

图像法求液滴表面张力和接触角

宁 乔^{1,5} 朱志强^{2,5} 吕旭涛⁴ 于 强¹ 袁章福³

¹(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

²(中国科学院力学研究所)

³(中国科学院过程研究所)

⁴(中国科学技术大学自动化系)

⁵(中国科学院研究生院)

摘 要 空间流体实验具有无人操作的特殊性, 需要对监控图像进行实时处理, 得到目标参数. 本文研究了利用照相机捕捉到的液滴灰度图像, 分析求取液滴的表面张力、接触角、体积等物理参数的方法. 针对液滴的灰度图像, 利用边界提取、阈值分割等图像处理方法, 得到液滴的基本轮廓. 建立基于液面像素点坐标的拉普拉斯方程, 运用牛顿-拉夫逊法、龙格-库塔法、坐标轮换法等多种数值方法, 对液滴的边界进行拟合, 寻求最优的轮廓拟合点. 根据最优的拟合点, 确定液滴的物理参数. 提出了利用牛顿法与一维寻优相结合的算法进行轮廓拟合的方法, 并与文献 [1] 提出的算法进行了比较, 证明了该方法具有收敛速度较快, 拟合精度较高的特点. 该方法是实现空间蒸发液滴热毛细对流和接触角测量实验的一项关键技术, 同时也可以运用到非接触测量的实验场合.

关键词 表面张力; 接触角; 图像处理

中图分类号 V 524

Determine the Surface Tension and Contact Angle of Drop by Image Processing Method

NING Qiao^{1,5} ZHU Zhiqiang^{2,5} LÜ Xutao⁴ YU Qiang¹ YUAN Zhangfu³

¹(Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

²(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

³(Institute of Process Engineering, Chinese Academy of Sciences)

⁴(University of Science and Technology of China, Department of Automation)

⁵(Graduate University of Chinese Academy of Sciences)

Abstract The liquid experiment in space needs intelligence to deal with the surveillance image right away to obtain the goal parameters. A method is investigated to analyze the physical feature of a drop, such as surface tension, contact angle and volume through fitting contour of the drop picture. From the grey picture, generally contour of a drop is obtained by edge detection and segmentation algorithms. Constructed the Laplace equation of the drop, made contour approach process through comparing and using Newton-Raphson method, Runge-Kutta method and coordinate optimizing method. With the help of contour approach, physical feature of the drop is obtained. A new algorithm which nests Newton-Raphson method with One-dimensional optimization is presented.

2007-08-22 收到原稿, 2007-10-28 收到修定稿

Compared with the original algorithm raised by Ref. [1], the new one reached convergence quickly with high accuracy. It is a key technique of the space experimental system for liquid experiment. The method is especially applicable for unmanned environment as well as non-contact measurement in the experiments.

Key words Surface tension, Contact angle, Image processing

1 引言

对液滴外形轮廓进行研究从而得到液滴的表面张力、接触角, 体积等物理参数, 一直是流体研究的重要内容. 随着数字图像处理水平的提高, 直接采集液滴的灰度照片, 利用算法程序提取图像轮廓进行分析拟合, 可以作为流体实验的重要辅助手段. 本文基于 Rotenberg^[1] 等提出的牛顿-拉夫逊轮廓拟合法, 利用一维寻优和牛顿-拉夫逊法嵌套的方法进行轮廓拟合, 减少了大量计算和迭代过程, 得到了比较精确的拟合结果. 该方法简单智能, 尤其适用于空间实验和非接触测量^[4] 等无人操作的情况.

2 理论和原理

2.1 液滴轮廓的拟合原理

对弯曲的液面上任意一点 p , 液体内部的压力 P_1 与液体外的压力 P_2 不同, 在液面两边就会产生压力差 $\Delta P = P_1 - P_2$, 其数值与液面曲率大小有关, 可以表示为

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

这是液面的拉普拉斯方程^[1], 其中, γ 为表面张力, R_1 和 R_2 为 p 点的第一和第二曲率半径.

在除了重力没有其他外力的条件下, 压力差可以用如下公式表示:

$$\Delta P = \Delta P_0 + (\Delta\rho)gz_1. \quad (2)$$

其中, ΔP_0 为选取的参考平面上的表面压力差, $\Delta\rho$ 为液面两相的密度差, g 为重力加速度, z_1 为 p 点距离参考平面的垂直高度.

如图 1 所示^[3], 以曲线的顶点作为原点, x 轴为过原点的切线, O_1 和 O_2 为过 p 点的两个曲率圆圆心, R_1 和 R_2 为两个曲率半径. 由于对称性, 原点处 $R_1 = R_2 = R_0$, 则由式 (1) 可得

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R_0},$$

又因

$$R_2 = \frac{x_1}{\sin \phi},$$

则式 (1) 可以变为

$$\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sin \phi}{x_1} \right) = \frac{2\gamma}{R_0} + (\Delta\rho)gz_1. \quad (3)$$

其中, ϕ 为某一点的切线和数据平面之间的旋转角. 式 (3) 是求取表面张力的理论基础.

由于对称性, 只需要考虑右半部分曲线, 左半部分可以完全由镜像得到, 右半部分曲线可以简单表示为 $x_1 = x_1(s_1)$ 和 $z_1 = z_1(s_1)$, 其中 s_1 是从原点到该点的弧线长度.

由图 1 可知,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \cos \phi, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \sin \phi,$$

又因为 $ds_1 = R_1 d\phi$, 结合式 (3), 则可以得到

$$\frac{d\phi}{ds_1} = \frac{2}{R_0} + \frac{(\Delta\rho)g}{\gamma} z_1 - \frac{\sin \phi}{x_1}. \quad (4)$$

边界条件是 $x_1(0) = z_1(0) = \phi(0) = 0$.

如图 2 所示, 假设 u_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 为由液滴图像得到的实验轮廓点, $v = v(s_1)$ 为计算得到

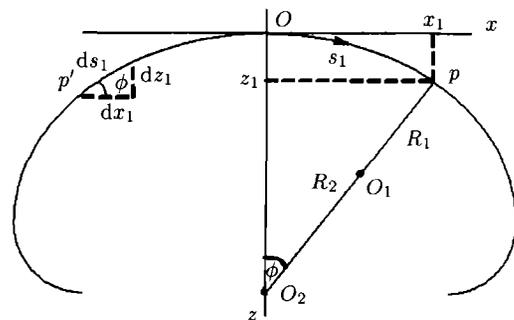


图 1 几何分析

Fig.1 Geometry analysis graph

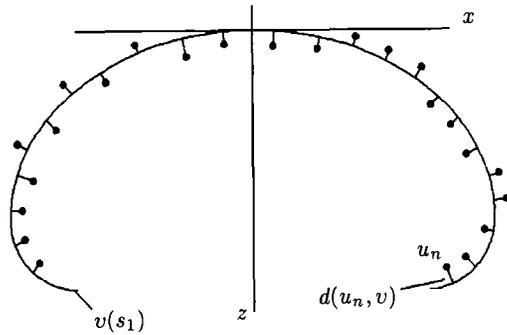


图2 边界拟合点

Fig.2 Contour approach point graph

的拉普拉斯弧线, 则目标函数定义为

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [d(u_n, v)],$$

其中, $d(u_n, v)$ 是 u_n 与弧线 v 之间的法向距离. 轮廓拟合的目标是找到令 E 最小的弧线 v , 以及正确的原点坐标 (x_0, z_0) , 从而确定整个液滴边界的弧线^[1].

2.2 轮廓拟合的方法

确定原点坐标 (x_0, z_0) 的简单方法是, 利用轮廓的对称性, 对二值图像进行逐行扫描, 找到整个图像的中轴线, 中轴线与轮廓第一行相交处即为坐标原点. 找到坐标原点之后, 其他轮廓点的坐标同时确定. 对轮廓点坐标 s_1, x_1 和 z_1 进行归一化, 有

$$s = \frac{s_1}{R_0}, \quad x = \frac{x_1}{R_0}, \quad z = \frac{z_1}{R_0},$$

带入式 (4) 并参考图 1 中的几何关系可以得到如下

方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \phi, \\ \frac{dz}{ds} = \sin \phi, \\ \frac{d\phi}{ds} = 2 + \frac{(\Delta\rho)gR_0^2}{\gamma} z - \frac{\sin \phi}{x} = 2 + \beta z - \frac{\sin \phi}{x}. \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\beta = \frac{(\Delta\rho)gR_0^2}{\gamma}$. 式 (5) 中只有 β 一个未知参数, 所以可将 β 视为轮廓曲线的形状参数. 对于每一个 β 值, 利用龙格-库塔法解式 (5) 方程组, 就可以得到一组曲线拟合结果 $(x_i, z_i), i = 1, 2, \dots, N$. 假设实验轮廓点是 $(X_i, Z_i), i = 1, 2, \dots, N$, 则误差函数可表示为

$$E = \sum_{i=1}^N e_i. \quad (6)$$

其中, $e_i = \frac{1}{2} [(R_0 x_i - X_i)^2 + (R_0 z_i - Z_i)^2]$.

为了使误差函数最小, 需要选择合适的 R_0 和 β , 使得式 (6) 取得最小值. 然后根据误差函数取得最小值时的 R_0 和 β , 可以计算液滴的表面张力和接触角.

3 算法及实现

3.1 边界提取

首先利用图像形态学处理的方法, 直接对图像进行边缘检测, 找到灰度变化剧烈的边缘点, 进行边界提取, 得到实验轮廓点. 如图 3 所示, 图 3(a)

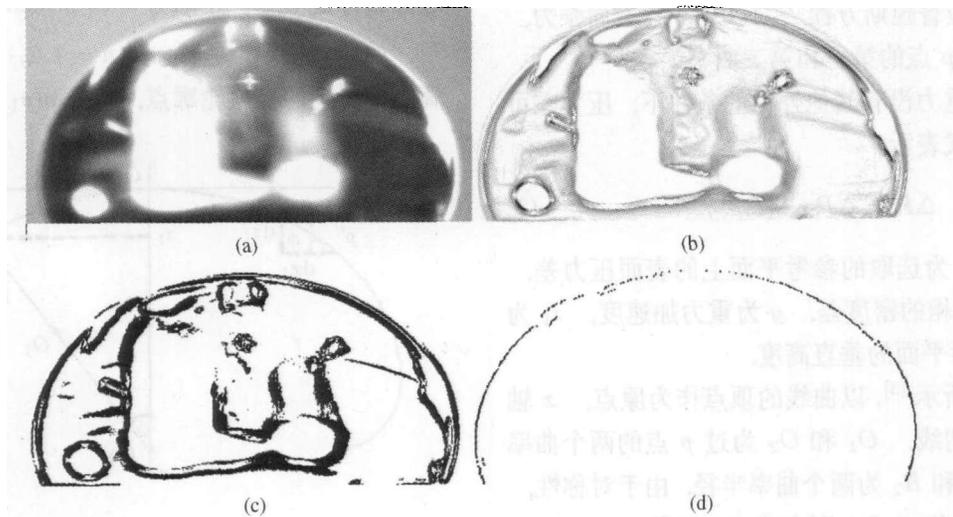


图3 边界提取

Fig.3 Contour pick-up graph

为采集到的硅油液滴灰度图片, 由于反光的原因, 图片明暗差别很大, 边界不清晰. 图 3(b) 为利用 Sobel 算子对图 3(a) 边缘检测的结果,

反光造成了内部的虚假轮廓和边界轮廓的少量断裂. 图 3(c) 为对图 3(b) 进行灰度阈值二值化处理的结果, 二值化之后的边界更突出, 滤除了部分噪声干扰. 图 3(d) 为对图 3(c) 进行外围轮廓处理的结果, 基本消除了内部的虚假轮廓, 得到实验轮廓点.

3.2 边界拟合

3.2.1 牛顿-拉夫逊迭代法

选择合适的 R_0 和 β , 使式 (6) 取得最小值, 等价于对目标方程求偏导数, 令偏导数为零, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial R_0} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial e_i}{\partial R_0} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial e_i}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}$$

这是两个变量求极值的问题, 可以用牛顿-拉夫逊算法进行迭代求解, 有

$$\begin{cases} R_0^{k+1} = R_0^k - \delta R_0^k, \\ \beta^{k+1} = \beta^k - \delta \beta^k. \end{cases} \quad (7)$$

牛顿-拉夫逊法迭代时, R_0 和 β 增量的求取需要利用式 (8) 所示的海森矩阵方程^[2]:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 e_i}{\partial R_0^2} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 e_i}{\partial R_0 \partial \beta} \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 e_i}{\partial R_0 \partial \beta} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 e_i}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R_0 \\ \delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial e_i}{\partial R_0} \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial e_i}{\partial \beta} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

矩阵方程中各个变量的求取如下:

$$\frac{\partial e_i}{\partial R_0} = (R_0 x_i - X_i) x_i + (R_0 z_i - Z_i) z_i,$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial \beta} = (R_0 x_i - X_i) R_0 x_i' + (R_0 z_i - Z_i) R_0 z_i',$$

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial R_0^2} = x_i^2 + z_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial R_0 \partial \beta} = (R_0 x_i - X_i) x_i' + (R_0 z_i - Z_i) z_i' +$$

$$R_0 (x_i x_i' + z_i z_i'),$$

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial \beta^2} = (R_0 x_i - X_i) R_0 x_i'' + (R_0 z_i - Z_i) R_0 z_i'' +$$

$$R_0^2 (x_i'^2 + z_i'^2). \quad (9)$$

由于上式计算中需要用到 $x', x'', z', z'', \phi', \phi''$ 等偏导参数, 所以需要先求取这些偏导参数, 具体方法是对式 (1) 求一阶和二阶偏导数, 可得到如下偏微分方程组^[2]:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{ds} = -\phi' \sin \phi, \\ \frac{dz'}{ds} = \phi' \cos \phi, \\ \frac{d\phi'}{ds} = \frac{\sin \phi}{x^2} x' + z + \beta z' - \frac{\cos \phi}{x} \phi'; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{dx''}{ds} = -\phi'^2 \cos \phi - \phi'' \sin \phi, \\ \frac{dz''}{ds} = -\phi'^2 \sin \phi + \phi'' \cos \phi, \\ \frac{d\phi''}{ds} = -\frac{2 \sin \phi}{x^3} x'^2 + \frac{2 \cos \phi}{x^2} x' \phi' + \frac{\sin \phi}{x^2} x'' + \\ 2z' + \beta z'' + \frac{\sin \phi}{x} \phi'^2 - \frac{\cos \phi}{x} \phi''. \end{cases} \quad (11)$$

同样可以利用龙格-库塔法解式 (10) 和式 (11) 的两个方程组, 可以得到 $x', x'', z', z'', \phi', \phi''$ 等偏导参数, 回代到式 (9) 中, 利用矩阵求逆^[6]解矩阵方程, 从而得到 δR_0 和 $\delta \beta_0$ 作为牛顿-拉夫逊法的迭代增量.

实际计算中, R_0 和 β 都需要初值, β 的初值可以取为 0, R_0 的初值可以用单变量的牛顿-拉夫逊迭代法求取^[2], 目标函数

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial D_i}{\partial R} = 0. \quad (12)$$

迭代变量

$$R^{k+1} = R^k - \delta R^k.$$

其中,

$$D_i = [\sqrt{X_i + (Z_i - R)^2} - R]^2,$$

期望 $\sum D_i$ 关于 R 取得极小值, 其物理意义是曲率圆的圆心到实验轮廓点的距离收敛于曲率半径.

3.2.2 坐标轮换法

由于已知目标误差函数式 (6) 需要选择合适的变量 R_0 和 β , 使得式 (6) 取得极小值, 这是典型的多变量寻优的问题, 可以用坐标轮换法来解决, 计算流程如图 4 所示.

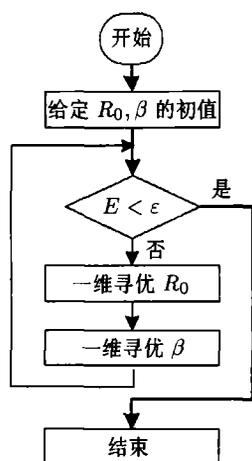


图4 坐标轮换法流程

Fig.4 Coordinate rotatory method flow graph

首先需要给定 R_0 和 β 的初值, 然后分别对 R_0 和 β 进行一维寻优, 也就是固定 R_0 和 β 中的一个, 改变另一个, 求取式 (6) 的最小值, 如此循环. 每经过一轮寻优, 都要进行判断, 误差函数是否满足指标精度, 即 $E < \epsilon$ (其中 ϵ 为给定的小量). 如果满足指标, 则循环结束, 找到 R_0 和 β , 否则, 继续下一轮寻优. 坐标轮换法寻优时, 需要定义出变量的变化区间, 精确的定义区间可以控制循环次数, 减少计算量.

当 β 的值从 0 变化到 25 时, 归一化的曲线变化趋势如图 5(a) 所示, 是正滴的倒置图; 当 β 的值从 -25 变化到 0 时, 曲线的变化趋势如图 5(b) 所示, 是倒滴的正置图. 所以处理正滴时, 有 $\beta > 0$, 计算时, β 的初值取 0, 然后逐步增加; 对于倒滴, 有 $\beta < 0$, 同样 β 的初值取 0, 然后逐步减少. R_0 的变化区间和图像尺寸关系密切, 利用式 (12) 迭代求得的 R_0 初值, 正负 50% 的范围可以作为其变化区间. 实际对 R_0 和 β 进行一维寻优时, 采取变步

长的搜索, 先确定大范围, 再进一步细化, 逐步锁定.

4 实验结果和结论

针对从灰度图象中背景中提取液滴的实验轮廓点, 运用前面提出的算法进行轮廓拟合, 结果如图 6 所示, 如图 6 中标记所示, 离散点是直接由图像处理得到的实验轮廓点, 曲线簇是轮廓拟合轨迹. 图 6(a) 和图 6(b) 是利用牛顿-拉夫逊法对两种不同的液滴进行轮廓拟合的结果, 可以看出, 轮廓拟合的轨迹很集中, 但是收敛性不好. 图 6(a) 的拟合趋势正确, 但变量增量不足, 没有最终锁定液滴边界; 图 6(b) 的拟合基本上是原地踏步, 变量增量过小.

图 6(c) 和图 6(d) 是利用坐标轮换法对同样的液滴进行轮廓拟合的结果, 可以看出, 轮廓拟合的轨迹很分散, 收敛性不稳定. 图 6(c) 经过几次寻优, 很快锁定了液滴边界, 而图 6(b) 的寻优反复跳变, 无法收敛.

由实验结果可知, 牛顿-拉夫逊法稳定, 但变量的增量可能过小, 尤其是 β 的变化缓慢; 坐标轮换法区间搜索, β 的变化范围大, 速度快, 但难以保证 R_0 和 β 同时寻得最优结果. 于是综合两种算法的优点, 对 β 进行一维寻优, 在 β 的渐变过程中, 针对每一个 β 值, 同时运用牛顿-拉夫逊法对 R_0 迭代求增量, 拟合结果如图 6(e) 和图 6(f) 所示. 可见, 采用该方法可以在保证 β 增量的同时控制拟合过程的稳定性, 收敛速度也比较快.

利用上述方法, 对常温下的水滴进行轮廓拟合, 结果如图 7 所示. 图 7(a) 为由灰度照片处理得到的实验轮廓点, 图 7(b) 为轮廓拟合的结果.

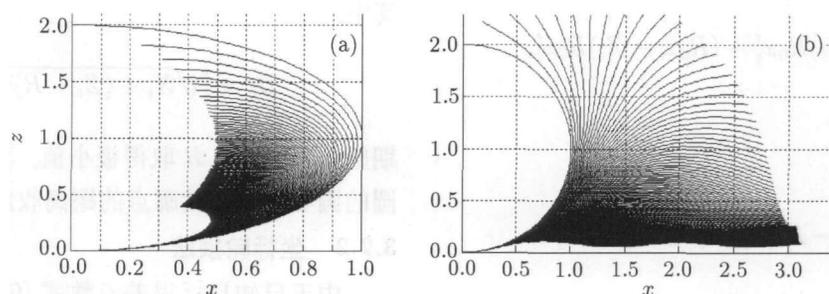


图5 轮廓拟合曲线簇

Fig.5 Contour approach curve cluster

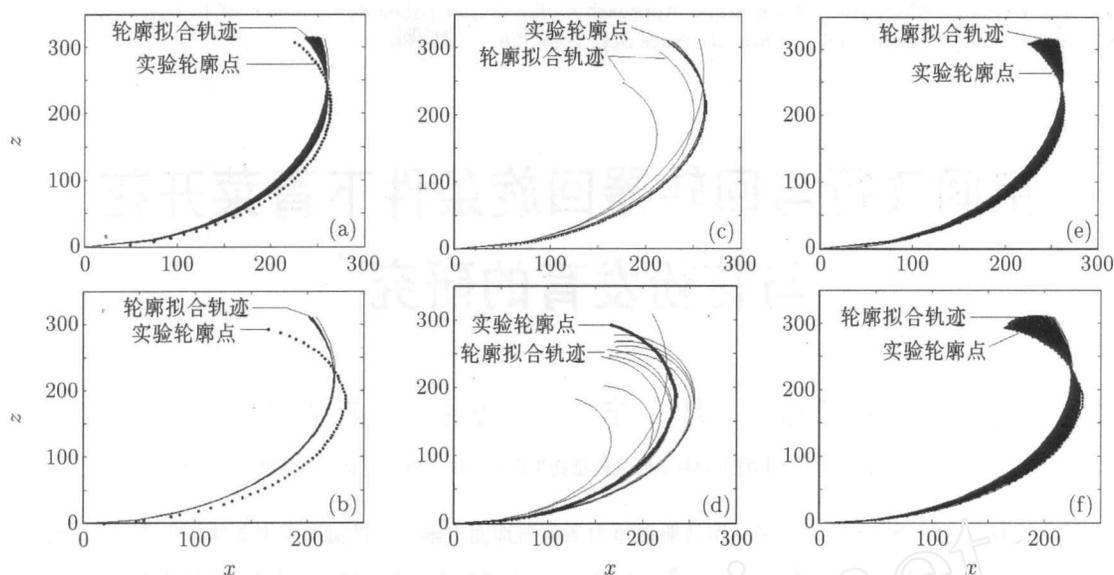


图 6 轮廓拟合实验结果

Fig.6 Experiment result of contour approach



图 7 水滴轮廓拟合分析

Fig.7 Water drop contour approach

拟合之后得到的物理参数分别为

$$R_0 = 281.6958, \quad \beta = 1.8957, \quad \phi = 160.44^\circ,$$

$$V = 0.0107 \text{ cm}^3, \quad S = 0.1573 \text{ cm}^2.$$

已知常温下密度差 $\Delta\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, 重力加速度 $g = 0.0098 \text{ N/g}$, 由此可以计算得到水滴的表面张力, 有

$$F_{\text{ten}} = \frac{\Delta\rho g R_0}{\beta} = 7.2927 \times 10^{-6} \text{ J/cm}^2,$$

给定的标准参考值^[1]为 $7.2785 \times 10^{-6} \text{ J/cm}^2$, 误差小于 0.2%, 已达到较好的精度.

对于同一个液滴, 间隔一段时间进行两次拟

合, 利用两次拟合得到的体积和表面积可以计算出液滴蒸发量及单位时间、单位表面积上的蒸发速率, 这一方法可以直接运用到流体实验中.

参考文献

- [1] Rotenberg Y, Boruvka L, Neumann A W. Determination of surface tension and contact angle from the shapes of axisymmetric fluid interface. *J. Colloid Interf. Sci.*, 1983, **93**(1):169~182
- [2] Xu Shiliang. Computer algorithm in common use. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. in Chinese (徐士良. 计算机常用算法. 北京: 清华大学出版社, 2005)
- [3] Takehiro Dan *et al.* Characteristics of image data processing techniques for sessile drop method. *J. Jap. Inst., Metals*, 1995, **59**(8):846~850
- [4] Yuan Zhangfu, Mukai K, Takagi K *et al.* Surface tension and its temperature coefficient of molten tin determined with the sessile drop method at different Oxygen partial pressures. *J. Colloid Interf. Sci.*, 2002, **254**(2):338~345
- [5] Ren Guoqiang *et al.* High-speed CCD image sampling based on an embedded system. *Opto-Ele. Eng.*, 2004, **31**(12):64~67. in Chinese (任国强等. 基于嵌入式系统的高速 CCD 图像采集. 光电工程. 2004, **31**(12):64~67)
- [6] Thomas H *et al.* Introduction to Algorithms (2nd ed). Beijing: China Machine Press, 2006