

文章编号: 1000-4750(2008)02-0209-05

水中悬浮隧道在冲击载荷作用下的 计算模型与数值模拟

*惠 磊, 葛 斐, 洪友士

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘 要: 建立了水中悬浮隧道在冲击载荷作用下的简化计算模型。用等效质量法将圆柱壳分布质量折算成冲击点处的集中质量, 模型中考虑流体附加质量和系统阻尼的影响。根据碰撞过程中的动量守恒、变形过程中的能量守恒以及结构的位移与内力关系, 得到问题的解析解。为验证解析解, 在 ANSYS / LS-DYNA 中建立了动态冲击有限元分析模型。通过算例分别考察了在忽略和考虑流体附加质量两种情况下, 冲击点位置和冲击速度对冲击点处最大径向位移的影响, 将解析解与数值解进行对比, 结果吻合较好。然后采用数值模拟方法得到了系统阻尼对计算结果的影响规律。数值模拟过程中还可以得到冲击点处的最大 Mises 应力。

关键词: 水中悬浮隧道; 冲击载荷; 附加质量; 阻尼; 数值模拟

中图分类号: U459.9 **文献标识码:** A

CALCULATION MODEL AND NUMERICAL SIMULATION OF SUBMERGED FLOATING TUNNEL SUBJECTED TO IMPACT LOADING

*HUI Lei , GE Fei , HONG You-shi

(State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

Abstract: A calculation model for submerged floating tunnel (SFT) subjected to impact loading is developed. The distributed mass of the cylindrical shell is converted into concentrated mass at the impact position. Based on energy conservation during deformation process, momentum conservation during impact and the relationship between displacements and internal forces, the analytical solution is obtained, which considers the effects of added water mass and system damping. In order to verify the analytical result, a finite element model of impact is established using the ANSYS/LS-DYNA code. A simulation example is given to examine the effects of impact position and impact velocity on the maximum radial displacement at impact position. Both cases with and without added water mass are considered. The analytical solution and numerical simulation are compared, showing that they are in good agreement. The effects of system damping on the results are obtained by further numerical simulation. During the numerical simulation, the maximum von Mises stress at impact position can also be obtained.

Key words: submerged floating tunnel; impact load; added mass; damping; numerical simulation

水中悬浮隧道, 即 SFT(Submerged Floating Tunnel), 是一种有别于传统交通形式的跨越海峡、湖泊、河流的结构型式。它是根据阿基米德浮力定律使隧道悬浮于水中, 因此在中国和意大利又被称

收稿日期: 2006-06-20; 修改日期: 2006-10-10

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(10532070)

作者简介: *惠 磊(1984—), 男, 安徽人, 硕士生, 主要从事水中悬浮隧道研究(E-mail: huilei@lnm.imech.ac.cn);

葛 斐(1980—), 男, 安徽人, 助理研究员, 博士, 主要从事水中悬浮隧道研究(E-mail: gefei@imech.ac.cn);

洪友士(1951—), 男, 福建人, 研究员, 博士, 主要从事水中悬浮隧道及材料力学性能研究(E-mail: hongys@imech.ac.cn).

作是“阿基米德桥”。SFT 通常有三种固定形式：由立柱支撑、由锚索锚固在水底和由水面浮箱承托，如图 1 所示。与传统的桥梁和隧道方案相比，它具有单位长度造价低，对周围环境影响小，受水深、天气等外界因素影响小，能耗低等优势。因此欧洲、美国和日本等很多国家开展了对水中悬浮隧道的研究。但是迄今为止，世界上还没有一座真正的水中悬浮隧道建成。除了设计经验的缺乏外，隧道安全性能的保障也是个很重要的因素。

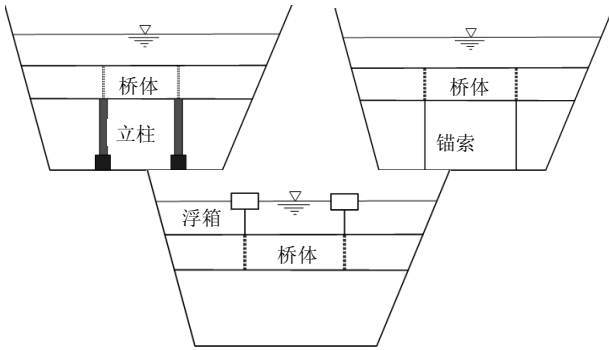


图 1 SFT 三种典型固定形式

Fig.1 Three kinds of typical fixation of SFT

目前已有的研究主要针对 SFT 及其锚索在波流场中、受地震激励作用以及涡激振动的动态响应问题。Remseth S 等^[1]分析了风浪作用下 SFT 的全局动态响应，用基于 N-S 方程的有限元方法计算了规则波作用下二维模型的水动力。Kunisui H 等^[2]针对北海道的波浪环境通过二维模型实验研究了悬浮隧道的动态特性。Morita S 等^[3]基于二维波势理论，考虑水的压缩性，数值模拟了垂直地震激励下 SFT 的动力响应。Fogazzi P 等^[4]考虑流体与结构的耦合，给出了锚索固定式水中悬浮隧道在地震作用下的有限元分析程序。麦继婷等^[5]将单跨悬浮隧道简化成简支梁，研究了水中悬浮隧道在波流作用下的涡激动力响应。已有研究中还没有涉及水中悬浮隧道安全性能的研究。分析水中悬浮隧道在沉船、潜艇撞击等冲击载荷作用下的内力和变形，对于保障隧道的安全性能具有重要的意义。

本文提出了水中悬浮隧道受冲击载荷作用的简化计算模型，分别采用解析求解和数值模拟的方法对问题进行求解，然后通过算例给出计算结果。

1 解析求解

偏安全考虑，将水中悬浮隧道简化为两端简支圆柱壳，冲击物集中作用于一点，通过引入等效质量系数将圆柱壳分布质量折算成冲击点处的集中

质量。引入如下假设条件：不考虑碰撞过程中的动量损失和结构自身阻尼的影响，壳体在整个过程中处于弹性变形阶段，碰撞结束以后冲击物和壳体一起运动。

建立如图 2 所示的简化计算模型。圆柱壳长为 L ，截面半径为 R ，厚度为 h ，质量为 M ，流体附加质量为 M' ；壳体材料的密度为 ρ ，弹性模量为 E ，泊松比为 μ ；冲击物为刚体，质量为 m (已考虑附加质量)，冲击速度为 V_0 ，冲击点距离圆柱壳端部距离为 x 。引入无量纲化坐标 $\xi = x/R$ ， $\varphi = \beta/R$ ，其中 β 为弧长。

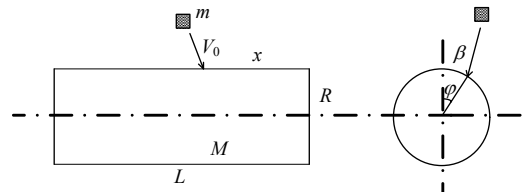


图 2 冲击载荷作用分析模型

Fig.2 Analysis model for SFT under impact

根据变形过程中的能量守恒，冲击后瞬间系统具有的机械能等于冲击点达到最大变形处时(极点)系统的弹性势能和整个过程中阻尼力做功之和，有：

$$\frac{1}{2}[m + e(M + M')]V^2 + mgw_d \cos \varphi + mgv_d \sin \varphi = \frac{1}{2}P_u u_d + \frac{1}{2}P_v v_d + \frac{1}{2}P_w w_d + W_f \quad (1)$$

式中： u_d 、 v_d 、 w_d 分别表示极点处的轴向位移、周向位移和径向位移； P_u 、 P_v 、 P_w 分别表示相应方向上的弹性力； e 为等效质量系数； V 为碰撞结束后系统的速度； W_f 为整个过程中阻尼力做功。

根据弹性变形假设有：

$$\frac{P_w}{Q_w} = \frac{w_d}{w_{st}} \quad (2)$$

式中： Q_w 表示冲击物静力作用时冲击点的径向力； w_{st} 为静力作用时冲击点的径向位移。在式(1)中令 $u_d = K_1 w_d$ ， $v_d = K_2 w_d$ ， $P_u = L_1 P_w$ ， $P_v = L_2 P_w$ ，并利用式(2)可得：

$$\frac{1}{2}[m + e(M + M')]V^2 + (mg \cos \varphi + mgK_2 \cdot \sin \varphi)w_d = \frac{1}{2}(1 + K_1 L_1 + K_2 L_2) \frac{w_d^2}{w_{st}} Q_w + W_f \quad (3)$$

式(3)是关于 w_d 的二次方程，一共有 9 个未知数： V 、 M' 、 W_f 、 K_1 、 K_2 、 L_1 、 L_2 、 w_{st} 、 e ，其中 V 可以根据碰撞过程中的动量守恒求得，下面分别求解其它 8

个未知数。

1.1 M' 的确定

实验研究与理论分析表明,当结构的振动幅值相对于结构尺寸很小,并且不考虑流体的压缩性和粘性时,静止流体中结构的附加质量仅与结构的形状有关,即^[6]:

$$M' = \rho_w F(S) \quad (4)$$

半径为 R 的圆柱体,其单位长度上流体附加质量为:

$$m_a = \pi C_M \rho_w R^2 \quad (5)$$

其中: ρ_w 为流体密度; C_M 为附加质量系数,取为 1.0。

1.2 W_f 的确定

流体阻尼力可以用 Morison 公式计算,此时体系的运动方程为:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \rho_w C_D A_D |\dot{x}| \dot{x} + kx = f(t) \quad (6)$$

式中: m 为已包含流体附加质量的等效质量; c 为结构阻尼常数; C_D 为流体阻尼常数,取为 0.6; A_D 为结构有效受力面积; k 为结构刚度; $f(t)$ 为任意作用载荷。

上式中的非线性流体阻力项 $\rho_w C_D A_D |\dot{x}| \dot{x}$ 可以等效为线性粘滞阻尼力,等效结果为^[7]:

$$m\ddot{x} + \left[c + \frac{8}{3\pi} \rho_w C_D A_D x_{st}(\omega) \omega \right] \dot{x} + kx = f(t) \quad (7)$$

式中: ω 为结构的自振频率, $x_{st}(\omega)$ 为静态位移。

令等效粘滞阻尼系数 $c_{eq} = (8/3\pi) \rho_w C_D A_D \cdot x_{st}(\omega) \omega$, 则上式可以写成为:

$$m\ddot{x} + (c + c_{eq})\dot{x} + kx = f(t) \quad (8)$$

将阻尼力沿着位移路径数值积分可得到阻尼力做功 W_f 。如果 $c/c_{eq} = 7.85 \rho_w L h \xi / (\rho_w R x_{st}) \gg 1$, 则在忽略结构阻尼的前提下可以忽略流体阻尼力,此时 $W_f = 0$, 其中 ξ 为结构阻尼比。

1.3 K_1 、 K_2 的确定

圆柱壳上任意一点的瞬时位移分量可以用瞬态位移函数表示为^[8]:

$$\begin{cases} u_d = C_{mn} \lambda (n^2 - \mu \lambda^2) \cos(n\varphi) \cos(\lambda \xi) \exp(i\omega_{mn} t) \\ v_d = C_{mn} n [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2] \sin(n\varphi) \sin(\lambda \xi) \exp(i\omega_{mn} t) \\ w_d = C_{mn} (\lambda^2 + n^2)^2 \cos(n\varphi) \sin(\lambda \xi) \exp(i\omega_{mn} t) \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可得,位移关系系数 K_1 、 K_2 为:

$$K_1 = \frac{\lambda (n^2 - \mu \lambda^2) \cos(\lambda \xi)}{(\lambda^2 + n^2)^2 \sin(\lambda \xi)}$$

$$K_2 = \frac{n [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2] \sin(n\varphi)}{(\lambda^2 + n^2)^2 \cos(n\varphi)} \quad \text{式中 } \lambda = m\pi R / L。$$

1.4 L_1 、 L_2 的确定

根据壳体结构的几何关系,并将几何关系代入勒夫简化物理关系^[9],得内力关系系数:

$$L_1 = \frac{CR^2 \{-\lambda^2 (n^2 - \mu \lambda^2) + n \mu [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2] + \mu (\lambda^2 + n^2)^2\}}{D \{(\lambda^3 + n^2 \lambda) (\lambda^2 + n^2)^2 + n \lambda [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2]\}}$$

$$L_2 = \frac{C(1 - \mu) R^2 \lambda \tan(n\varphi) \{[(2 + \mu) \lambda^2 + n^2] - n(n^2 - \mu \lambda^2)\}}{2D \{(\lambda^3 + n^2 \lambda) (\lambda^2 + n^2)^2 + n \lambda [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2]\}}$$

式中 $C = Eh / (1 - \mu^2)$, $D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)]$ 。

1.5 w_{st} 的确定

两端简支圆柱壳的齐次边界条件为:

$$v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

取满足边界条件的位移函数为^[10]:

$$\begin{cases} u_{st} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [u_{mn}(t) \cos(\lambda \xi) \cos(n\varphi) + u'_{mn}(t) \cos(\lambda \xi) \sin(n\varphi)], \\ v_{st} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [v_{mn}(t) \sin(\lambda \xi) \sin(n\varphi) - v'_{mn}(t) \sin(\lambda \xi) \cos(n\varphi)], \\ w_{st} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [w_{mn}(t) \sin(\lambda \xi) \cos(n\varphi) + w'_{mn}(t) \sin(\lambda \xi) \sin(n\varphi)]. \end{cases} \quad (11)$$

式中: $u_{mn}(t)$ 、 $v_{mn}(t)$ 、 $w_{mn}(t)$ 为关于 $\varphi = 0$ 对称位移的时间系数; $u'_{mn}(t)$ 、 $v'_{mn}(t)$ 、 $w'_{mn}(t)$ 为关于 $\varphi = 0$ 反对称位移的时间系数。将分布载荷 q_u 、 q_v 、 q_w 也展开成类似的形式,根据位移时间系数与载荷时间系数 q_{imn} 、 q'_{imn} ($i = u, v, w$) 之间的关系式,可以求出当冲击载荷静力作用时,冲击点处的最大径向位移 w_{st} 。

当表面载荷为集中载荷 P 时,作用点位置为 (x_0, φ_0) , 将 P 转化为分布载荷有:

$$q_i = P_i \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(\varphi - \varphi_0), \quad i = u, v, w \quad (12)$$

式中 $\delta(x)$ 为 Dirac δ 函数^[11]。

1.6 e 的确定

等效原理是根据折算前后壳体的动能相等,有:

$$\frac{1}{2} \rho h R^2 \int_0^{L/R} \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\varphi d\xi = \frac{1}{2} e M (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)_p \quad (13)$$

式中, 左边表示圆柱壳分布质量具有的动能, 右边表示折算后集中质量具有的动能, 其中下标 p 表示在冲击点处的值。将式(9)代入上式, 得等效质量系数:

$$e = \frac{1}{4} \{ \lambda^2 (n^2 - \mu \lambda^2)^2 + n^2 [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2]^2 + (\lambda^2 + n^2)^4 \} \cdot \{ \lambda^2 (n^2 - \mu \lambda^2)^2 \cos^2(n\varphi_p) \cdot \cos^2(\lambda \xi_p) + (\lambda^2 + n^2)^4 \cos^2(n\varphi_p) \sin^2(\lambda \xi_p) + n^2 [(2 + \mu) \lambda^2 + n^2]^2 \sin^2(n\varphi_p) \sin^2(\lambda \xi_p) \}^{-1} \quad (14)$$

2 数值模拟

为验证解析计算结果, 用 ANSYS/LS-DYNA 显式动力分析有限元软件模拟冲击过程, 建立如图 3 所示的有限元分析模型。模型中用 Shell 163 单元模拟水中悬浮隧道, Solid 164 单元模拟刚性冲击物。隧道两端简支, 在冲击物单元上施加冲击速度, 冲击物单元与壳体单元之间的接触方式选择点面接触(NTS)。流体附加质量以附加密度的形式加到结构上^[12], 结构自身阻尼和流体阻尼可以采用 Eddamp 的命令加到模型中。计算时间为 0.05s, 时间步长取作 1.0×10^{-3} s。计算完毕后, 通过后处理器可以观察壳体单元各节点位移和内力的大小。

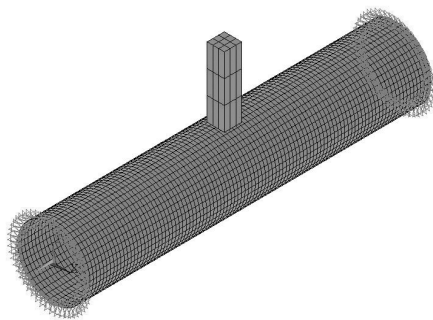


图 3 冲击过程的有限元分析模型

Fig.3 Finite element model of impact

3 算例

一节两端简支的水中悬浮隧道, 长度为 20m, 截面半径为 2m, 厚度为 0.1m。壳体材料弹性模量为 2.1×10^5 MPa, 泊松比为 0.3, 密度为 7800 kg/m^3 。冲击物为刚性体, 质量为 10t, 冲击速度为 3m/s。估算结果表明, 算例中 $C/C_{eq} \gg 1$, 因此解析求解时可以忽略流体阻尼力的影响。

固定坐标 $\varphi=0$, 在忽略流体附加质量和考虑流体附加质量两种情况下, 分别计算当冲击点沿着轴

向变化时, 冲击点处最大径向位移的理论解(TD)和数值解(ND), 并将计算结果进行对比。同时还可以得到冲击点处最大 Mises 应力的数值解(NS), 可以将它与材料的屈服强度进行对比以判断材料是否已经屈服, 其计算结果如表 1 所示。基于结构对称考虑, 取半跨进行分析。

表 1 冲击点处径向位移和应力的计算结果

Table 1 Calculation results of radial displacement and Mises stress at the impact position

冲击位置	忽略流体附加质量			考虑流体附加质量		
	TD/mm	ND/mm	NS/MPa	TD/mm	ND/mm	NS/MPa
$\xi=1$	14.29	17.57	293.8	13.36	17.01	305.5
$\xi=2$	18.34	19.85	257.4	17.55	18.57	263.5
$\xi=3$	20.47	20.64	242.4	19.67	18.64	258.1
$\xi=4$	21.55	20.75	240.9	20.74	18.63	258.0
$\xi=5$	21.88	20.72	241.5	21.06	18.63	257.1

从表 1 计算结果可以看出, 冲击点最大径向位移的解析解和数值解误差较小。随着冲击点越来越靠近跨中位置处, 冲击点处最大径向位移越来越大, 而 Mises 应力却越来越小。考虑流体附加质量后, 冲击点最大径向位移的计算结果变小, 最大降幅 11.4%, 而冲击点最大 Mises 应力的计算结果变大, 最大增幅 6.6%。由此可知, 流体附加质量对计算结果的影响也较小。

接着考察冲击速度对冲击点处最大径向位移和最大 Mises 应力的影响。固定冲击点位置为隧道中部($\xi=5$) $\varphi=0$ 处, 改变冲击速度的大小, 将计算结果进行对比, 如表 2 所示。

表 2 冲击速度对计算结果的影响

Table 2 Effects of impact velocity

V_0 (m/s)	忽略流体附加质量			考虑流体附加质量		
	TD/mm	ND/mm	NS/MPa	TD/mm	ND/mm	NS/MPa
0.5	4.10	3.99	43.3	3.93	3.51	46.9
1.0	7.64	7.27	82.9	7.35	6.47	88.4
2.0	14.75	13.94	162.1	14.20	12.51	172.8
4.0	29.00	27.58	321.0	27.92	24.86	341.3
8.0	57.49	55.95	640.3	55.37	50.75	677.8

从表 2 计算结果可以看出, 理论解和数值解吻合较好, 对于工程应用来说可以满足其精度要求。冲击点最大径向位移和最大 Mises 应力随着冲击速度的增加而线性增加。当壳体厚度为 0.1m 时, 如果壳体材料为 Q420 钢(屈服强度为 325MPa), 冲击速度超过 4m/s 就会引起材料的屈服。同样还可以验算在不同的冲击速度和壳体厚度组合下, 材料是否已经达到屈服强度。

下面采用有限元模拟的方法在考虑流体附加质量的基础上, 来观察系统阻尼对计算结果的影响。因为本算例中 $C/C_{eq} \gg 1$, 所以可以只考虑结构自身阻尼的影响, 否则可以将流体阻尼折算成结构自身阻尼进行计算。采用 ANSYS 中的模态分析功能可以得到结构的前 10 阶振动频率分别为: 2×10^{-5} , 16.78、16.78、52.93、52.93、53.27、84.42、92.54、92.54、93.68, 当频率值相同时, 表示它们的相位不同。令结构的阻尼比为 $\xi = 4\%$, 则阻尼系数 $c = 2m\xi\omega$, 分别在前 10 阶固有频率下考虑结构阻尼的影响, 冲击点坐标为 $(\xi=5, \varphi=0)$, 冲击速度为 3m/s, 计算结果如表 3 所示。

表 3 系统阻尼对计算结果的影响

Table 3 Effects of system damping

阶数	频率	ND/mm	NS/MPa	阶数	频率	ND/mm	NS/MPa
1	2×10^{-5}	18.63	257.1	6	53.27	17.24	246.2
2	16.78	17.56	249.0	7	84.42	16.97	243.9
3	16.78	17.56	249.0	8	92.54	16.90	243.3
4	52.93	17.24	246.3	9	92.54	16.90	243.3
5	52.93	17.24	246.3	10	93.68	16.89	243.3

从表 3 计算结果可以看出, 随着自振频率的增大, 系统阻尼的影响逐渐增大, 系统阻尼将使位移和应力的计算结果变小。第 10 阶自振频率对应的阻尼力比无阻尼时, 位移计算结果减小了 9.3%, 应力计算结果减小 5.4%。因此在低阶振动模态时, 阻尼力产生的影响较小, 可以忽略, 但是随着振动模态阶数的增加, 阻尼的影响将会越来越大。

4 结论

本文提出了水中悬浮隧道在冲击载荷作用下的简化计算模型, 并给出了模型的理论求解和数值模拟方法。通过算例分别考察了冲击点位置、冲击速度对冲击点处最大径向位移和最大 Mises 应力的影响, 分别忽略和考虑流体附加质量两种情况将位移的理论解与数值解进行对比, 两者吻合较好。计算结果表明考虑流体附加质量的影响使冲击点处最大径向位移的计算结果变小, 而使最大 Mises 应力的计算结果变大; 冲击点处最大径向位移和最大 Mises 应力随冲击速度的增加而线性增加。在考虑系统阻尼情况下的数值模拟结果表明: 在低阶振动模态下, 阻尼力的影响较小, 但是随着模态阶数增加, 阻尼力的影响将会增大。

参考文献:

[1] Remseth S, Leira B J, Okstad K M, Mathisen K M.

- Dynamic response and fluid/structure interaction of submerged floating tunnels [J]. Computers and Structures, 1999, 72(4): 659—685.
- [2] Kunisu H, Mizuno S, Mizuno Y, Saeki H. Study on submerged floating tunnel characteristics under the wave condition [C]// Proc. of the international offshore and polar engineering conference. Osaka: ISOPE, 1994, 27—32.
- [3] Morita S, Yamashita T, Mozimp Y, Mineta M, Kurosaki K. Earthquake response analysis of submerged floating tunnels considering water compressibility [C]// Proc. of the international offshore and polar engineering conference. Osaka: ISOPE, 1994, 20—26.
- [4] Fogazzi P, Perotti F. The dynamic response of seabed anchored floating tunnels under seismic excitation [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2000, 29: 273—295.
- [5] 麦继婷, 罗忠贤, 关宝树. 波浪作用下悬浮隧道的涡激动力响应[J]. 铁道学报, 2005, 27(1): 102—105.
- Mai Jiting, Luo Zhongxian, Guan Baoshu. The Vortex-Excited dynamic response for a submerged floating tunnel under the combined wave and current effect [J]. Journal of The China Railway Society, 2005, 27(1): 102—105. (in Chinese)
- [6] Blevins R O. Formulas for natural frequency and mode shape [M]. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- [7] 贾学敏. 海岸高桩码头结构受地震和海浪载荷作用的近似计算[J]. 振动、测试与诊断, 1993, 13(1): 17—23.
- Jia Xuemin. An approximate calculation of seashore High-Pill structure under loadings of earthquake and waves [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1993, 13(1): 17—23. (in Chinese)
- [8] 成祥生. 闭合圆柱壳在冲击载荷下的动力计算[J]. 应用数学和力学, 1989, 10(2): 167—172.
- Cheng Xiangsheng. The dynamic computation of closed cylindrical shell under impact load [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1989, 10(2): 167—172. (in Chinese)
- [9] 诺夫日洛夫 B B. 薄壳理论[M]. 北京: 科学出版社, 1959.
- Rovorilov B B. Thin shell theory [M]. Beijing: Science Press, 1959. (in Chinese)
- [10] 吴连元, 许昌. 圆柱壳体在移动集中荷载作用下的弯曲解[J]. 上海交通大学学报, 1989, 23(5): 45—54.
- Wu Lianyuan, Xu Chang. Bending analysis of circular cylindrical shell subjected to concentrated moving loads [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1989, 23(5): 45—54. (in Chinese)
- [11] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- Wu Chongshi. Methods of mathematical physics [M]. Beijing: Peking University Press, 2001. (in Chinese)
- [12] 王自力, 蒋志勇, 顾永宁. 船舶碰撞数值仿真的附加质量模型[J]. 爆炸与冲击, 2002, 22(4): 321—326.
- Wang Zili, Jiang Zhiyong, Gu Yongning. An added water mass model for numerical simulation of ship/ship collisions [J]. Explosion and Shock Waves, 2002, 22(4): 321—326. (in Chinese)