, 证明该体胞能精确模拟 Poisson 比从 0~0.5 的任意材料力学行为.

(iii) 文中探讨模型简化问题, 旨在实现计算结果精度高而计算费用低的统一. 列出的例子显示使用该模型模拟短纤维增强复合材料的独特优点.

参 考 文 献

- 1 Hrennikoff A. Solution of problem of elasticity by the framework method. *J Appl Mech*, 1941, 12: 169~175
- 2 Holnicki-szulc J, Rogula D. Nonlocal continuum models of large engineering structures. *Arch Mech*, 1979, 31(6): 793~802
- 3 Herrmann H J, Roux S. *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*. Elsevier Science, North Holland: Amsterdam, 1990
- 4 Schlangen E, Garboczi E J. Fracture simulations of concrete using lattice models: computation aspects. *Eng Fract Mech*, 1997, 57: 319~332
- 5 Curtain W A, Scher H. Brittle fracture in disordered materials: a spring network model. *J Mater Res*, 1990, 5: 535~553
- 6 Chiaia B, Vervuurt A, van Mier J G M. Lattice model evaluation of progressive failure in disordered particle composites. *Eng Fract Mech*, 1997, 57: 301~318
- 7 Murat M, Anholt M, Wranger H D. Fracture behavior of short-fiber reinforced material. *J Mat Res*, 1992, 7(11): 3120~3130
- 8 Monette L, Anderson M P, Ling S, et al. Effect of modulus and cohesive energy on critical fiber length in fiber-reinforced composites. *J Mater Sci*, 1992, 27: 4393~4405
- 9 Liu X Y, Yan W D, Liang N. A pseudo-plastic engagement effect on the toughening of discontinuous fiber-reinforced brittle composites. *Metals and Materials*, 1998, 4: 242~246
- 10 Ostojastarzewski M, Sheng P Y, Alzebedeh K. Spring network models in elasticity and fracture of composites and polycrystals. *Comp Mater Sci*, 1996, 7: 82~93
- 11 Liu Q Y, Liang N, Liu X Y. Prediction of mechanical property of whisker reinforced metal matrix composite: part-I Model and Formulation. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2000, 13: 182~187
- 12 Liu X Y, Liu Q Y, Liang N. Prediction of mechanical property of whisker reinforced metal matrix composite: part-II Verification and Application. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2000, 13: 188~192