

文章编号: 1000-4750(2008)10-0072-04

# 线弹性土壤中埋设悬跨管道的屈曲分析

\*邢静忠<sup>1</sup>, 柳春图<sup>2</sup>

(1. 天津工业大学机械电子学院, 天津 300160; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘 要:** 建立了两端埋设在线弹性土壤中的悬跨管道的屈曲方程。利用细长梁小挠度理论, 建立了含有轴向压力的悬跨段和埋设段管道的弯曲控制方程。基于埋设段管道的刚度和变形特性, 建立了符合悬跨段管道实际情况的边界条件。导出了悬跨段管道对称屈曲和反对称屈曲的屈曲载荷方程, 通过数值求解给出了不同土壤刚度系数条件下悬跨段管道屈曲载荷。研究表明: 悬跨段管道的屈曲载荷系数依赖于土壤刚度系数, 简支梁模型只在特定的土壤刚度系数下适用于悬跨管道; 在土壤刚度系数很大时, 两端固支梁模型才能反映悬跨管道的屈曲特性。建议采用该方法进行埋设悬跨管道的屈曲分析。

**关键词:** 悬跨管道; 弹性地基梁; 埋设悬跨; 小挠度理论; 屈曲载荷

**中图分类号:** O343 **文献标识码:** A

## BUCKLING ANALYSIS OF SPANNING PIPE BURIED IN LINEAR ELASTIC SOIL

\*XING Jing-zhong<sup>1</sup>, LIU Chun-tu<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China;

2. Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

**Abstract:** Buckling equation of the spanning pipe partially buried in elastic soil is established. Bending equations of the spanning section and the buried section with axial compression are built with small deflection beam theory. Based on stiffness and deformation characteristics of the buried section, more suitable boundary conditions for the spanning section are obtained. Buckling equation of the spanning section is presented in symmetric buckling mode and anti-symmetric buckling mode, and buckling loads under different soil stiffness coefficients are given by numerical method. Research shows that the buckling load coefficient of the spanning pipe is related to the soil stiffness coefficient only. Simply supported beam model is only suitable for the case of specific soil stiffness, and fixed-fixed supported beam model should be adopted for the case of very large soil stiffness. The buckling analysis of the spanning pipe with buried sections can be performed with the proposed method.

**Key words:** spanning pipe; elastic foundation beam; buried spanning pipe; small deflection theory; buckling load

油气管道经常会铺设在复杂的环境条件下, 当铺设在不平坦地面或海底时, 将导致部分管道悬空<sup>[1]</sup>。在深海区域, 或非常坚硬的海床上, 或由于海流淘蚀<sup>[2]</sup>, 悬跨(Spanning)情况很难避免<sup>[3]</sup>。悬跨

造成管道受力复杂, 同时海流的周期性涡旋释放引发海底管道涡激振动, 造成管道疲劳破坏。海流淘蚀造成的悬跨长度可达几十米, 深度十几米, 为此 DnV 专门制定了悬跨管道设计的推荐做法<sup>[4]</sup>, 海底

收稿日期: 2007-03-09; 修改日期: 2008-05-22

基金项目: 天津工业大学科研开发基金项目(029519)

作者简介: \*邢静忠(1966—), 男, 甘肃平凉人, 教授, 博士, 主要从事海洋结构力学分析(E-mail: hsjingzh@tjpu.edu.cn);

柳春图(1935—), 男, 江苏镇江人, 研究员, 博导, 主要从事断裂力学和海洋结构疲劳断裂研究。

管道规范对悬跨情况作了相应规定<sup>[5-6]</sup>。

DnV 规范建议将悬跨管道简化为有轴向力的简支梁模型或两端固支梁模型<sup>[4]</sup>。普遍认为,简支梁模型弱化了埋设段管道的弹性约束作用,而固支梁强化了这种作用。研究认为,弹性支座能更准确地反映两端埋设段管道对悬跨段管道的约束作用,Kapuria 建议将悬跨管道简化为两端由线弹簧和转角弹性支承的梁模型<sup>[7]</sup>。

Maltby 等通过实验和理论方法研究了埋设管道在轴向压力作用下的屈曲问题<sup>[8-9]</sup>; Miles 也对直线埋设的管道模型进了实验研究<sup>[10]</sup>; Croll 研究给出了裸露铺设海底管道屈曲简化分析方法<sup>[11]</sup>。对于埋设悬跨管道的屈曲问题国内外未见报道。作者曾利用悬跨管道的纵横弯曲方程给出了悬跨管道的第一阶屈曲方程<sup>[12]</sup>,但尚未解决悬跨管道的反对称屈曲和高阶屈曲问题。和已往研究不同的是,本文没有采用现有规范推荐的简支梁模型或两端固支梁模型,通过对埋设段管道的变形分析提出了更加符合悬跨段管道实际情况的边界条件,建立了埋设悬跨管道屈曲模型。导出了悬跨管道对称屈曲和反对称屈曲的屈曲方程,数值求解了不同土壤刚度下管道的屈曲载荷。

本文模型更合理地解决了悬跨段管道两端的边界条件,弥补了现有规范中悬跨管道只能处理为简支梁模型和固支梁模型的不足,为埋设悬跨管道屈曲分析提供更为合理的分析方法。

### 1 计算模型

通常,管道的悬跨长度  $2a$  远远大于管道直径,屈曲挠度  $y_1(x)$  与跨度相比很小,可以用梁的小挠度理论计算悬跨管道弯曲变形。一般情况下埋设段管道很长,埋设在线刚度为  $k_b$  的线弹性海床中。设管道弯曲刚度  $EI$ ,管道内轴向压力  $S$ ,坐标原点位于悬跨段左端,  $x$  轴位于管道直线平衡位置,挠度向下为正,管道屈曲后的构型关于跨中对称或反对称(图 1)。

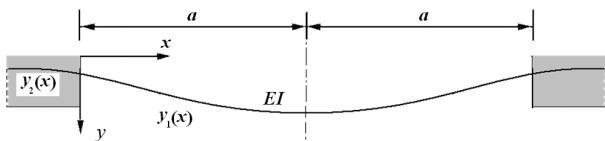


图 1 线弹性土壤埋设悬跨管道的计算模型

Fig.1 Calculation model of spanning pipe in linear elastic soil

#### 1.1 悬跨段管道的弯曲方程及其求解

根据细长梁小挠度弯曲方程:

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq x \leq 2a) \quad (1)$$

引入无量纲变换:

$$\xi = x/a, \quad Y_1(\xi) = y_1(x)/a, \quad 2p = Sa^2/(EI)$$

方程(1)转化为由无量纲挠度函数  $Y_1(x)$  表示的方程:

$$\frac{\partial^4 Y_1}{\partial \xi^4} + 2p \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} = 0, \quad (0 \leq \xi \leq 2) \quad (2)$$

方程(2)的通解可以表示为:

$$Y_1(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \sin(\sqrt{2p}\xi) + C_4 \cos(\sqrt{2p}\xi), \quad (0 \leq \xi \leq 2) \quad (3)$$

#### 1.2 埋设段管道右端的变形与内力关系

为了得到埋设段管道和悬跨段管道连接处的变形与内力关系。建立左端埋设在线弹性土壤中的无限长的管道在  $x=0$  处截面上的剪力、弯矩与该点挠度、转角之间的关系。埋设段管道发生小挠度弯曲的微分方程:

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + k_b y_2(x) = 0, \quad (-\infty \leq x \leq 0) \quad (4)$$

引入无量纲变换:

$$\xi = x/a, \quad Y_2(\xi) = y_2(x)/a, \quad \lambda_0 = \sqrt{k_b a^4 / (EI)}$$

其中  $\lambda_0$  是表征土壤刚度的无量纲刚度系数。方程(4)转化为由无量纲挠度函数  $Y_2(x)$  表示的方程:

$$\frac{\partial^4 Y_2}{\partial \xi^4} + 2p \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \xi^2} + \lambda_0^2 Y_2(\xi) = 0, \quad (-\infty \leq \xi \leq 0) \quad (5)$$

方程(5)的通解可表示为:

$$Y_2(\xi) = C_5 e^{-r_3 \xi} \sin r_4 \xi + C_6 e^{r_3 \xi} \sin r_4 \xi + C_7 e^{-r_3 \xi} \cos r_4 \xi + C_8 e^{r_3 \xi} \cos r_4 \xi, \quad (-\infty \leq \xi \leq 0) \quad (6)$$

其中:

$$r_3 = \sqrt{\frac{\lambda_0 - p}{2}}, \quad r_4 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + p}{2}}$$

因埋设段管道挠度  $Y_2(x)$  在  $x$  负无穷远处的位移有限,则通解(6)中的积分常数:

$$C_5 = 0, \quad C_7 = 0 \quad (7)$$

管道挠度  $Y_2(x)$  在  $x=0$  的边界条件:

$$-\frac{EI}{a} Y_2''(0) = M_0, \quad -\frac{EI}{a^2} Y_2'''(0) = Q_0 \quad (8)$$

考虑式(7),将通解(6)代入式(8),求解得到用  $M_0$ 、 $Q_0$  表示的积分常数  $C_6$ 、 $C_8$ 。由式(6)得埋设段管道的挠度函数  $Y_2(\xi)$ ,对其求导可以得到转角函

数。由此得到用式(9)表示的悬跨段管道需要满足的边界条件。

### 1.3 悬跨段管道的边界条件

埋设段管道在 $\xi=0$ 处与悬跨段管道连接,提供对悬跨段管道刚度约束。悬跨段管道与埋设段管道在 $\xi=0$ 处变形和内力连续,所以悬跨段管道变形和转角满足:

$$Y_1(0) = -Y_1'''(0) \frac{\sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0^2} + Y_1''(0) \frac{\lambda_0 - 2p}{\lambda_0^2} \quad (9a)$$

$$Y_1'(0) = -Y_1'''(0) \frac{1}{\lambda_0} + Y_1''(0) \frac{\sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0} \quad (9b)$$

对于对称屈曲,跨中有对称条件:

$$Y_1'(1) = 0, Y_1'''(1) = 0 \quad (10)$$

对于反对称屈曲,跨中有反对称条件:

$$Y_1(1) = 0, Y_1''(1) = 0 \quad (11)$$

## 2 屈曲方程

### 2.1 对称屈曲情况

将解(3)代入边界条件式(9a)、式(9b)和式(10),得到包含4个积分常数的线性代数方程组,令其系数矩阵的行列式等于零,可得轴力系数 $p$ 的屈曲方程,经化简得到:

$$\frac{4p^2}{\lambda_0} [(\lambda_0 - 2p) \sin(\sqrt{2p}) + 2\sqrt{p(\lambda_0 - p)} \cos(\sqrt{2p})] = 0 \quad (12)$$

当土壤刚度系数 $\lambda_0$ 趋向于无穷大时,上式的极限为:

$$4p^2 \sin(\sqrt{2p}) = 0 \quad (13)$$

该方程有无穷多个解,对应着各阶对称屈曲构

型。求解式(13)可得埋设在刚性土壤内的管道发生对称屈曲的轴力系数 $p=\pi^2/2$ ,正好等于两端固支梁的失稳载荷对应的轴力系数<sup>[13]</sup>。高阶屈曲的轴力系数依次是 $p=19.7392$ ,  $p=44.4132$ ,  $p=78.9568$ , ...。

### 2.2 反对称屈曲情况

将解(3)代入边界条件式(9a)、式(9b)和式(11),同上节方法得到屈曲方程:

$$\frac{2p}{\lambda_0^2} \{[\lambda_0(\lambda_0 + 2p) + 2p\lambda_0\sqrt{2(\lambda_0 - p)} - 4p^2] \sin(\sqrt{2p}) + \sqrt{2p}[\lambda_0(2p - \lambda_0) + 2p\sqrt{2(\lambda_0 - p)}] \cos(\sqrt{2p})\} = 0 \quad (14)$$

当土壤刚度系数 $\lambda_0$ 趋向于无穷大时,上式的极限为:

$$2p[\sqrt{2p} \cos(\sqrt{2p}) - \sin(\sqrt{2p})] = 0 \quad (15)$$

由此可得埋设在刚性土壤的管道发生反对称屈曲的最小轴力系数 $p=10.09536$ ,正好等于一端固支,另一端简支梁的失稳载荷对应的轴力系数<sup>[13]</sup>。反对称屈曲构型对应的各阶屈曲轴力载荷系数 $p=29.83976$ ,  $p=59.44994$ , ...。

## 3 第一阶屈曲载荷

求解方程(12)和方程(14)可以得到给定轴向力情况下悬跨管道的各阶屈曲载荷。作为特例,下面数值求解方程(12)给出第一阶屈曲的屈曲载荷。

### 3.1 不同土壤刚度下的第一阶屈曲载荷

变化土壤刚度系数 $\lambda_0$ 从0.01到9000,数值求解方程(12)得到表1所示的第一阶对称屈曲载荷的轴力系数 $p$ 。表中结果和文献[12]结果一致。

表1 不同土壤刚度系数下屈曲载荷的轴向力系数

Table 1 Axial force coefficient of buckling load under different soil stiffness

$\lambda_0$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$	$\times 1$	$\times 10$	$\times 10^2$	$\times 10^3$
1.0	0.00995039	0.095310	0.692078	2.29499	3.78171	4.79812
2.0	0.0198026	0.182316	1.09250	2.81443	4.07581	4.83756
3.0	0.0295588	0.262340	1.37179	3.09429	4.21640	4.85519
4.0	0.0392207	0.336407	1.58441	3.27896	4.30350	4.86575
5.0	0.0487901	0.405332	1.75489	3.41357	4.36443	4.87297
6.0	0.0582688	0.469764	1.89639	3.51777	4.41019	4.87831
7.0	0.0676585	0.530246	2.01682	3.60176	4.44624	4.88247
8.0	0.0769608	0.587219	2.12125	3.67148	4.47561	4.88582
9.0	0.0861774	0.641058	2.21315	3.73064	4.50015	4.88860

由表1中看到,当 $\lambda_0=9000$ 时屈曲载荷对应的轴力系数 $p=4.8886$ 已经达到两端固支管道屈曲载荷极限值4.9348的99.1%,说明在 $\lambda_0$ 很大时可以按

照两端固支梁模型来求解悬跨管道屈曲载荷。

### 3.2 简支梁的第一阶屈曲载荷

简支梁的第一阶屈曲载荷对应的轴向力系

数<sup>[13]</sup>。

$$p = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337$$

数值求解式(12)得到当土壤刚度系数 $\lambda_0=2.4674$ 时,悬跨管道的屈曲载荷等效于简支梁的屈曲载荷,这种情况下的悬跨管道才可以用简支梁模型进行屈曲载荷计算。

## 4 讨论和结论

本文给出了两端埋设在线弹性土壤中的悬跨管道的屈曲方程,数值求解了不同土壤刚度下的屈曲载荷。计算表明土壤刚度系数对悬跨管道屈曲载荷影响显著,应该按照土壤刚度系数大小选用简支梁模型或两端固支梁模型。

当土壤刚度系数很大时,两端固支梁模型的屈曲行为可以表征悬跨管道屈曲特性;在 $\lambda_0=2.4674$ 时,悬跨管道屈曲才可以用简支梁模型来模拟。偏离这些使用条件时,简支梁模型和固支梁模型都将导致偏差。本文方法建立了两端埋设悬跨管道的屈曲载荷方程,为工程上准确分析埋设悬跨管道稳定性提供了理论支持。

### 参考文献:

- [1] 王维. 确定海底埋设输油管线允许冲刷长度的一种实用方法[J]. 西南石油学院学报, 1996, 18(3): 94—97.  
Wang Wei. A practical method to determine allowable scour span of buried submarine oil pipeline [J]. Journal of West-South Oil College, 1996, 18(3): 94—97. (in Chinese)
- [2] 王利金, 刘锦昆. 埕岛油田海底管道冲刷悬空机理及对策[J]. 油气储运, 2004, 23(1): 44—48.  
Wang Lijin, Liu Jinkun. Scour spanning principle and countermeasure for submarine pipeline in Cheng island oil field [J]. Oil Gas Storage and Transportation, 2004, 23(1):

- 44—48. (in Chinese)
- [3] Park H I, Kim C H. Analytical methods for the determination of allowable free span lengths [C]. Proceedings of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference, Honolulu, USA, 1997: 377—342.
- [4] Det Norske Veritas (DnV), Free spanning pipeline, recommended practice [S]. RP-F105, 2002.
- [5] Det Norske Veritas (DnV), Submarine pipeline systems, offshore standard [S]. OS-F101, 2000.
- [6] Det Norske Veritas (DnV), Environmental conditions and environmental loads [S]. CN 30.5, 2000.
- [7] Kapuria S, Salpekar V Y, Sengupta S. Fatigue due to vortex-induced oscillations in free spanning pipelines supported on elastic soil bed [C]. Proceedings of the 9th International Offshore and Polar Engineering Conference. Brest, France, 1999: 197—203.
- [8] Maltby T C, Calladine C R. An investigation into upheaval buckling of buried pipelines – I: Experimental apparatus and some observations [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1995, 37(9): 943—963.
- [9] Maltby T C, Calladine C R. An investigation into upheaval buckling of buried pipelines – II: Theory and analysis of experimental observations [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1995, 37(9): 965—983.
- [10] Miles D J, Calladine C R. Lateral thermal buckling of pipelines on the sea bed [J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66: 891—897.
- [11] Croll J G A. A simplified analysis of imperfect thermally buckled subsea pipelines [J]. International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1998, 8(4): 283—291.
- [12] 邢静忠, 柳春图, 徐永君. 埋设悬跨海底管道的屈曲分析[J]. 工程力学, 2006, 23(2): 173—176.  
Xing Jingzhong, Liu Chuntu, Xu Yongjun. Buckling analysis of buried spanning marine pipeline [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(2): 173—176. (in Chinese)
- [13] Roark R J. Formulas for stress and strain [M]. 4th Edition. New York: McGraw-Hill Book Co. Inc., 1965.