

文章编号 : 1005-9865 (2008) 02-0078-05

# 线弹性土壤中埋设悬跨管道的弯曲和振动特性

邢静忠<sup>1</sup>, 柳春图<sup>2</sup>

(1. 天津工业大学 机械电子学院, 天津 300160; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

**摘 要:**利用细长梁小挠度理论, 研究给出了两端埋设在线弹性土壤中的悬跨段管道和埋设段管道在自重作用下的变形和内力公式。基于静挠度公式, 用能量法给出了第一阶弯曲振动的固有频率公式。讨论了不同土壤刚度条件下悬跨段管道的变形和内力特征, 以及第一阶弯曲振动固有频率, 并和工程上推荐使用的简支梁和两端固支梁的静动态特性进行比较。研究表明在跨度大、土壤刚度大、管道弯曲刚度较小时无量纲土壤刚度系数较大, 埋设段管道对悬跨段管道的刚度约束比较大, 悬跨段管道可以近似按两端固支梁模型来模拟; 反之, 只有在土壤刚度系数较小的几个参数点上, 悬跨管道的静动力特性等价于简支梁模型。

**关键词:**悬跨管道; 弹性地基梁; 埋设悬跨; 小挠度理论; 固有频率

**中图分类号:** U175.5; TE832 **文献标识码:** A

## Bending and vibration characteristics of spanning pipe buried in linear elastic soil

XING Jing-zhong<sup>1</sup>, LIU Chun-tu<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China; 2. Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

**Abstract:** Deflection and internal forces formulae of buried section pipe in linear elastic soil and spanning section pipe under self-weight load are deduced with small deflection beam theory. The first order nature frequency formula of bending vibration is given by energy balance method based on the static deflection formula. Deflection and internal forces characteristics as well as the first order frequency of spanning pipe are discussed under different soil stiffness. Comparison between spanning pipeline and simply supported beam, and fixed-fixed supported beam model recommended in engineering in terms of static and dynamic characteristics is done. Research shows that the stiffness influence of the buried section pipe to the spanning section pipe becomes stronger when the span increases, or for the pipe with smaller flexural rigidity in harder soil whereas dimensionless soil stiffness coefficient increases, then the spanning pipe can be modeled by the fixed-fixed supported beam approximately. On the contrary, the spanning pipe can be modeled as a simply supported beam only on several special points with small soil stiffness coefficient.

**Key words:** spanning pipe; elastic foundation beam; buried spanning pipe; small deflection theory; natural frequency

陆地管线经常需要跨越不同地质结构的地层, 地层运动、地震、滑坡、泥石流等自然灾害有时会引起管线某一段失去下面土体支持, 这种受力工况叫悬跨 (spanning), 或管跨。海上油气管道铺设在不平坦的海底时, 将导致部分悬空<sup>[1]</sup>。在深海区域, 或者非常坚硬的海床上, 或者由于海流淘蚀, 悬跨情况有时很难避免<sup>[2,3]</sup>。管道悬跨不仅造成管道的静载应力增大, 同时海流引起周期性涡旋释放会引发悬跨管道的涡激振动, 造成海底管道的疲劳破坏。海流淘蚀造成管道悬跨长度有时可以达到几十米<sup>[4]</sup>。为此 DnV 专门制定了悬跨管道设计规范推荐做法<sup>[5]</sup>。在设计阶段通过最大悬跨长度来控制, 以避免结构频率与涡旋释放频率发生共振为

收稿日期: 2007-02-25

基金项目: 天津工业大学科研开发基金资助项目 (029519)

作者简介: 邢静忠 (1966 - ), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 主要从事海洋结构力学分析。

设计准则<sup>[6]</sup>,同时保证静力强度满足设计条件<sup>[11]</sup>。

国内外学者研究了悬跨管道的应力分析和涡激振动算法<sup>[7,8]</sup>、非线性振动<sup>[9,10]</sup>以及涡激振动引起的疲劳寿命<sup>[11]</sup>。这些研究都使用了两端固支梁,或者简支梁的边界条件。DnV 规范建议悬跨管道可以简化为简支梁或者两端固支梁模型。普遍认为,简支梁模型弱化了埋设段管道的约束作用,而固支梁强化了这种作用,这两种模型认为是悬跨管道的两个极端情况。实际悬跨管道两端很长,通常埋设在土壤里,或者放置在地面或海床上。当悬跨段管道发生弯曲变形时,两端管道要对悬跨段管道产生影响。准确计算两端管道对悬跨段管道的约束作用,对悬跨管道的静力分析和振动分析,都是非常重要的。

弹性支座能在一定程度上更加准确地反映两端管道的约束作用,Kapuria 考虑了土壤刚度,将悬跨管道简化为两端由两个独立的线弹簧和转角弹簧支承的梁模型,研究了涡激振动和疲劳寿命问题<sup>[12]</sup>。研究表明,悬跨管道两端埋设段的约束作用并不能用两个独立弹簧来模拟。利用埋设段和悬跨段同时求解的方法给出了两段管道的弯曲变形和内力,用能量法给出了第一阶弯曲振动频率,研究表明两端固支梁和简支梁在很多情况下不能很好地模拟悬跨管道的静力动力特性。

### 1 控制方程及其求解

通常,管道的悬跨长度  $2a$  远远大于管道直径,横向挠度和跨度相比很小,可以用梁的小挠度理论计算悬跨管道变形。设悬跨管道两端很长,埋设在线刚度为  $k_b$  ( $N/m^2/m$ ) 的线弹性土壤中,忽略轴向力影响。设管道弯曲刚度  $EI$  ( $N \cdot m^2$ ),在均布自重  $q$  ( $N/m$ ) 作用下发生小挠度弯曲,挠度向下为正。坐标系原点选取在没有发生变形的悬跨段管道左端与埋设段管道相接位置,管道变形后关于跨中左右对称(图 1)。

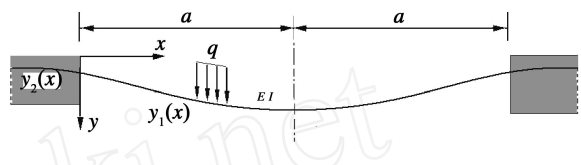


图 1 线弹性土壤埋设的悬跨管道计算模型

Fig. 1 Calculation model of spanning pipe buried in linear elastic soil

#### 1.1 控制方程

根据细长梁小挠度弯曲微分方程,悬跨段管道挠度  $y_1(x)$  满足

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} = \frac{q}{EI} \tag{1}$$

埋设在线弹性土壤中的埋设段管道挠度  $y_2(x)$  满足

$$EI \frac{d^4 y_2}{dx^4} + k_b y_2 = q \tag{2}$$

#### 1.2 边界条件

定义无量纲变换  $\xi = x/a$ ,引入无量纲挠度  $Y_1(\xi) = y_1(x)/a$ ,求解方程(1)得到

$$Y_1(\xi) = \frac{q_0}{24} \xi^4 + C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4, \quad (0 \leq \xi \leq 1) \tag{3}$$

其中,  $q_0 = \frac{qa^3}{EI}$ 。考虑到埋设段管道挠度  $y_2(x)$  在负无穷远处的变形条件:

$$\frac{dy_2}{dx} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \quad \frac{d^2 y_2}{dx^2} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0 \tag{4}$$

求解方程(2)得到无量纲挠度  $Y_2(\xi) = y_2(x)/a$ ,它可简化为

$$Y_2(\xi) = q_0 / (4 \beta^4) - e^{\beta \xi} (C_5 \cos \beta \xi + C_6 \sin \beta \xi), \quad (-\infty < \xi < 0) \tag{5}$$

其中,引入无量纲土壤刚度系数  $\beta$  来反映土壤的相对刚度

$$\beta^4 = k_b a^4 / (4 EI) \tag{6}$$

在悬跨段管道与埋设段管道的相接位置  $\xi = 0$ ,有连续性条件

$$Y_1(0) = Y_2(0), \quad \frac{dY_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{dY_2}{d\xi} \Big|_{\xi=0}, \quad \frac{d^2 Y_1}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 Y_2}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0}, \quad \frac{d^3 Y_1}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^3 Y_2}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0} \tag{7}$$

在悬跨段管道的跨中位置,有对称条件:

$$\frac{dY_1^3}{d^3} /_{=1} = 0, \quad \frac{dY_1}{d} /_{=1} = 0 \quad (8)$$

## 2 求解变形和内力

将方程(1)和方程(2)的通解式(3)和式(5)代入边界条件式(7)和式(8),确定积分常数  $C_1$  至  $C_6$ ,并由此得到挠度公式,对挠度公式求两阶导数可以得到弯矩函数。

### 2.1 确定积分常数

将式(3)和式(5)代入式(7)和式(8),得到6个积分常数:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{q_0}{6}, C_2 = \frac{q_0(2\frac{2}{0} - 3)}{12\frac{0}{0}(0+1)}, C_3 = \frac{q_0(2\frac{0}{0} + 3)}{6\frac{0}{0}(0+1)}, \\ C_4 = \frac{q_0(2\frac{3}{0} + 6\frac{2}{0} + 6\frac{0}{0} + 3)}{12\frac{4}{0}(0+1)}, C_5 = \frac{q_0(2\frac{2}{0} + 6\frac{0}{0} + 3)}{12\frac{3}{0}(0+1)}, C_6 = -\frac{q_0(2\frac{2}{0} - 3)}{12\frac{3}{0}(0+1)} \end{cases} \quad (9)$$

### 2.2 挠度函数

将积分常数式(9)代入到式(3)和式(5),可得无量纲挠度函数。

### 2.3 弯矩方程

将式(3)和式(5)关于  $\xi$  求导两次,得无量纲弯矩为

$$M_1(\xi) = -\frac{d^2 Y_1(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{q_0}{2} - 6C_1 - 2C_2, \quad (0 \leq \xi < 1) \quad (10a)$$

$$M_2(\xi) = -\frac{d^2 Y_2(\xi)}{d\xi^2} = 2\frac{2}{0}e^{0 \cdot \xi} \cdot [C_6 \cos(0 \cdot \xi) - C_5 \sin(0 \cdot \xi)], \quad (-\infty < \xi < 0) \quad (10b)$$

悬跨段管道与埋设段管道相接位置的无量纲弯矩为

$$M_1(\xi) /_{=0} = -2C_2 = -\frac{q_0(2\frac{2}{0} - 3)}{6\frac{0}{0}(0+1)} \quad (11)$$

悬跨段管道跨中最大无量纲弯矩

$$M_1(\xi) /_{=1} = -\frac{q_0}{2} - 6C_1 - 2C_2 = \frac{2+3\frac{0}{0}+3}{6\frac{0}{0}(0+1)} q_0 \quad (12)$$

### 2.4 土壤刚度无穷大时悬跨管道的最大挠度和弯矩

令式(9)中的土壤刚度系数趋向无穷大,得到积分系数的极限值:

$$C_1 = -\frac{q_0}{6}, C_2 = \frac{q_0}{6}, C_3 = 0, C_4 = 0 \quad (13)$$

将式(13)代入式(3),得无量纲挠度函数。变换成有量纲挠度,得跨中挠度为

$$y_1(a) = 2aY_1(1) = q_0 a^4 / (24EI)$$

与文献[13]给出的长度  $l=2a$  的挠度结果完全相同。将式(13)代入式(10a),得无量纲弯矩。变换成有量纲弯矩:

$$M_1(0) = -qa^3/3, \quad M_1(1) = qa^3/6$$

与文献[13]给出的长度  $l=2a$  的弯矩结果完全相同。可见,两端埋设在无穷大刚度土壤里的悬跨管道等价于两端固支梁模型。

## 3 用能量法计算第一阶弯曲固有频率

当管道在弯曲后的平衡位置附近发生小振幅振动时,静平衡位置的最大动能等于最大振幅位置的势能。当支座参与振动时,势能部分需要考虑支座的弹性势能。

以悬跨段管道挠度曲线式(3)作为振型,忽略弹性土壤及其埋设段管道动能,只考虑弹性土壤的弹性势能及悬跨段管道的动能和变形能。弹性土壤的弹性势能由截面  $x=0$  位置的内力来反映,频率公式为:

$$\omega^2 = (EI \int_0^a y_1^2(x) dx - M_1(0) y_1(0) + Q_1(0) y_1(0)) / (A \int_0^a y_1^2(x) dx) \quad (14)$$

式中: $Q_1(0)$ 和  $M_1(0)$ 分别是截开位置  $x=0$  处的剪力和弯矩。由无量纲挠度和有量纲挠度之间的关系,式

(14)可表示为:

$$\omega_0^2 = \frac{EL}{Ad^4} \frac{\int_0^1 Y_1^2(\xi) d\xi + Y(0)Y'(0) - Y'''(0)Y(0)}{\int_0^1 Y_1^2(\xi) d\xi} = \frac{EL}{Ad^4} \omega_0^2 \quad (15)$$

上式定义了无量纲频率系数  $\omega_0$ 。将式(3)及其导数代入频率公式(15),考虑式(9),化简得:

$$\omega_0^2 = \frac{252(1 + \lambda_0^4)/45(1 + 2\lambda_0 + 2\lambda_0^2) + 4\lambda_0^3(15 + 6\lambda_0 + \lambda_0^2)l}{2835(1 + 4\lambda_0 + 8\lambda_0^2) + 252\lambda_0^3(120 + 117\lambda_0 + 86\lambda_0^2 + 49\lambda_0^3) + 32\lambda_0^7(171 + 55\lambda_0 + 11\lambda_0^2 + \lambda_0^3)} \quad (16)$$

### 4 静动力特性与现有模型比较

工程上推荐用两端固支梁或者简支梁模型来模拟悬跨管道的静力和动力特性。通过第 3 节的比较发现,只有当土壤刚度系数趋向无穷大时,悬跨段管道才等价于两端固支梁模型。从式(11),式(12)和式(16)看出,悬跨段管道的内力和频率特性与土壤刚度系数有关。

#### 4.1 简支梁的最大挠度和弯矩

按照文献[13],跨度  $l = 2a$  的简支梁跨中的最大挠度和最大弯矩分别等于

$$y_{1max} = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5qa^4}{24EI}, \quad M_1(a) = \frac{qa^2}{4}$$

#### 4.2 简支梁和两端固支梁的第一阶固有频率

根据文献[14],简支梁和两端固支梁的第一阶频率公式分别为:

$$\omega_0^2 = 3.14159^2 \frac{EL}{Al^4}, \quad \omega_0^2 = 4.73004^2 \frac{EL}{Al^4}$$

#### 4.3 不同土壤刚度下悬跨管道的最大挠度和最大弯矩

当土壤刚度系数  $\lambda_0$  变化时,图 2 给出了悬跨段管道跨中最大挠度的变化情况。从图中看出,只有在  $\lambda_0 = 2.1626$  时悬跨管道的最大挠度等价于简支梁模型的最大挠度。在  $\lambda_0$  趋向无穷大时悬跨段管道的最大挠度等价于两端固支梁模型的最大挠度。

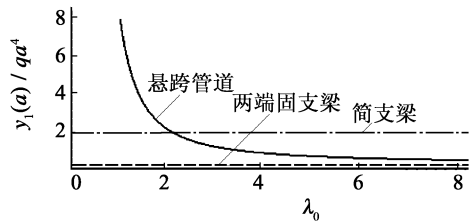


图 2 埋设悬跨管道的最大挠度与土壤刚度系数的关系  
Fig. 2 Maximum deflection of the pipe vs. soil stiffness coefficient

图 3 给出了土壤刚度系数  $\lambda_0$  变化时悬跨管道跨中最大正弯矩和左端最大负弯矩的变化情况。随着  $\lambda_0$  增大,悬跨段管道的跨中弯矩逐渐减小;悬跨段管道的左端弯矩在  $\lambda_0$  很小时大于零,且随  $\lambda_0$  增加逐渐减小,在  $\lambda_0 = 1.22475$  时等于零,随后其绝对值逐渐增大。在  $\lambda_0 = 4.3723$  时悬跨管道的最大正弯矩等价于简支梁跨中正弯矩;当  $\lambda_0$  趋于无穷大时,悬跨管道的最大正负弯矩等价于两端固支梁模型。

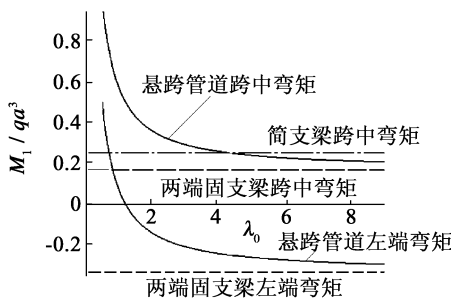


图 3 埋设悬跨管道的最大弯矩与土壤刚度系数的关系  
Fig. 3 Maximum bending moment of the pipe vs. soil stiffness coefficient

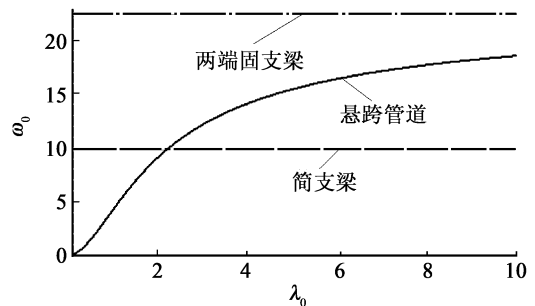


图 4 埋设悬跨管道的第一阶弯曲固有频率系数与土壤刚度系数的关系  
Fig. 4 The first order natural frequency of spanning pipe vs. stiffness of soil coefficient

#### 4.4 不同土壤刚度下悬跨管道的弯曲振动固有频率

图4给出了当土壤刚度系数 $\alpha_0$ 变化时悬跨段管道第一阶弯曲振动固有频率系数 $\beta_0$ 的变化情况。从图中看出,在 $\alpha_0 = 2.2078$ 时固有频率等价于两端简支梁。当 $\alpha_0$ 趋于无穷大时,悬跨段管道的频率等价于两端固支梁模型。

## 5 结 语

从两端埋设在线弹性土壤里的悬跨管道模型的静动态特性分析后发现,只有在土壤刚度系数 $\alpha_0$ 的几个特殊点上,悬跨管道的静动态特性等价于简支梁模型。只有在土壤刚度系数 $\alpha_0$ 非常大的情况下,悬跨管道才可以近似用两端固支梁模型来处理。

本研究提供的理论和计算公式可以为悬跨管道的静动态计算提供理论指导。特别是土壤刚度系数 $\alpha_0$ 的引入准确量化了土壤刚度的弹性约束作用,使土壤刚度的约束作用度量不再是按照实际土壤刚度的大小。应该用综合考虑土壤刚度、管道弯曲刚度和跨度的无量纲土壤刚度系数 $\alpha_0$ ,才能更客观地反映埋设段管道对悬跨段管道的约束作用。

## 参考文献:

- [1] 王 维. 确定海底埋设输油管线允许冲刷长度的一种实用方法[J]. 西南石油学院学报, 1996, 18(3):94 - 97.
- [2] 王利金, 刘锦昆. 埋岛油田海底管道冲刷悬空机理及对策[J]. 油气储运, 2004, 23(1):44 - 48.
- [3] Park H I, Kim C H. Analytical methods for the determination of allowable free span lengths[A]. Proceedings of the Seventh International Offshore and Polar Engineering Conference[C]. Honolulu, USA, 1997. 377 - 342.
- [4] 唐友刚, 李长升, 项忠权. 加固前后输油管道固有频率计算[J]. 石油学报, 1997, 18 (2):128 - 133.
- [5] Det Norske Veritas(DnV). Free spanning pipeline[M]. Recommended Practice, RP-F105, 2002.
- [6] Det Norske Veritas(DNV). Submarine pipeline systems[M]. Offshore Standard, OS-F101, 2000.
- [7] 曾晓辉, 邢静忠, 柳春图, 等. 多作业状态下近海油气管道的力学分析及软件[J], 中国造船, 2002, 43(4):45 - 54.
- [8] 曾晓辉, 邢静忠, 柳春图, 等. 海底管道强度评估中的两个问题[J]. 中国造船, 2002, 43(增刊):180 - 186.
- [9] 肖锡武, 王海潮. 悬跨管道的参线性自由振动[J]. 海洋工程, 1992, 10(1):21 - 34.
- [10] 戴英杰, 宋甲宗. 悬跨段海洋管道非线性自由振动分析[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(6):756 - 760.
- [11] Angus R, Grytten T, Nystrom P R. Case studies in pipeline free span fatigue[A]. Proceedings of the Tenth International Offshore and Polar Engineering Conference[C]. Seattle, USA, 2000. 275 - 284.
- [12] Kapuria S, Salpekar V Y, Sengupta S. Fatigue due to vortex-induced oscillations in free spanning pipelines supported on elastic soil bed[A]. Proceedings of the Ninth International Offshore and Polar Engineering Conference[C]. Brest, France, 1999. 197 - 203
- [13] Roark R J. Formulas for stress and strain[M]. New York: Mc Graw-Hill Book Co. Inc., 1965.
- [14] Bishop R E D, Johnson D C. Vibration analysis tables[M]. Cambridge University Press, 1956.